Jurnal Matematika Integratif
Volume 11 No 1, April 2015, pp 1 - 6
ISSN 1412-6184

Penjumlahan dari *Subnear-ring Fuzzy*

Saman Abdurrahman
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM 36 Banjarbaru Kalimantan Selatan 70714
Email: samunlam@gmail.com

ABSTRAK

Dalam makalah diperkenalkan konsep penjumlahan *subnear-ring fuzzy*, penjumlahan ideal *fuzzy* dari *near-ring*, dan membuktikan beberapa sifat dari konsep ini. Hasil dari penelitian ini adalah penjumlahan dari *subnear-ring fuzzy* adalah *subnear-ring fuzzy*, dan penjumlahan ideal *fuzzy* dari *near-ring* adalah ideal *fuzzy* dari *near-ring*.

Kata kunci: *jumlah*, *subnear-ring fuzzy*, *ideal fuzzy*.

ABSTRACT

This paper introduce the concept on sum of subnear-rings, sum of fuzzy ideals of a near-ring, and prove some properties of this concept. Result of this research is the sum of fuzzy subnear-ring is the fuzzy subnear-ring, and the sum of fuzzy ideals of near-ring is the fuzzy ideal of near-ring.

Keywords: *sum*, *fuzzy subnear-ring*, *fuzzy ideal.*

1. Pendahuluan

Penelitian terkait dengan struktur aljabar *fuzzy* telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya Abou-Zaid [2] memperkenalkan konsep *Near-ring fuzzy*. Menurut Pilz [6], *near-ring* merupakan struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner, dimana terhadap operasi pertama membentuk grup yang tidak harus *abelian*, dan terhadap operasi kedua membentuk *semigrup*, dan terhadap operasi pertama dan kedua, cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Penelitian *near-ring fuzzy* selanjutnya dikembangkan pada konsep *subnear-ring fuzzy*, dan ideal *fuzzy* dari *near-ring*. Beberapa penelitian terkait dengan ideal *fuzzy* dari *near-ring* telah dilakukan oleh Abdurrahman *et al* [1] diantaranya adalah ideal *fuzzy* dari *near-ring*, yang meliputi hubungan antara ideal dengan ideal *fuzzy* dari suatu *near-ring*. Dalam tulisan ini akan disajikan hasil kajian teori tentang penjumlahan *subnear-ring fuzzy* dari suatu *near-ring*. Ide tulisan ini dimotivasi oleh pernyataan Satyanarayana *et al* [7] menyatakan, jika A dan B adalah ideal dari suatu *near-ring* R, maka A + B adalah ideal dari R. Dari sifat ini muncul suatu pertanyaan, apakah sifat ini berlaku juga pada ideal *fuzzy*nya? Berangkat dari permasalahan ini, maka dalam tulisan ini akan dibicarakan hasil penjumlahan dari *subnear-ring fuzzy*, yang meliputi penjumlahan ideal *fuzzy* dari suatu *near-ring*.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur dari berbagai sumber baik berupa buku, atau jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan *near-ring*, *subnear-ring*, ideal *near-ring*, *near-ring fuzzy*, *subnear-ring fuzzy,* dan ideal *fuzzy near-ring*.

Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang *near-ring*, *subnear-ring*, dan ideal *near-ring*. Konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu dalam memahami konsep *near-ring fuzzy*, *subnear-ring fuzzy*, dan ideal *fuzzy near-ring*.

Setelah memahami konsep near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, dan ideal fuzzy near-ring, selanjutnya mendefinisikan penjumlahan dari dua *subset fuzzy*, membuktikan beberapa lemma atau teorema yang terkait, dan menentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat baru, yang mendukung pada pembuktian hasil penjumlahan antara *subnear-ring fuzzy*, dan penjumlahan antara ideal *fuzzy near-ring*.

Langkah terakhir, dengan menggunakan lemma atau teorema yang saling terkait, maka dibuktikan lemma atau teorema dari hasil penjumlahan antara *subnear-ring fuzzy*, dan penjumlahan antara ideal *fuzzy near-ring*.

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas hasil dari penjumlahan antara *subnear-ring fuzzy*, dan penjumlahan antara ideal *fuzzy near-ring*, berikut diberikan beberapa definisi, lemma, dan teorema yang mendukung pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 1. (Pilz, [6]) *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner + dan . disebut near ring, jika memenuhi:*

(1) $(R, +)$ *adalah grup* (*tidak harus grup abelian*),

(2) $(R, .)$ *adalah semigrup,*

(3) *untuk setiap $x,y,z\in$R berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri*

(i). distributif kanan : $(x + y) . z = x . z + y . z$

(ii). distributif kiri : $x . (y + z) = x . y + x . z$

Suatu *near-ring* disebut *near-ring kanan* jika memenuhi aksioma (1), (2), dan (3) bagian (i), dan disebut *near-ring kiri* jika memenuhi aksioma (1), (2), dan (3) bagian (ii). Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, dan $x{\cdot}y$ dapat juga ditulis xy.

Definisi 2. (Clay, [3]) *Diberikan near-ring R. Subgrup H dari R disebut subnear-ring dari R, jika memenuhi $HH\subseteq H$.*

Pada *near-ring*, grupnya tidak harus abelian terhadap operasi +, maka dalam mendefinisikan ideal dari *near-ring* subgrupnya harus merupakan suatu subrup normal.

Definisi 3. (Clay, [3]) *Diberikan near-ring R. Subgrup normal I dari R disebut ideal dari R, jika*

(1). $RI\subseteq I$

(2). $(r + i)s - rs\in I$ *untuk setiap $r, s\in R$ dan $i\in I$.*

Subgrup normal I dari R, memenuhi kondisi (1) disebut *ideal kiri* dari R, dan memenuhi kondisi (2) disebut *ideal kanan* dari R.

Definisi 4. (Mordeson *et al.*, [5]) *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan α disebut subset fuzzy dari X jika $\alpha : X \to [0, 1]$. Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy dari X dinotasikan dengan $\mathbb{F}(X)$.*

Definisi 5. (Mordeson *et al.*, [5]) *Jika $\alpha,\beta\in\mathbb{F}(X)$, maka untuk setiap $x\in X$:*

(1) $\alpha\subseteq\beta$ *jika dan hanya jika* $\alpha(x) \le \beta(x)$,

(2) $(\alpha\cap\beta)(x) = min\{\alpha(x), \beta(x)\}$.

Definisi 6. (Kandasamy, [4]) *Diberikan near-ring R dan $\alpha\in\mathbb{F}(R)$. Subset fuzzy α disebut subnear-ring fuzzy dari R jika untuk setiap $x, y\in R$ berlaku:*

$$\alpha(x - y) \ge min\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \text{ dan } \alpha(xy) \ge min\{\alpha(x), \alpha(y)\}.$$

Definisi 7. (Kandasamy, [4]) *Diberikan near-ring R dan $\alpha\in\mathbb{F}(R)$. Subset fuzzy α disebut ideal fuzzy dari R, jika untuk setiap $x, y, z\in R$ berlaku:*

(1) $\alpha(x - y) \ge min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$,

(2) $\alpha(x) = \alpha(y + x - y)$,

Jurnal Matematika Integratif ISSN 1412-6184
Volume 11 No 1, April 2015, pp 1 - 6

(3) $\alpha(xy) \geq \alpha(y)$, *dan*

(4) $\alpha((x+z)y - xy) \geq \alpha(z)$.

Suatu μ disebut *ideal kiri fuzzy dari R* jika memenuhi kondisi (1), (2), dan (3), sedangkan μ disebut *ideal kanan fuzzy dari R* jika memenuhi kondisi (1), (2), dan (4).

Lemma 8. (Abdurrahman *et al.*, [1]) *Diberikan near-ring R. Jika α adalah subnear-ring fuzzy dari R, maka* $\alpha(0_R) \geq \alpha(x)$, *dan* $\alpha(-x) = \alpha(x)$ *untuk setiap* $x \in R$.

Definisi 9. (Abou-Zaid, [2]) *Diberikan near-ring R, dan α, β∈*$\mathbb{F}(R)$*. Penjumlahan α dan β didefinisikan dengan,*

$$(\alpha \oplus \beta)(x) := \begin{cases} \sup[\min\{\alpha(y), \beta(z)\}], & x = y + z \\ 0, & x \neq y + z \end{cases}$$

untuk setiap x∈R.

Setelah diberikan definisi, lemma, dan teorema yang mendukung pada pembahasan hasil dari penjumlahan dari *subnear-ring fuzzy*, dan hasil penjumlahan dari ideal *fuzzy near-ring*, berikut disajikan lemma dan teorema yang menjadi bahasan dalam tulisan ini.

Lemma 10. *Jika α dan β adalah subnear-ring fuzzy dari near-ring R, maka* $(\alpha\oplus\beta)(0_R) \geq (\alpha\oplus\beta)(x)$, *dan* $(\alpha\oplus\beta)(-x) = (\alpha\oplus\beta)(x)$ *untuk setiap* $x \in R$.

Bukti:
Diambil sebarang $x \in R$, maka $x = y + z$ untuk suatu $y, z \in R$. Mengingat α dan β adalah *subnear-ring fuzzy* dari *R*, maka menurut Lemma 8: $\alpha(0_R) \geq \alpha(y)$, $\beta(0_R) \geq \beta(z)$, *dan* $\beta(x) = \beta(-x)$. Akibatnya:

$$(\alpha\oplus\beta)(0_R) = sup[min\{\alpha(0_R), \beta(0_R)\}] \geq sup[min\{\alpha(y), \beta(z)\} = (\alpha\oplus\beta)(x).$$

dan,

$$(\alpha\oplus\beta)(x) = sup[min\{\alpha(0_R), \beta(x)\}] = sup[min\{\alpha(0_R), \beta(-x)\}] = (\alpha\oplus\beta)(-x). \square$$

Teorema 11. *Diberikan α dan β adalah subnear-ring fuzzy dari near-ring R. Jika β adalah subgrup normal fuzzy dari R, maka α⊕β adalah subnear-ring fuzzy dari R.*

Bukti:
Diambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x = a + b$ dan $y = c + d$ untuk suatu $a, b, c, d \in R$, maka:

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(x-y) &= (\alpha\oplus\beta)(a + b - (c + d)) = (\alpha\oplus\beta)(a - c + c + b - c - d) \\ &= sup[min\{\alpha(a - c), \beta(c + b - c - d)\}] \\ &\geq sup[min\{min\{\alpha(a), \alpha(c)\}, min\{\beta(c + b - c), \beta(d)\}\}] \\ &= sup[min\{min\{\alpha(a), \alpha(c)\}, min\{\beta(b), \beta(d)\}\}] \\ &\geq min[sup\{min\{\alpha(a), \beta(b)\}\}, sup\{min\{\alpha(c), \beta(d)\}\}] \\ &= min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(xy) &= (\alpha\oplus\beta)(x(c + d)) = (\alpha\oplus\beta)(xc + xd) = sup[min\{\alpha(xc), \beta(xd)\} \\ &\geq sup[min\{\alpha(c), \beta(d)\}] = min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\}. \square\end{aligned}$$

Teorema 12. *Jika α dan β adalah ideal fuzzy dari near-ring R, maka α⊕β adalah ideal fuzzy dari R.*

Bukti:

Mengingat *α* dan *β* adalah ideal *fuzzy* dari *near-ring R*, maka menurut Teorema 11, berlaku: $(\alpha\oplus\beta)(x - y) \geq min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\}$, untuk setiap $x, y \in R$.

Selanjutnya, diambil sebarang $x, y, z \in R$ dengan $x = a + b$, dan $y = c + d$ untuk suatu $a, b, c, d \in R$, maka:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\oplus\beta)(y + x - y) &= (\alpha\oplus\beta)(y + a + b - y) = (\alpha\oplus\beta)(y + a - y + y + b - y)\\
&= sup[min\{\alpha(y + a - y), \beta(y + b - y)\}]\\
&= sup[min\{\alpha(a), \beta(b)\}] = (\alpha\oplus\beta)(x), \text{ dan}\\
(\alpha\oplus\beta)[(x + z)y - xy] &= (\alpha\oplus\beta)[(x + z)y - xy + 0_R]\\
&= sup[min\{\alpha[(x + z)y - xy], \beta(0_R)\}]\\
&\geq sup[min\{\alpha(z), \beta(0_R)] = (\alpha\oplus\beta)(z). \ \square
\end{aligned}
$$

Lemma 13. *Diberikan near-ring R. Jika α dan β adalah ideal fuzzy dari R, maka untuk setiap* $x, y \in R$:

(1) $(\alpha\oplus\beta)(x+y) = (\alpha\oplus\beta)(y+x)$, *dan*

(2) $(\alpha\oplus\beta)(x-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)$ *maka* $(\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(y)$.

Bukti:

(1) Mengingat α dan β adalah ideal fuzzy dari *R*, maka menurut Teorema 12, $\alpha\oplus\beta$ adalah ideal fuzzy dari *R*.
Diambil sebarang $x, y \in R$, maka $(\alpha\oplus\beta)(z) = (\alpha\oplus\beta)(-x+z+x)$ untuk setiap $x, z \in R$ yang mengakibatkan,

$$
\begin{aligned}
(\alpha\oplus\beta)(x+y) &= (\alpha\oplus\beta)(-x+[x+y]+x) = (\alpha\oplus\beta)([-x+x]+y+x)\\
&= (\alpha\oplus\beta)(y+x),
\end{aligned}
$$

(2) Misalkan $\alpha\oplus\beta$ ideal fuzzy dari *R* dan $(\alpha\oplus\beta)(x-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)$ untuk setiap $x, y \in R$.
Diambil sebarang $x, y \in R$, maka

a)
$$
\begin{aligned}
(\alpha\oplus\beta)(x) &= (\alpha\oplus\beta)(x+0_R) = (\alpha\oplus\beta)(x+[-y+y]) = (\alpha\oplus\beta)([x-y]+y)\\
&= (\alpha\oplus\beta)([x-y]-[-y]) \geq min\{(\alpha\oplus\beta)(x-y), (\alpha\oplus\beta)(-y)\}\\
&= min\{(\alpha\oplus\beta)(0_R), (\alpha\oplus\beta)(y)\} = (\alpha\oplus\beta)(y).
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
(\alpha\oplus\beta)(y) &= (\alpha\oplus\beta)(-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R - y) = (\alpha\oplus\beta)([-x+x]-y)\\
&= (\alpha\oplus\beta)(-x+[x-y]) = (\alpha\oplus\beta)(-x-[-(x-y)])\\
&\geq min\{(\alpha\oplus\beta)(-x), (\alpha\oplus\beta)(-[x-y])\}\\
&= min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(x-y)\} = min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(0_R)\}\\
&= (\alpha\oplus\beta)(x).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan a) dan b), maka $(\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(y)$ untuk setiap $x, y \in R$. $\square$

Lemma 14. *Diberikan near-ring R, dan* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(R)$.

1) Jika α dan β adalah ideal fuzzy dari R, maka $\alpha\cap\beta$ *ideal fuzzy dari R.*

2) Jika α ideal kanan fuzzy, dan β ideal kiri fuzzy dari R, maka $\alpha\oplus\beta \subseteq \alpha\cap\beta$.

Bukti:

1). Mengingat α dan β adalah ideal fuzzy dari *R*, maka $\alpha\cap\beta$ adalah ideal fuzzy dari *R*, karena untuk setiap $x, y, i \in R$, berlaku:

a).
$$
\begin{aligned}
(\alpha\cap\beta)(x-y) &= min\{\alpha(x-y), \beta(x-y)\}\\
&\geq min\{min\{\alpha(x), \alpha(y)\}, min\{\beta(x), \beta(y)\}\}\\
&= min\{\alpha(x), \alpha(y), \beta(x), \beta(y)\}\\
&= min\{min\{\alpha(x), \beta(x)\}, min\{\alpha(y), \beta(y)\}\}\\
&= min\{(\alpha\cap\beta)(x), (\alpha\cap\beta)(y)\},
\end{aligned}
$$

b).
$$
\begin{aligned}
(\alpha\cap\beta)(x) &= min\{\alpha(x), \beta(x)\} = min\{\alpha(y+x-y), \beta(y+x-y)\}\\
&= (\alpha\cap\beta)(y+x-y),
\end{aligned}
$$

c). $(\alpha\cap\beta)(xy) = min\{\alpha(xy), \beta(xy)\} \geq min\{\alpha(y), \beta(y)\} = (\alpha\cap\beta)(y)$, dan

d).
$$
\begin{aligned}
(\alpha\cap\beta)((x+i)y-xy) &= min\{\alpha((x+i)y-xy), \beta((x+i)y-xy)\}\\
&\geq min\{\alpha(i), \beta(i)\} = (\alpha\cap\beta)(i).
\end{aligned}
$$

2) Misalkan *α* ideal kanan fuzzy, dan *β* ideal kiri fuzzy dari *R*.
Selanjutnya, diambil sebarang $x \in R$, dengan $x = y + z$, untuk suatu $y, z \in R$.

Kasus 1:

Jika $(\alpha\oplus\beta)(x) = 0$, maka $0 = (\alpha\oplus\beta)(x) \leq (\alpha\bigcap\beta)(0_R)$, yang mengakibatkan untuk setiap $x\in R$, berlaku: $(\alpha\oplus\beta)(x) \leq (\alpha\bigcap\beta)(x)$. Dengan kata lain, $\alpha\oplus\beta \subseteq \alpha\bigcap\beta$.

Kasus 2:

Jika $(\alpha o\beta)(x) = sup[min\{\alpha(y), \beta(z)\}]$.

Mengingat $\alpha\bigcap\beta$ adalah ideal fuzzy, β ideal kiri fuzzy, dan α ideal kanan fuzzy dari R, maka

$(\alpha\bigcap\beta)(x) \geq min\{\alpha(x), \beta(x)\}$, $\beta(x) = \beta(yz) \geq \beta(z)$, dan

$\alpha(x) = \alpha(yz) = \alpha((0_R + y)z - 0_R z) \geq \alpha(y)$.

Akibatnya $(\alpha\oplus\beta)(x) \leq min\{\alpha(x), \beta(x)\} \leq (\alpha\bigcap\beta)(x)$. Dengan kata lain, $\alpha\oplus\beta\subseteq\alpha\bigcap\beta$. □

Lemma 15. *Diberikan α dan β adalah ideal fuzzy dari near-ring R. Jika $\alpha^*(x) = \alpha(x) + 1 - \alpha(0_R)$, untuk setiap $\alpha^* \in \mathbb{F}(R)$ dan $x\in R$, maka $(\alpha\oplus\beta)^*$ adalah ideal fuzzy dari R dan $(\alpha\oplus\beta)\subseteq(\alpha\oplus\beta)^*$.*

Bukti:

Misalkan α dan β ideal *fuzzy* dari R dan α^*, $\beta^* \in\mathbb{F}(R)$ dimana $\alpha^*(x) = \alpha(x) + 1 - \alpha(0_R)$, dan $\beta^*(x) = \beta(x) + 1 - \beta(0_R)$ untuk setiap $x\in R$. Akan dibuktikan $(\alpha\oplus\beta)^*$ ideal *fuzzy* dari R, dan $(\alpha\oplus\beta)\subseteq(\alpha\oplus\beta)^*$.

Mengingat α dan β adalah ideal *fuzzy* dari R, maka menurut Teorema 12, $\alpha\oplus\beta$ ideal *fuzzy* dari R, sehingga untuk setiap $x, y, z\in R$, berlaku:

1) $$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*(x-y) &= (\alpha\oplus\beta)(x-y) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &\geq min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\} + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &= min\{(\alpha\oplus\beta)(x) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R), (\alpha\oplus\beta)(y) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\}\\ &= min\{(\alpha\oplus\beta)^*(x), (\alpha\oplus\beta)^*(y)\}.\end{aligned}$$
2) $$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*(xy) &= (\alpha\oplus\beta)(xy) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &\geq min\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\} + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &= min\{(\alpha\oplus\beta)(x) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R), (\alpha\oplus\beta)(y) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\}\\ &= min\{(\alpha\oplus\beta)^*(x), (\alpha\oplus\beta)^*(y)\}.\end{aligned}$$
2) $$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*(y+x-y) &= (\alpha\oplus\beta)(y+x-y) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &= (\alpha\oplus\beta)(x) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R) = (\alpha\oplus\beta)^*(x).\end{aligned}$$
3) $$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*(xy) &= (\alpha\oplus\beta)(xy) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R) \geq (\alpha\oplus\beta)(y) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &= (\alpha\oplus\beta)^*(y).\end{aligned}$$
4) $$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*((x+z)y - xy) &= (\alpha\oplus\beta)((x+z)y - xy) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)\\ &\geq (\alpha\oplus\beta)(z) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R) = (\alpha\oplus\beta)^*(z).\end{aligned}$$
5) Mengingat $(\alpha\oplus\beta)^*(0_R) = (\alpha\oplus\beta)(0_R) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)$, dan $(\alpha\oplus\beta)^*(0_R)$, $(\alpha\oplus\beta)(0_R) \in [0,1]$, maka nilai keanggotaan dari $(\alpha\oplus\beta)^*(0_R) = 1$. Akibatnya
   $(\alpha\oplus\beta)(x) \leq (\alpha\oplus\beta)(0_R) \leq 1 = (\alpha\oplus\beta)^*(0_R)$ untuk setiap $x\in R$.
   Karena $(\alpha\oplus\beta)(0_R) \leq 1$ dan $(\alpha\oplus\beta)^*(x) = (\alpha\oplus\beta)(x) + 1 - (\alpha\oplus\beta)(0_R)$, maka $(\alpha\oplus\beta)(x) \leq (\alpha\oplus\beta)^*(x)$ untuk setiap $x\in R$, yang mengakibatkan $(\alpha\oplus\beta)\subseteq(\alpha\oplus\beta)^*$.

Berdasarkan analisis di atas, maka $(\alpha\oplus\beta)^*$ adalah ideal fuzzy dari R, dan $(\alpha\oplus\beta)\subseteq(\alpha\oplus\beta)^*$. □

Lemma 16. (Swamy *et al.*, [8]) *Diberikan near-ring R. Jika α_1, α_2, ..., α_n adalah ideal fuzzy dari R, maka $\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus ... \oplus\alpha_n$ adalah ideal fuzzy dari R.*

Bukti:

Misalkan α_1, α_2, ..., α_n adalah ideal *fuzzy* dari *near-ring* R. Akan dibuktikan $\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus ... \oplus\alpha_n$ ideal *fuzzy* dari R.

Untuk membuktikan $\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus ... \oplus\alpha_n$ adalah ideal *fuzzy* dari R, digunakan induksi matematika pada $n \geq 2$.

1). Untuk $n = 2$, maka menurut Teorema 12, $\alpha_1\oplus\alpha_2$ adalah ideal *fuzzy* dari R.

2). Asumsikan untuk $n = k$, $\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus ... \oplus\alpha_k$ adalah ideal *fuzzy* dari R.
   Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$, $\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus ... \oplus\alpha_k\oplus\alpha_{k+1}$ adalah ideal *fuzzy* dari R.

Mengingat $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k$, dan α_{k+1} adalah ideal *fuzzy* dari R, maka menurut Teorema 12, $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k \oplus \alpha_{k+1}$ adalah ideal *fuzzy* dari R.

Dari semua kasus, terbukti bahwa $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k \oplus \alpha_{k+1}$ adalah ideal *fuzzy* dari R. Oleh karena itu dengan prinsip induksi matematika, disimpulkan bahwa $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n$ adalah ideal *fuzzy* dari R, untuk semua bilangan bulat positif n. □

Akibat 17. *Diberikan near-ring R. Jika* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *adalah ideal fuzzy dari R, maka* $(\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n)^*$ *adalah ideal fuzzy dari R.*

4. Simpulan

Hasil penting atau sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah penjumlahan dari dua (lebih) ideal *fuzzy* dari suatu *near-ring* R, menghasilkan ideal *fuzzy* dari R.

Daftar Pustaka

1. Abdurrahman, S., Thresye., Hijriati, N., *Ideals fuzzy near-ring*, Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon, 6(2), 2012, hal 13 – 19.
2. Abou-Zaid, S., *On fuzzy subnear-rings and ideals*, Fuzzy Sets and Systems, 44(1), 1991, pp. 139-146.
3. Clay, J, R., *Nearrings, geneses and applications*, Oxford, New York, 1992
4. Kandasamy, W, B, V., *Smarandache fuzzy algebra*, American Research Press Rehoboth, 2003.
5. Mordeson, J, N., Bhutani, K, R., and Rosenfeld, A., *Fuzzy group theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
6. Pilz, G., *Near-ring*, *the theory and applications* 2nd ed, North-Holland Mathematict Studies, vol. 23, North-Holland, Amsterdam, 1983.
7. Satyanarayana, Bh., and Prasad, KS., *Near-ring, Fuzzy Ideals, and Graph Theory*, Taylor and Francis Group, LLC, 2013.
8. Swamy, P, N., Kumar, K, V., Nagaiah, T., and Srinivas, T., *Sum of fuzzy ideals of Γ-near-rings*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, x(x), pp. 1 – 11, 2010.