Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 14, No. 1 (2018), pp. 31–38. doi:10.24198/jmi.v14.n1.15849.31-38

Sifat-sifat Operasi Perkalian Modular pada Graf Fuzzy Lengkap, Graf Fuzzy Efektif dan Graf Fuzzy Komplemen

Triyani, Niken Larasati, Ari Wardayani

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman.
trianisr@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menyelidiki sifat-sifat operasi perkalian modular pada graf fuzzy yang diperkenalkan oleh Dogra [2]. Sifat yang diselidiki adalah perkalian modular pada graf fuzzy lengkap, graf fuzzy efektif dan graf fuzzy komplemen. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode penelitian teoritik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa perkalian modular dari dua graf fuzzy lengkap bukan merupakan graf fuzzy lengkap, jika ke dua graf fuzzy efektif, maka perkalian modular dari dua graf fuzzy komplemennya sama dengan perkalian modular dari dua graf fuzzy efektif tersebut dan perkalian modular dari dua graf fuzzy $G_1 \odot G_2$ dan $G_2 \odot G_1$ saling isomorfis.

Kata kunci: graf fuzzy, perkalian modular, graf fuzzy lengkap, graf fuzzy efektif, graf fuzzy komplemen.

Abstract

The objective of this study is to investigate the characteristics of modular product on fuzzy graph which was introduced by Dogra [2]. *This theoretical study focused on characteristics of modular product to complete fuzzy graph, effective fuzzy graph, and complement fuzzy graph. The result shows that modular product of two complete fuzzy graphs was not a complete fuzzy graph, and if the two fuzzy graphs are effective, the modular product of the complements equals the modular product of two effective fuzzy graphs and* $G_1 \odot G_2 \cong G_2 \odot G_1$.

Keywords :fuzzy graph, modular product, complete fuzzy graph, effective fuzzy graph, complement fuzzy graph.

1. Pendahuluan

Graf merupakan suatu model matematika paling sederhana yang dapat merepresentasikan hubungan antar objek dengan titik mewakili objek tertentu dan sisi yang menghubungkan antara dua objek merepresentasikan hubungan antara dua objek tersebut. Banyak permasalahan riil yang dapat direpresentasikan ke dalam graf, seperti masalah jaringan sosial, penjadwalan, pewarnaan peta dan lain-lain. Dalam masalah jaringan sosial, titik dapat merepresentasikan akun/pengguna jaringan, sedangkan hubungan antar akun direpresentasikan dengan sisi. Jika baik buruknya hubungan diukur dengan sering tidaknya ke dua pengguna melakukan komunikasi, maka dalam mendiskripsikan hubungan ini sangat dibutuhkan suatu desain model graf fuzzy.

2000 Mathematics Subject Classification: 05C72
Received: 2018-04-29, accepted: 2018-05-02.

Graf fuzzy telah diprakarsai oleh Rosenfeld pada tahun 1975. Graf fuzzy merupakan perluasan dari graf klasik yang dikembangkan berdasarkan konsep pada logika fuzzy dan relasi fuzzy dalam teori himpunan fuzzy yang dikemukakan oleh Zadeh [6]. Jika pada graf klasik setiap elemen-elemennya (titik dan sisi) mempunyai nilai keanggotaan satu atau nol, maka pada graf fuzzy, setiap titik dan sisinya memiliki nilai keanggotaan yang terletak pada interval tutup [0,1]. Nilai keanggotaan setiap elemen ini menyatakan derajat keanggotaan elemen tersebut dalam graf fuzzy.

Sejak diperkenalkan graf fuzzy ini, para peneliti mulai menggeneralisasi dan mengembangkan beberapa kajian dalam graf klasik ke dalam graf fuzzy baik secara teori maupun aplikasi. Secara aplikasi graf fuzzy dapat dikatakan sebagai suatu topik yang dapat diterapkan dalam ilmu dan teknologi modern khususya dalam bidang teori informasi, jaringan syaraf, analisis cluster, diagnosa medis, dan teori kontrol [1]. Dey, *et. al* [1], telah mengaplikasikan graf fuzzy untuk menyelesaikan masalah traffic light dan Swaminathan [3], telah menerapkan graf fuzzy ke dalam masalah pengalokasian pekerjaan.

Secara teori, Yeh dan Bang dalam Zadeh [6] juga telah memperkenalkan beberapa konsep yang berhubungan dengan graf fuzzy seperti konsep keterhubungan fuzzy. Setelah konsep-konsep dalam graf fuzzy diperkenalkan, hasil-hasil teoritis yang lebih mendalam tentang graf fuzzy banyak diberikan, diantaranya oleh Moderson dan Peng [4] memperkenalkan konsep operasi-operasi pada graf fuzzy antara lain operasi gabungan, join, hasil kali kartesian, dan komposisi pada dua graf fuzzy. Selanjutnya Dogra [2] telah mendefinisikan operasi perkalian modular pada graf fuzzy dan menyelidiki sifat operasi modular pada dua graf fuzzy sembarang serta graf fuzzy efektif. Dalam artikelnya, Dogra [2] belum mengkaji sifat-sifat operasi perkalian modular pada graf fuzzy yang berkaitan dengan graf fuzzy lengkap, graf fuzzy komplemen, dan graf fuzzy isomorfis. Oleh karena itu berdasarkan uraian tersebut, tujuan dari penulisan artikel ini adalah menyelidiki sifat operasi perkalian modular pada dua graf fuzzy lengkap, operasi perkalian modular pada komplemen dari dua graf fuzzy efektif dan menunjukkan bahwa perkalian modular graf fuzzy G_1 dan G_2 isomorfik dengan perkalian modular graf fuzzy G_2 dan G_1.

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur mengenai operasi perkalian modular pada graf fuzzy yang didefinisikan oleh Dogra [2]. Selanjutnya perkalian modular ini dikenakan pada dua graf fuzzy lengkap, dan komplemen dari graf fuzzy efektif. Hasil operasi perkalian modular ini selanjutnya dituangkan sebagai sifat-sifat operasi perkalian modular yang ditulis dalam bentuk bukti secara sistematis.

3. Hasil dan Pembahasan

Sebelum menguraikan beberapa sifat-sifat operasi perkalian modular yang telah diperoleh, berikut diberikan teori dasar dan definisi-definisi yang berkaitan dengan hasil tersebut. Definisi yang terdapat dalam artikel ini diambil dari Dogra [2], Mordeson [4] dan Sunita [5].

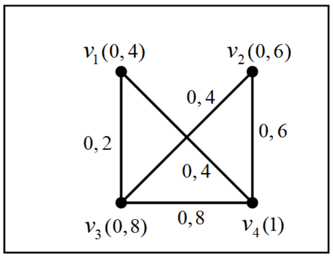
Definisi 3.1. *Misal V adalah himpunan tak kosong dan berhingga. Suatu graf fuzzy G dinotasikan dengan $G = (\sigma, \mu)$ adalah pasangan fungsi σ yang menyatakan himpunan fuzzy dari V dan μ merupakan relasi fuzzy simetris pada σ sedemikian sehingga:*

(1) $\sigma : V \to [0, 1]$
(2) $\mu : V \times V \to [0, 1]$ *yang memenuhi* $\mu(v_i, v_j) \leq min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$, *untuk setiap* $v_i, v_j \in V$

Selanjutnya, σ disebut sebagai himpunan titik fuzzy dan μ disebut sebagai himpunan sisi fuzzy. Notasi $\sigma(v_i)$ pada graf fuzzy menyatakan derajat keanggotaan dari titik v_i dan $\mu(v_i, v_j)$ menyatakan derajat keanggotaan dari sisi (v_i, v_j) Graf fuzzy yang dibahas dalam artikel ini adalah graf fuzzy sederhana, sehingga berlaku $\mu(v_i, v_j) = 0$ untuk setiap $v_i, v_j \in V$.

Graf fuzzy dapat direpresentasikan ke dalam sebuah gambar sebagaimana graf klasik dengan titik-titik dan sisi-sisi yang dilengkapi dengan derajat keanggotaannya. Untuk setiap

$v_i \in V$ jika $\sigma(v_i) = 0$ atau $\mu(v_i, v_j) = 0$, maka titik fuzzy v_i atau sisi fuzzy (v_i, v_j) tidak digambarkan. Gambar 1 merupakan contoh graf fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ dengan himpunan titik fuzzy $\sigma = \{(v_1|0,4), (v_2|0,6), (v_3|0,8), (v_4|1)\}$ dan himpunan sisi fuzzy
$\mu = \{(v_1v_3|0,2), (v_1v_4|0,4), (v_2v_3|0,4), (v_2v_4|0,6), (v_3v_4|0,8)\}$.



Gambar 1. Graf fuzzy G=(σ, μ)

Definisi 3.2. ***Graf dasar dari graf fuzzy***. *Graf dasar dari graf fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ dinotasikan dengan $G^* = (\sigma^*, \mu^*)$ dengan σ^* merujuk pada himpunan tak kosong V dan $\mu^* \neq E \subseteq V \times V$ adalah graf dengan $\sigma^* = \{v \in V|\sigma(v) > 0\}$ dan $\mu^* = \{v_iv_j \in E|\mu(v_iv_j) > 0\}$.*

Berdasarkan definisi 3.2. ini, graf dasar dari graf fuzzy adalah graf klasik $G = (V, E)$.

Definisi 3.3. ***Perkalian modular pada dua graf fuzzy.*** *Misalkan $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy dengan masing-masing graf dasar $G_1^* = (V_1, E_1)$, $G_2^* = (V_2, E_2)$ dan $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Jika perkalian modular dari G_1^* dan G_2^* adalah $G^* = G_1^* \odot G_2^* = (V, E)$ dengan himpunan titik dan sisinya didefinisikan sebagai :*

(1) $V = V_1 \odot V_2 = V_1 \times V_2 = \{(u, v)|u \in V_1, v \in V_2\}$
(2) $E = E_1 \odot E_2 = \{((u_i, v_j)(u_k, v_l))|u_iu_k \in E_1, v_jv_l \in E_2 \text{ atau } u_iu_k \notin E_1, v_jv_l \notin E_2\}$

dimana $i, k = 1, 2, \ldots |V_1|$ dan $j, l = 1, 2, \ldots, |V_2|$, maka perkalian modular dari dua graf fuzzy $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \odot G_2 = (\sigma_1 \odot \sigma_2, \mu_1 \odot \mu_2)$ adalah pasangan fungsi yang didefinisikan oleh:

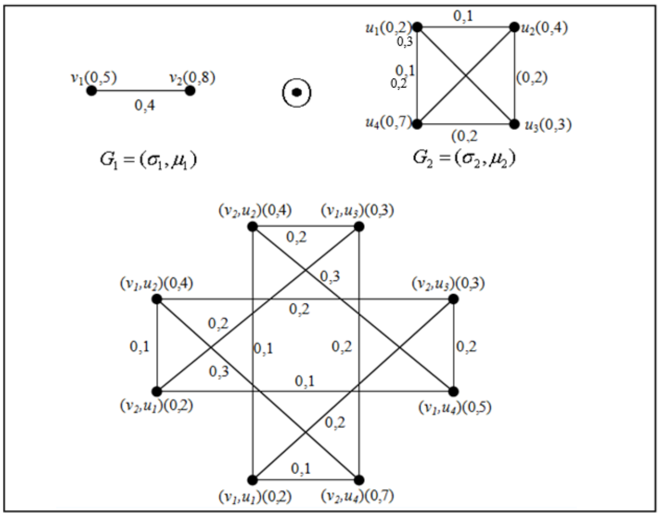
(1) $(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u, v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$, *dimana* $u \in V_1$ *dan* $v \in V_2$
(2) $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) = \begin{cases} \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu_2(v_jv_l) & u_iu_k \in E_1 \text{ dan } v_jv_l \in E_2 \\ \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_j) \wedge \sigma_2(v_k) \wedge \sigma_2(v_l), & u_iu_k \notin E_1 \text{ dan } v_jv_l \notin E_2 \end{cases}$.

Gambar 2. merupakan contoh operasi perkalian modular pada dua graf fuzzy $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$.

Definisi 3.4. ***Graf fuzzy efektif***. *Suatu graf fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy efektif jika memenuhi $\mu(v_i, v_j) = min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$ untuk setiap $(v_i, v_j) \in E$ dimana $E \subseteq V \times V$.*

Definisi 3.5. ***Graf fuzzy lengkap***. *Suatu graf fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy lengkap jika memenuhi $\mu(v_i, v_j) = min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\}$ untuk setiap $(v_i, v_j) \in V$.*

Berdasarkan definisi 3.5, setiap dua titik fuzzy pada graf fuzzy lengkap terhubung oleh sebuah sisi fuzzy, sedangkan pada graf fuzzy efektif tidak setiap dua titik fuzzynya terhubung oleh sebuah sisi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf fuzzy lengkap merupakan graf fuzzy efektif tetapi tidak sebaliknya.



GAMBAR 2. $G_1 \odot G_2 = (\sigma_1 \odot \sigma_2, \mu_1 \odot \mu_2)$

Komplemen pada graf fuzzy pertama kali didefinisikan oleh Mordeson [5], yang kemudian disempurnakan oleh Sunita [5]. Berikut definisi komplemen dari graf fuzzy yang diambil dari Sunita [5].

Definisi 3.6. ***Komplemen dari graf fuzzy***. *Misal V adalah himpunan tak kosong. Komplemen dari graf fuzzy $G = (\sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy $G^c = (\sigma^c, \mu^c)$ dimana $\sigma^c = \sigma$ dan $\mu^c(v_i, v_j) = min\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\} - \mu(v_i, v_j)$ untuk setiap $v_i, v_j \in V$.*

Selanjutnya komplemen dari graf fuzzy disebut graf fuzzy komplemen. Berdasarkan definisi 3.6, berlaku $(G^c)^c = G$.

Definisi 3.7. ***Graf fuzzy Isomorfik.*** *Misal $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy dengan himpunan titik V_1, V_2. Jika terdapat pemetaan bijektif $f : V_1 \to V_2$ yang memenuhi :*

(1) $\sigma_1(u) = \sigma_2(f(u)) \ \forall \ u \in V_1$
(2) $\mu_1(u, v) = \mu_2(f(u), f(v)) \ \forall u, v \in V_1$

maka dikatakan $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ saling isomorfis, dan dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$.

Berikut diberikan dua sifat operasi perkalian modular pada graf fuzzy yang telah diperoleh oleh Dogra [2].

Teorema 3.1. Perkalian modular dari dua graf fuzzy adalah graf fuzzy.

Bukti. Misalkan diberikan dua himpunan tak kosong V_1, V_2 dengan $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, dan dua graf fuzzy $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$, $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$. Untuk membuktikann hasil operasi perkalian modular dua graf fuzzy G_1 dan G_2 juga merupakan graf fuzzy, maka harus dibuktikan

(1) $\sigma_1 \odot \sigma_2 : V_1 \times V_2 \to [0, 1]$
(2) $\mu_1 \odot \mu_2 : E \to [0, 1]$ dengan $E = \{((u_i, v_j)(u_k, v_l)) | u_i u_k \in E_1, v_j v_l \in E_2$ atau $u_i u_k \notin E_1, v_j v_l \notin E_2\}$

yang memenuhi $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) \leq min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i, v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k, v_l)\}$, untuk setiap $(u_i, v_j), (u_k, v_l) \in V$.
Untuk menunjukkan (1), diambil sembarang $(u, v) \in V_1 \times V_2$. Berdasarkan definisi 3.3, maka $(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u, v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = min\{\sigma_1(u), \sigma_2(v)\}$
Karena G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy, maka $\sigma_1(u) \in [0, 1]$ dan $\sigma_2(v) \in [0, 1]$, Akibatnya $(\sigma_1 \odot$

$\sigma_2)(u,v) \in [0,1]$. Dengan kata lain $\sigma_1 \odot \sigma_2 : V_1 \times V_2 \to [0,1]$.
Untuk menunjukan (2), diambil sembarang $(u_i,v_j)(u_k,v_l) \in E$ dengan $u_i,u_k \in V_1, v_j,v_l \in V_2$.
Kasus 1.
$u_iu_k \in E_1$ dan $v_jv_l \in E_2$. Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh :

$$\begin{aligned}(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu_2(v_jv_l)\\ &\leq \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l) \quad (definisi 3.1)\\ &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j) \wedge (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\\ &= min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}\end{aligned}$$

Kasus 2.
$u_iu_k \notin E_1$ dan $v_jv_l \notin E_2$. Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh :

$$\begin{aligned}(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j) \wedge (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\\ &= min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}\end{aligned}$$

Berdasarkan kasus 1 dan 2, terbukti bahwa

$$(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) \leq min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}$$

Hal ini berarti $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) \in [0,1]$. Dengan kata lain $\mu_1 \odot \mu_2 : E \to [0,1]$. Berdasarkan bukti (1) dan (2), maka hasil operasi perkalian modular dua graf fuzzy G_1 dan G_2 juga merupakan graf fuzzy. □

Teorema 3.2. Perkalian modular dari dua graf fuzzy efektif adalah graf fuzzy efektif.

Bukti. Berdasarkan definisi 3.4, akan dibuktikan

(1) $\sigma_1 \odot \sigma_2 : V_1 \times V_2 \to [0,1]$
(2) $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) = min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}$, untuk setiap $(u_i,v_j),(u_k,v_l) \in V$.

Untuk menunjukkan (1), diambil sembarang $(u,v) \in V_1 \times V_2$. Berdasarkan definisi 3.3, maka $(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = min\{\sigma_1(u), \sigma_2(v)\}$.
Karena G_1 dan G_2 adalah graf fuzzy, maka $\sigma_1(u) \in [0,1]$ dan $\sigma_2(v) \in [0,1]$. Akibatnya $(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v) \in [0,1]$. Dengan kata lain $\sigma_1 \odot \sigma_2 : V_1 \times V_2 \to [0,1]$.
Untuk membuktikan (2), diambil sembarang $(u_i,v_j)(u_k,v_l) \in E$, dengan $u_i,u_k \in V_1, v_j,v_l \in V_2$.
Kasus 1.
$u_iu_k \in E_1$ dan $v_jv_l \in E_2$. Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh :

$$\begin{aligned}(\mu_1\mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu_2(v_jv_l)\\ &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j) \wedge (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\\ &= min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}\end{aligned}$$

Kasus 2.
$u_iu_k \notin E_1$ dan $v_jv_l \notin E_2$.

$$\begin{aligned}(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j) \wedge (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\\ &= min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}\end{aligned}$$

Berdasarkan kasus 1 dan 2, terbukti bahwa

$$(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) = min\{(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_i,v_j), (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u_k,v_l)\}$$

Berdasarkan bukti (1) dan (2), maka terbukti hasil operasi perkalian modular dua graf fuzzy efektif merupakan graf fuzzy efektif. □

Berikut beberapa sifat operasi perkalian modular pada dua graf fuzzy yang di kembangkan oleh penulis dan dituangkan sebagai Teorema 3.3., Teorema 3.4., dan Teorema 3.5.

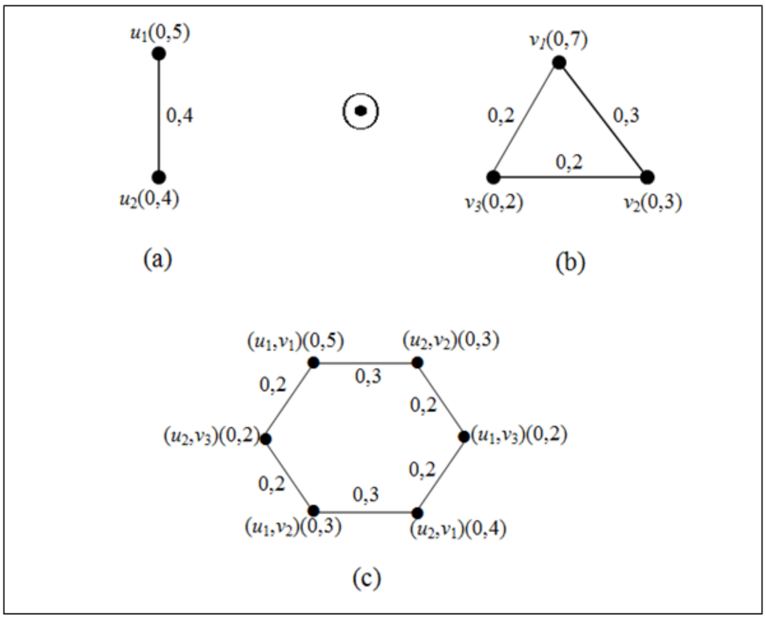
Teorema 3.3. Perkalian modular dari dua graf fuzzy lengkap bukan merupakan graf fuzzy lengkap.

Bukti. Misal diberikan dua graf fuzzy lengkap $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$. Berdasarkan definisi 3.3, derajat keanggotaan sisi dari graf fuzzy hasil perkalian modular graf fuzzy G_1 dan G_2 adalah

$$(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) = \begin{cases} \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu_2(v_jv_l), & u_iu_k \in E_1 \ dan \ v_jv_l \in E_2 \\ \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_j) \wedge \sigma_2(v_k) \wedge \sigma_2(v_l), & u_iu_k \notin E_1 \ dan \ v_jv_l \notin E_2 \end{cases}$$

Akibatnya, $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) = 0$, untuk $i = k$ atau $j = l$. Sehingga tidak setiap dua titik di $G_1 \odot G_2$ terhubung oleh sisi. Berdasarkan Definisi 3.5., hasil operasi modular G_1 dan G_2 bukan graf fuzzy lengkap. □

Gambar 3 berikut, merupakan contoh yang menjelaskan sifat 3.3. Graf fuzzy pada Gambar 3(c) merupakan graf fuzzy hasil perkalian modular dari dua graf fuzzy lengkap (Gambar 3(a) dan Gambar 3(b)). Graf fuzzy pada Gambar 3(c), bukan graf fuzzy lengkap.



Gambar 3. (a) Contoh Graf fuzzy lengkap G_1, (b) Contoh Graf fuzzy lengkap G_2, (c) Contoh Graf fuzzy $G_1 \odot G_2$.

Teorema 3.4. Misal diberikan graf fuzzy efektif G_1 dan graf fuzzy efektif G. Jika G_1^c dan G_2^c adalah graf fuzzy komplemen dari G_1 dan G_2 maka $G_1^c \odot G_2^c = G_1 \odot G_2$.

Bukti. Misalkan diberikan dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2. Selanjutnya diberikan dua graf fuzzy efektif $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$. Graf $G_1^c = (\sigma_1^c, \mu_1^c)$ adalah komplemen dari graf $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$. Graf $G_2^c = (\sigma_2^c, \mu_2^c)$ adalah komplemen dari graf $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$. Berdasarkan Definisi 3.6., G_1^c memiliki derajat keanggotaan titik $\sigma_1^c(u) = \sigma_1(u)$ dan sisi $\mu_1^c(u_iu_k) = min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\} - \mu_1(u_iu_k)$. Hal ini berlaku pula pada G_2^c memiliki derajat keanggotaan titik $\sigma_2^c(u) = \sigma_2(u)$, dan sisi $\mu_2^c(u_iu_k) = min\{\sigma_2(u_i), \sigma_2(u_k)\} - \mu_2(u_iu_k)$
Karena $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ adalah graf fuzzy efektif, maka :
Kasus 1.
Jika $u_iu_k \in E_1$, maka $\mu_1(u_iu_k) = min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\}$.
Hal ini berarti $\mu_1^c(u_iu_k) = min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\} - min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\} = 0$
Dengan kata lain $u_iu_k \notin E_1^c$.
Kasus 2.

Jika $u_iu_k \notin E_1$, maka $\mu_1(u_iu_k) = 0$.
Hal ini berarti $\mu_1^c(u_iu_k) = min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\} - 0 = min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\}$
Dengan kata lain $u_iu_k \in E_1^c$.
Analog untuk graf fuzzy G_2. Graf fuzzy efektif G_2, memiliki derajat keanggotaan titik $\sigma_2(v)$ dan derajat keanggotaan sisi $\mu_2(v_jv_l) = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\}$. Graf G_2^c memiliki derajat keanggotaan titik $\sigma_2^c(v) = \sigma_2(v)$, dan derajat keanggotaan sisi $\mu_2^2(v_jv_l) = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\} - \mu_2(v_jv_l)$.
Karena $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ juga graf fuzzy efektif, maka :
Kasus 1.
Jika $v_jv_l \in E_2$, maka $\mu_2(v_jv_l) = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\}$.
Hal ini berarti $\mu_2^c(v_jv_l) = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\} - min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\} = 0$
Dengan kata lain $v_jv_l \notin E_2^c$.
Kasus 2.
Jika $v_jv_l \notin E_2$, maka $\mu_2(v_jv_l) = 0$.
Hal ini berarti $\mu_2^c(v_jv_l) = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\} - 0 = min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\}$
Dengan kata lain $u_iu_k \in E_2^c$.

Selanjutnya sesuai Definisi 3.3., hasil perkalian modular dari G_1^c dan G_2^c dinotasikan dengan $G_1^c \odot G_2^c = (\sigma_1^c \odot \sigma_2^c, \mu_1^c \odot \mu_2^c)$ adalah pasangan fungsi dengan :

(1)
$$\begin{aligned}(\sigma_1^c \odot \sigma_2^c)(u,v) &= \sigma_1^c(u) \wedge \sigma_2^c(v)\\ &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)\\ &= (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v).\end{aligned}$$

(2) $(\mu_1^c \odot \mu_2^c)(u_i,v_j)(u_k,v_l)$ yang terbagi menjadi dua kasus, yaitu :

Kasus 1. Jika $u_iu_k \notin E_1^c$ dan $v_jv_l \notin E_2^c$, maka :
$$\begin{aligned}(\mu_1^c \odot \mu_2^c)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \sigma_1^c(u_i) \wedge \sigma_1^c(u_j) \wedge \sigma_2^c(v_k) \wedge \sigma_2^c(v_l)\\ &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_j) \wedge \sigma_2(v_k) \wedge \sigma_2(v_l)\\ &= (\mu_1 \odot \mu_2)(u_i,v_j)(u_k,v_l).\end{aligned}$$
Kasus 2. Jika $u_iu_k \in E_1^c$ dan $v_jv_l \in E_2^c$, maka :
$$\begin{aligned}(\mu_1^c \odot \mu_2^c)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) &= \mu_1^c(u_iu_k) \wedge \mu_2^c(v_jv_l)\\ &= min\{\sigma_1(u_i), \sigma_1(u_k)\} \wedge min\{\sigma_2(v_j), \sigma_2(v_l)\}\\ &= \mu_1(u_i,u_k) \wedge \mu_2(v_j,v_l).\end{aligned}$$
Akibatnya dari (1) dan (2), diperoleh bahwa $(\sigma_1^c \odot \sigma_2^c)(u,v) = (\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v)$ dan $(\mu_1^c \odot \mu_2^c)(u_i,v_j)(u_k,v_l) = \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu(v_jv_l)$. Dengan demikian terbukti bahwa $G_1^c \odot G_2^c = G_1 \odot G_2$. □

Teorema 3.5. Jika $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy, maka $G_1 \odot G_2 \cong G_2 \odot G_1$.

Bukti. Untuk membuktikan sifat ini, diambil sembarang $(u,v) \in V_1 \times V_2$, akan dibuktikan ada pemetaan bijektif $f : V_1 \times V_2 \to V_2 \times V_1$ yang memenuhi :

(1) $(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v) = (\sigma_2 \odot \sigma_1)(f(u,v))$,
(2) $(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i,v_j)(u_k,v_l)) = (\mu_2 \odot \mu_1)(f(u_i,v_j)f(u_k,v_l)), \forall (u_i,v_j),(u_k,v_l) \in V_1 \times V_2$

Definisikan pemetaan $f : V_1 \times V_2 \to V_2 \times V_1$ dengan $f(u,v) = (v,u)$. Berdasarkan definisi 3.3, diperoleh $G_1 \odot G_2 = (\sigma_1 \odot \sigma_2, \mu_1 \odot \mu_2)$ dengan :

(1)
$$\begin{aligned}(\sigma_1 \odot \sigma_2)(u,v) &= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)\\ &= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u)\\ &= (\sigma_2 \odot \sigma_1)(v,u)\\ &= (\sigma_2 \odot \sigma_1)(f(u,v))\end{aligned}$$

dan

$$
(2)\quad \begin{aligned}
(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) &= \mu_1(u_iu_k) \wedge \mu_2(v_jv_l)\\
&= \mu_2(v_jv_l) \wedge \mu_1(u_iu_k)\\
&= (\mu_2 \odot \mu_1)((v_j, u_i)(v_i, u_k))\\
&= (\mu_2 \odot \mu_1)(f(u_i, v_j)f(u_k, v_l)), \quad untuk\ u_iu_k \in E_1\ dan\ v_jv_l \in E_2\\
atau&\\
(\mu_1 \odot \mu_2)((u_i, v_j)(u_k, v_l)) &= \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k) \wedge \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l)\\
&= \sigma_2(v_j) \wedge \sigma_2(v_l) \wedge \sigma_1(u_i) \wedge \sigma_1(u_k)\\
&= (\mu_2 \odot \mu_1)((v_j, u_i)(v_i, u_k))\\
&= (\mu_2 \odot \mu_1)(f(u_i, v_j)f(u_k, v_l)), \quad untuk\ u_iu_k \notin E_1\ dan\ v_jv_l \notin E_2
\end{aligned}
$$

Berdasarkan bukti (1) dan (2), diperoleh $G_1 \odot G_2 \cong G_2 \odot G_1$. □

4. Simpulan

Dari pembahasan yang telah diberikan dapat disimpulkan sebagai berikut :

(1) Perkalian modular dari dua graf fuzzy lengkap bukan merupakan graf fuzzy lengkap.
(2) Jika G_1 dan G_2 graf fuzzy efektif, maka $G_1^c \odot G_2^c \cong G_2 \odot G_2$..
(3) Graf $G_1 \odot G_2$ dan $G_2 \odot G_1$ saling isomorfik.

Sifat-sifat Operasi perkalian modular pada dua graf fuzzy juga dapat di kaitkan dengan operasi-operasi yang lain, sehingga perlu diselidiki hubungan operasi perkalian modular dengan operasi-operasi yang lain seperti perkalian kartesius, tensor, normal, komposisi, homomorfik, dan boxdot pada dua graf fuzzy.

Daftar Pustaka

[1] Dey A, dan Anita P. , 2013, Fuzzy Graph Coloring Technique to Classify The Accidental Zone of a Traffic Control. Annals of Pure and Applied Mathematics. Vol. 3 No.2, pp. 169-178.
[2] Dogra, S., 2015. Different Types of Product of Fuzzy Graphs. Progress in Nonlinear Dynamics and Chaos. Vol. 3 No. 1, pp. 41-56.
[3] Swaminathan S., 2012, Fuzzy Graph Applications of Job Allocation, International Journal of Engineering anf Innovative Technology, Vol. 1., Issue 2 .
[4] Mordeson, J.N dan Peng C,S. 1994. Operation on Fuzzy Graphs , Information Science 79, pp 159-170.
[5] Sunita, MS dan A. Vijaya Kumar, 2002, Complemet of Fuzzy Graph, Indian J. Pure Applied Mathematical, 33:9 hal. 1451 1464.
[6] Zadeh L.A, Fu K.S. & Shimura M., 1975. Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decesion Processes. Academic Press, New York.