Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 18, No. 2 (2022), pp. 141–155. doi:10.24198/jmi.v18.n2.40461.141-155

Sifat-Sifat Subgrup Fuzzy Intuitionistik atas Norm (t-Norm dan s-Norm)

Rizka Abid Fadhiilah[1], Budi Surodjo[2]

[1]Mahasiswa PS Magister Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, rizkaabid@mail.ugm.ac.id

[2]Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Subgrup fuzzy dapat diperumum menjadi subgrup fuzzy intuitionistik dan subgrup fuzzy atas t-norm. Lebih lanjut, subgrup fuzzy intuitionistik dan subgrup fuzzy atas t-norm dapat diperumum menjadi subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) dan sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup dibahas oleh Rasuli [8]. Namun, dengan memberikan contoh penyangkal, dapat ditunjukkan bahwa dua sifat tersebut tidak benar. Pada artikel ini, diteliti kembali sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) dan sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Diperoleh hasil bahwa sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) dan sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup dalam [8] dapat berlaku apabila t-norm dan s-norm masing-masing bersifat kontinu.

Kata kunci: subgrup fuzzy, intuitionistik, t-norm, s-norm.

2000 Mathematics Subject Classification: 20N25
Received: 2022-07-04, accepted: 2022-11-10.

Abstract

Fuzzy subgroups can be generalized into intuitionistic fuzzy subgroups and fuzzy subgroups over t-norm. Furthermore, intuitionistic fuzzy subgroups and fuzzy subgroups over t-norm can be generalized into intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm). The property of product under norms (t-norm and s-norm) of two intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) and the property of image of intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) under group homomorphism were discussed by Rasuli [8]*. However, by giving counterexamples, it can be shown that both properties are not true. In this article, we reinvestigate the property of product under norms (t-norm and s-norm) of two intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) and the property of image of intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) under group homomorphism. We use the literature study method in this research. The results show that the property of product under norms (t-norm and s-norm) of two intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) and the property of image of intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (t-norm and s-norm) under group homomorphism in* [8] *can be valid if t-norm and s-norm are continuous.*

Keywords: fuzzy subgroups, intuitionistic, t-norm, s-norm.

1. Pendahuluan

Himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Zadeh [12] pada tahun 1965 sebagai perumuman dari himpunan klasik. Pada tahun 1971, dengan menerapkan himpunan fuzzy pada grupoid dan grup, Rosenfeld [9] memperkenalkan subgrupoid fuzzy dan subgrup fuzzy. Sifat-sifat subgrup fuzzy dapat dilihat pada [6] yang diantaranya adalah sifat *product* dari dua subgrup fuzzy dan sifat *image* dari subgrup fuzzy di bawah homomorfisma grup.

Pada tahun 1979, Anthony dan Sherwood [1] memperumum konsep subgrupoid fuzzy dan subgrup fuzzy dengan mengganti operator min dalam aksiomanya menjadi sebarang t-norm, sehingga melahirkan konsep subgrupoid fuzzy atas t-norm dan subgrup fuzzy atas t-norm. Selanjutnya, Sessa [10] memperkenalkan konsep *product* dari himpunan fuzzy atas t-norm. Pada tahun 2018, sifat *product* atas t-norm dari dua subgrup fuzzy atas t-norm dikaji oleh Rasuli [7]. Sementara itu, sifat *image* dari subgrup fuzzy atas t-norm di bawah homomorfisma grup dikaji oleh Zahedi dan Mashinchi [13].

Pada perkembangan selanjutnya, Atanassov [2] memperkenalkan himpunan fuzzy intuitionistik sebagai perumuman dari himpunan fuzzy. Dengan menerapkan himpunan fuzzy intuitionistik pada grup, Biswas [3] memperkenalkan subgrup fuzzy intuitionistik yang kemudian dapat dipandang sebagai perumuman dari subgrup fuzzy. Selanjutnya, sifat *product* dari dua subgrup fuzzy intuitionistik dan sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup dibahas oleh Hur dkk. [4]. Selain itu, sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup juga diteliti oleh Sharma [11].

Subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) diperkenalkan oleh Rasuli [8] di mana aksiomanya dinyatakan menggunakan t-norm dan s-norm. Konsep tersebut masih berkaitan dengan subgrup fuzzy atas t-norm dan subgrup fuzzy intuitionistik, yaitu subgrup fuzzy atas t-norm dan subgrup fuzzy intuitionistik masing-masing merupakan kejadian khusus dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm).

Sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) dibahas oleh Rasuli [8]. Sifat tersebut berupa syarat perlu dan cukup agar *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) merupakan subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Selain itu, Rasuli [8] juga membahas sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup. Menurut Rasuli [8], *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup merupakan subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Namun, dua sifat tersebut dapat disangkal kebenarannya dengan menggunakan contoh penyangkal.

Pada artikel ini, diteliti kembali sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) yang berupa syarat perlu dan cukup agar *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) merupakan subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Selain itu, diteliti kembali sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup yang berupa syarat cukup agar *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup merupakan subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Untuk memperjelas pembahasan dalam artikel ini, diberikan konsep t-norm dan s-norm yang dirujuk dari [5]. Penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan mengenai sifat-sifat subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm).

2. Landasan Teori

2.1. Himpunan Fuzzy dan Himpunan Fuzzy Intuitionistik.

Definisi 2.1 ([12])**.** *Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Himpunan fuzzy A dari X dinyatakan oleh fungsi keanggotaan μ_A yang menghubungkan setiap anggota X dengan bilangan real pada interval* $[0,1]$. *Nilai $\mu_A(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x dalam A.*

Berdasarkan Definisi 2.1, himpunan fuzzy A dari himpunan X dengan fungsi kenggotaan $\mu_A : X \to [0,1]$ dapat didefinisikan sebagai

$$A = \{(x; \mu_A(x)) \mid x \in X\}.$$

Untuk himpunan fuzzy A dari himpunan X dengan fungsi keanggotaan μ_A, komplemen himpunan fuzzy A dinotasikan A^c dan dinyatakan oleh fungsi keanggotaan $\mu_{A^c} = 1 - \mu_A$ [12].

Definisi 2.2 ([2])**.** *Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan A adalah himpunan bagian dari X. Himpunan fuzzy intuitionistik A^* dari X adalah*

$$A^* = \{(x; \mu_A(x); \nu_A(x)) \mid x \in X\},$$

dengan fungsi $\mu_A : X \to [0,1]$ dan $\nu_A : X \to [0,1]$ berturut-turut mendefinisikan derajat keanggotaan dan derajat non-keanggotaan dari $x \in X$ dalam himpunan A, dan untuk setiap $x \in X$ berlaku $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$.

Selanjutnya, himpunan fuzzy intuitionistik A^* dinotasikan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dengan fungsi μ_A dan ν_A berturut-turut disebut fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan dari himpunan fuzzy intuitionistik A^*.

Setiap himpunan fuzzy A dari himpunan tak kosong X dengan fungsi keanggotaan μ_A memiliki fungsi non-keanggotaan μ_{A^c}, sehingga himpunan fuzzy A merupakan himpunan fuzzy intuituionistik, ditulis $A = \{(x; \mu_A(x); \mu_{A^c}(x)) \mid x \in X\}$.

Definisi 2.3 ([2])**.** *Misalkan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dan $B^* = (\mu_B, \nu_B)$ masing-masing himpunan fuzzy intuitionistik dari himpunan tak kosong X.*

(1) $A^* \subseteq B^*$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dan $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ untuk setiap $x \in X$.
(2) $A^* = B^*$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ dan $\nu_A(x) = \nu_B(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Definisi *image* dari himpunan fuzzy intuitionistik di bawah pemetaan diberikan dalam Definisi 2.4. Notasi dalam [4] dinyatakan kembali seperti yang tertera dalam Definisi 2.4 agar sesuai dengan notasi himpunan fuzzy intuitionistik yang digunakan pada artikel ini.

Definisi 2.4 ([4]). *Diberikan himpunan tak kosong X dan Y serta pemetaan $\varphi : X \to Y$. Misalkan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ merupakan himpunan fuzzy intuitionistik dari X. Image dari A^* di bawah φ, dinotasikan $\varphi(A^*) = (\mu_{\varphi(A)}, \nu_{\varphi(A)})$, merupakan himpunan fuzzy intuitionistik dari Y dengan $\mu_{\varphi(A)}$ dan $\nu_{\varphi(A)}$ didefinisikan berturut-turut oleh*

$$\mu_{\varphi(A)}(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(x) \mid x \in X, \varphi(x) = y\}, & \textit{jika } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{jika } \varphi^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

dan

$$\nu_{\varphi(A)}(y) = \begin{cases} \inf\{\nu_A(x) \mid x \in X, \varphi(x) = y\}, & \textit{jika } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 1, & \textit{jika } \varphi^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

untuk setiap $y \in Y$.

Himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari himpunan tak kosong X dapat dipandang sebagai pemetaan $A^* = (\mu_A, \nu_A) : X \to [0,1] \times [0,1]$ yang didefinisikan oleh $A^*(x) = (\mu_A(x), \nu_A(x))$ untuk setiap $x \in X$. Oleh karena itu, dapat digunakan notasi $A^*(x) = A^*(y)$ untuk menyatakan $\mu_A(x) = \mu_A(y)$ dan $\nu_A(x) = \nu_A(y)$ dengan $x, y \in X$.

2.2. **Subgrup Fuzzy, Subgrup Fuzzy atas t-Norm, dan Subgrup Fuzzy Intuitionistik.** Pertama diberikan definisi subgrup fuzzy. Untuk mempersingkat penulisan, dalam bagian ini, himpunan fuzzy dan fungsi keanggotaannya diberi notasi yang sama.

Definisi 2.5 ([6]). *Misalkan μ merupakan himpunan fuzzy dari grup G. Himpunan fuzzy μ disebut subgrup fuzzy dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku*

(1) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Contoh 2.6. *Diberikan grup Klein-4 $K = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ dan himpunan fuzzy μ dari K yang dinyatakan sebagai berikut.*

$$\mu = \{(e; 0,9), (a; 0,7), (b; 0,4), (ab; 0,4)\}$$

Himpunan fuzzy μ merupakan subgrup fuzzy dari grup Klein-4 K sebab untuk setiap $x, y \in K$ berlaku $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Selanjutnya, sebelum membahas subgrup fuzzy atas t-norm, terlebih dahulu dibahas konsep t-norm.

Definisi 2.7 ([5]). *Pemetaan $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ disebut t-norm jika memenuhi empat kondisi berikut. Untuk setiap $a, b, d \in [0,1]$,*

(1) $T(a, 1) = a$ *(kondisi batas),*
(2) $b \leq d$ *berakibat* $T(a, b) \leq T(a, d)$ *(sifat monoton),*
(3) $T(a, b) = T(b, a)$ *(sifat komutatif),*
(4) $T(a, T(b, d)) = T(T(a, b), d)$ *(sifat asosiatif).*

Contoh 2.8. *Berikut diberikan contoh t-norm.*

(1) Standard intersection: $T_m(a, b) = \min\{a, b\}$
(2) Algebraic product: $T_p(a, b) = ab$
(3) Bounded difference: $T_b(a, b) = \text{maks}\{0, a + b - 1\}$
(4) Drastic intersection:

$$T_D(a, b) = \begin{cases} b, & \textit{jika } a = 1, \\ a, & \textit{jika } b = 1, \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

(5) Nilpotent minimum:

$$T_{nM}(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\}, & \textit{jika } a+b>1, \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Berdasarkan [5], untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku $T_D(a,b) \leq T(a,b) \leq T_m(a,b)$ dengan T sebarang t-norm. Suatu t-norm T dikatakan kontinu jika T merupakan fungsi kontinu. Contoh t-norm kontinu antara lain, t-norm T_m, T_p, dan T_b. Sementara itu, t-norm T_D bukan merupakan t-norm kontinu.

Berikut diberikan definisi subgrup fuzzy atas t-norm.

Definisi 2.9 ([7])**.** *Diberikan himpunan fuzzy μ dari grup G. Himpunan fuzzy μ disebut subgrup fuzzy dari G atas t-norm T jika memenuhi*

(1) $\mu(xy) \geq T(\mu(x), \mu(y))$,
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$,

untuk setiap $x, y \in G$.

Selanjutnya, subgrup fuzzy dari grup G atas t-norm T disebut T-subgrup fuzzy dari grup G. Mudah dipahami bahwa setiap subgrup fuzzy dari grup G merupakan T_m-subgrup fuzzy dari G. Lebih lanjut, setiap subgrup fuzzy dari grup G merupakan T-subgrup fuzzy dari G dengan T sebarang t-norm sebab sebarang t-norm T memenuhi $\min\{a,b\} = T_m(a,b) \geq T(a,b)$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$. Namun, T-subgrup fuzzy dari grup G belum tentu merupakan subgrup fuzzy dari G.

Contoh 2.10. *Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan didefinisikan himpunan fuzzy μ dari $\mathbb{Z}$ oleh*

$$\mu(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Himpunan fuzzy μ merupakan T_D-subgrup fuzzy dari grup $\mathbb{Z}$. Namun, μ bukan subgrup fuzzy dari grup $\mathbb{Z}$ karena untuk $5, -4 \in \mathbb{Z}$ berlaku $\mu(1) \ngeq \min\{\mu(5), \mu(-4)\}$.

Selanjutnya, diberikan definisi subgrup fuzzy intuitionistik.

Definisi 2.11 ([3])**.** *Misalkan G merupakan grup dan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ himpunan fuzzy intuitionistik dari G. Himpunan fuzzy intuitionistik A^* disebut subgrup fuzzy intuitionistik dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku*

(1) $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$,
(2) $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$,
(3) $\nu_A(xy) \leq \text{maks}\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$,
(4) $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x)$.

Contoh 2.12. *Diberikan grup Klein-4 $K = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ dan himpunan fuzzy intuitionistik A^* dari K dengan fungsi keanggotaan μ_A dan fungsi non-keanggotaan ν_A yang didefinisikan berturut-turut oleh*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0,8; & \textit{jika } x = e, \\ 0,5; & \textit{jika } x = ab, \\ 0,3; & \textit{jika } x \in \{a, b\}; \end{cases} \qquad \nu_A(x) = \begin{cases} 0,2; & \textit{jika } x = e, \\ 0,4; & \textit{jika } x = b, \\ 0,5; & \textit{jika } x \in \{a, ab\}, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in K$. Himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ merupakan subgrup fuzzy intuitionistik dari grup Klein-4 K.

Subgrup fuzzy A dari grup G dengan fungsi keanggotaan μ_A dan fungsi non-keanggotaan μ_{A^c}, dinotasikan $A = \{(x; \mu_A(x); \mu_{A^c}(x)) \mid x \in G\}$, merupakan subgrup fuzzy intuitionistik dari G sebab untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$, $\mu_{A^c}(xy) \leq \text{maks}\{\mu_{A^c}(x), \mu_{A^c}(y)\}$, dan $\mu_{A^c}(x^{-1}) \leq \mu_{A^c}(x)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas konsep subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm). Terlebih dahulu dibahas konsep s-norm.

Definisi 3.1 ([5]). *Pemetaan $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ disebut t-conorm jika memenuhi empat kondisi berikut. Untuk setiap $a, b, d \in [0,1]$,*

(1) $S(a,0) = a$ (kondisi batas),
(2) $b \leq d$ berakibat $S(a,b) \leq S(a,d)$ (sifat monoton),
(3) $S(a,b) = S(b,a)$ (sifat komutatif),
(4) $S(a, S(b,d)) = S(S(a,b), d)$ (sifat asosiatif).

Istilah lain dari t-*conorm* adalah s-norm. Pada artikel ini, digunakan istilah s-norm.

Contoh 3.2. *Berikut diberikan contoh s-norm.*

(1) Standard union: $S_m(a,b) = \text{maks}\{a,b\}$
(2) Algebraic sum: $S_p(a,b) = a + b - ab$
(3) Bounded sum: $S_b(a,b) = \min\{1, a+b\}$
(4) Drastic union:

$$S_D(a,b) = \begin{cases} b, & \textit{jika } a = 0, \\ a, & \textit{jika } b = 0, \\ 1, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

(5) Nilpotent maximum:

$$S_{nM}(a,b) = \begin{cases} \text{maks}\{a,b\}, & \textit{jika } a + b < 1, \\ 1, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Berdasarkan [5], untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku $S_m(a,b) \leq S(a,b) \leq S_D(a,b)$ dengan S sebarang s-norm. Suatu s-norm S dikatakan kontinu jika S merupakan fungsi kontinu. Contoh s-norm kontinu antara lain, s-norm S_m, S_p, dan S_b. Sementara itu, s-norm S_D bukan merupakan s-norm kontinu.

Definisi 3.3 ([5]). *Suatu t-norm T dan s-norm S disebut dual jika untuk setiap $a, b \in [0,1]$ berlaku $S(1-a, 1-b) = 1 - T(a,b)$ dan $T(1-a, 1-b) = 1 - S(a,b)$.*

Dalam Contoh 2.8 dan Contoh 3.2, t-norm dan s-norm yang merupakan dual adalah T_m dan S_m; T_p dan S_p; T_b dan S_b; T_D dan S_D; T_{nM} dan S_{nM}.

Teorema berikut menjamin bahwa untuk setiap t-norm T, terdapat s-norm S yang merupakan dual dari T.

Teorema 3.4 ([5]). *Jika T merupakan t-norm, maka pemetaan $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan oleh $S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ merupakan s-norm dual dari T.*

Berikut diberikan definisi subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm).

Definisi 3.5 ([8]). *Misalkan G merupakan grup. Himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari G disebut subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm T dan s-norm S) dari G jika*

(1) $\mu_A(xy) \geq T(\mu_A(x), \mu_A(y))$,
(2) $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$,
(3) $\nu_A(xy) \leq S(\nu_A(x), \nu_A(y))$,
(4) $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x)$,

untuk setiap $x, y \in G$.

Dalam artikel ini, t-norm T dan s-norm S yang dimaksud pada Definisi 3.5 adalah t-norm T dan s-norm S yang merupakan dual. Agar lebih singkat, subgrup fuzzy intuitionistik A^* atas norm (t-norm T dan s-norm S) dari grup G disebut (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik A^* dari grup G.

Contoh 3.6. *Diberikan grup Klein-4* $K = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle$ *dan himpunan fuzzy intuitionistik* A^* *dari* K *dengan fungsi keanggotaan* μ_A *dan fungsi non-keanggotaan* ν_A *yang didefinisikan berturut-turut oleh*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0,6; & \textit{jika } x \in \{e, ab\}, \\ 0,7; & \textit{jika } x = a, \\ 0,3; & \textit{jika } x = b; \end{cases} \qquad \nu_A(x) = \begin{cases} 0,4; & \textit{jika } x \in \{e, ab\}, \\ 0,2; & \textit{jika } x = a, \\ 0,5; & \textit{jika } x = b, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in K$*. Himpunan fuzzy intuitionistik* $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ *merupakan* (T_b, S_b)*-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup Klein-4* K*.*

Setiap subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G merupakan (T_m, S_m)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G. Lebih lanjut, setiap subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G dengan T dan S berturut-turut sebarang t-norm dan s-norm. Hal tersebut dikarenakan t-norm T dan s-norm S berturut-turut memenuhi $\min\{a,b\} = T_m(a,b) \geq T(a,b)$ dan $\text{maks}\{a,b\} = S_m(a,b) \leq S(a,b)$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$. Namun, (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G belum tentu merupakan subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. Sebagai contoh, pada (T_b, S_b)-subgrup fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari grup Klein-4 K yang diberikan di Contoh 3.6, terdapat $a \in K$, sehingga $\mu_A(e) \ngeq \min\{\mu_A(a), \mu_A(a)\}$. Akibatnya, $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ bukan merupakan subgrup fuzzy intuitionistik dari grup Klein-4 K.

Setiap T-subgrup fuzzy A dari grup G dengan fungsi keanggotaan μ_A dan fungsi non-keanggotaan μ_{A^c}, dinotasikan $A = \{(x; \mu_A(x); \mu_{A^c}(x)) \mid x \in G\}$, merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G sebab untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $\mu_A(xy) \geq T(\mu_A(x), \mu_A(y))$, $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$,

$$\mu_{A^c}(xy) \leq 1 - T(\mu_A(x), \mu_A(y)) = S(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_A(y)) = S(\mu_{A^c}(x), \mu_{A^c}(y)),$$

dan $\mu_{A^c}(x^{-1}) \leq \mu_{A^c}(x)$ dengan S merupakan s-norm dual dari T.

Proposisi 2, poin 3, dalam [8] dapat diperkuat menjadi teorema berikut.

Teorema 3.7. *Jika* $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ *merupakan* (T,S)*-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup* G*, maka untuk setiap* $x \in G$ *berlaku* $A^*(x) = A^*(x^{-1})$*.*

Bukti. Ambil sebarang $x \in G$. Karena $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G, maka berlaku

$$\mu_A(x) = \mu_A((x^{-1})^{-1}) \geq \mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x) \text{ dan } \nu_A(x) = \nu_A((x^{-1})^{-1}) \leq \nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x).$$

Dengan demikian, terbukti $A^*(x) = A^*(x^{-1})$ untuk setiap $x \in G$. □

Selanjutnya, akan dibahas syarat perlu dan cukup suatu himpunan fuzzy intuitionistik dari grup G merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G. Pertama-tama diberikan konsep *product* dari himpunan fuzzy intuitionistik dari grup atas norm (t-norm dan s-norm) dan invers himpunan fuzzy intuitionistik dari grup. Dua konsep tersebut diperoleh dengan mengacu pada konsep-konsep dalam [8].

Definisi 3.8. *Misalkan* $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ *dan* $B^* = (\mu_B, \nu_B)$ *masing-masing merupakan himpunan fuzzy intuitionistik dari grup* G*. Product dari* A^* *dan* B^* *atas norm (*t*-norm* T *dan* s*-norm* S*) dinotasikan*

$$A^* \circ_{(T,S)} B^* = (\mu_{A \circ_{(T,S)} B}, \nu_{A \circ_{(T,S)} B})$$

dengan $\mu_{A \circ_{(T,S)} B}$ *dan* $\nu_{A \circ_{(T,S)} B}$ *didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap* $x \in G$*,*

$$\mu_{A \circ_{(T,S)} B}(x) = \sup\{T(\mu_A(y), \mu_B(z)) \mid y, z \in G, yz = x\}$$

dan

$$\nu_{A\circ_{(T,S)}B}(x) = \inf\{S(\nu_A(y), \nu_B(z)) \mid y, z \in G, yz = x\}.$$

Invers dari A^* *dinotasikan*

$$(A^*)^{-1} = (\mu_{A^{-1}}, \nu_{A^{-1}})$$

dengan $\mu_{A^{-1}}$ *dan* $\nu_{A^{-1}}$ *didefinisikan oleh*

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1}) \text{ dan } \nu_{A^{-1}}(x) = \nu_A(x^{-1}) \text{ untuk setiap } x \in G.$$

Dalam Definisi 3.8, t-norm T dan s-norm S yang dimaksud adalah t-norm T dan s-norm S yang merupakan dual. Selanjutnya, penulisan bentuk dari $\mu_{A\circ_{(T,S)}B}(x)$ dan $\nu_{A\circ_{(T,S)}B}(x)$ dalam Definisi 3.8 berturut-turut dapat disingkat menjadi $\mu_{A\circ_{(T,S)}B}(x) = \sup_{yz=x} T(\mu_A(y), \mu_B(z))$ dan $\nu_{A\circ_{(T,S)}B}(x) = \inf_{yz=x} S(\nu_A(y), \nu_B(z))$.

Dapat dipahami bahwa konsep *product* atas t-norm dalam [10], Definisi 1.7, jika diterapkan pada himpunan fuzzy dari grup dan konsep *product* fuzzy intuitionistik dalam [4], Definisi 1.7, jika diterapkan pada himpunan fuzzy intuitionistik dari grup merupakan kejadian khusus dari konsep *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dalam Definisi 3.8.

Berikut ini diberikan sifat-sifat *product* dari himpunan fuzzy intuitionistik dari grup atas norm (t-norm dan s-norm).

Teorema 3.9. *Misalkan* A^*, B^*, *dan* C^* *masing-masing merupakan himpunan fuzzy intuitionistik dari grup* G. *Untuk sebarang* t*-norm* T *dan* s*-norm* S *yang merupakan dual, berlaku*

(1) $(A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} C^* = A^* \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} C^*)$ *jika* T t*-norm kontinu dan* S s*-norm kontinu,*

(2) $(A^* \circ_{(T,S)} B^*)^{-1} = (B^*)^{-1} \circ_{(T,S)} (A^*)^{-1}$.

Bukti. Diberikan himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$, $B^* = (\mu_B, \nu_B)$, dan $C^* = (\mu_C, \nu_C)$ dari grup G.

(1) Diketahui T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu. Akan dibuktikan $(A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} C^* = A^* \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} C^*)$. Ambil sebarang $x \in G$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \sup_{yz=x} T(\mu_{A\circ_{(T,S)}B}(y), \mu_C(z)) \\ &= \sup_{yz=x} T(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)).\end{aligned}$$

Selanjutnya, ambil sebarang $y, z \in G$ dengan $yz = x$. Karena untuk setiap $p, q \in G$ dengan $pq = y$ berlaku $T(\mu_A(p), \mu_B(q)) \leq \sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q))$, maka berdasarkan sifat monoton diperoleh

$$T(T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) \leq T(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)).$$

Lebih lanjut, karena T kontinu, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x', y' \in [0, 1]$ dengan

$$\sqrt{(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)) - x')^2 + (\mu_C(z) - y')^2} < \delta$$

berlaku

$$\left| T(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) - T(x', y') \right| < \epsilon.$$

Untuk δ tersebut, terdapat $p', q' \in G$ dengan $p'q' = y$ sehingga

$$\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)) - T(\mu_A(p'), \mu_B(q')) < \delta.$$

Jadi, dapat diperoleh

$$\sqrt{(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)) - T(\mu_A(p'), \mu_B(q'))\ )^2 + (\mu_C(z) - \mu_C(z))^2} < \delta.$$

Akibatnya,

$$T(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) - T(T(\mu_A(p'), \mu_B(q')), \mu_C(z))) < \epsilon.$$

Dengan demikian,

$$T(\sup_{pq=y} T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) = \sup_{pq=y} T(T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\mu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \sup_{yz=x} \sup_{pq=y} T(T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) \\
&= \sup_{(pq)z=x} T(T(\mu_A(p), \mu_B(q)), \mu_C(z)) \\
&= \sup_{p(qz)=x} T(\mu_A(p), T(\mu_B(q), \mu_C(z))) \\
&= \sup_{pr=x} \sup_{qz=r} T(\mu_A(p), T(\mu_B(q), \mu_C(z))).
\end{aligned}$$

Kemudian dengan cara yang sama, dapat diperoleh bahwa untuk setiap $p, r \in G$ dengan $pr = x$ berlaku

$$\sup_{qz=r} T(\mu_A(p), T(\mu_B(q), \mu_C(z))) = T(\mu_A(p), \sup_{qz=r} T(\mu_B(q), \mu_C(z))),$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\mu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \sup_{pr=x} T(\mu_A(p), \sup_{qz=r} T(\mu_B(q), \mu_C(z))) \\
&= \sup_{pr=x} T(\mu_A(p), \mu_{B\circ_{(T,S)}C}(r)) \\
&= \mu_{A\circ_{(T,S)}(B\circ_{(T,S)}C)}(x).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\nu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \inf_{yz=x} S(\nu_{A\circ_{(T,S)}B}(y), \nu_C(z)) \\
&= \inf_{yz=x} S(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)).
\end{aligned}$$

Ambil sebarang $y, z \in G$ dengan $yz = x$. Karena untuk setiap $p, q \in G$ dengan $pq = y$ berlaku $S(\nu_A(p), \nu_B(q)) \geq \inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q))$, maka berdasarkan sifat monoton diperoleh

$$S(S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)) \geq S(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)).$$

Lebih lanjut, karena S kontinu, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x', y' \in [0, 1]$ dengan

$$\sqrt{(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)) - x')^2 + (\nu_C(z) - y')^2} < \delta$$

berlaku

$$\left| S(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)) - S(x', y') \right| < \epsilon.$$

Untuk δ tersebut, terdapat $p', q' \in G$ dengan $p'q' = y$ sehingga

$$S(\nu_A(p'), \nu_B(q')) - \inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)) < \delta.$$

Jadi, dapat diperoleh

$$\sqrt{(\ S(\nu_A(p'), \nu_B(q')) - \inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q))\ )^2 + (\nu_C(z) - \nu_C(z))^2} < \delta.$$

Akibatnya,

$$S(S(\nu_A(p'), \nu_B(q')), \nu_C(z)) - S(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)) < \epsilon.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$S(\inf_{pq=y} S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)) = \inf_{pq=y} S(S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z)),$$

sehingga

$$\begin{aligned}\nu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \inf_{yz=x} \inf_{pq=y} S(S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z))\\ &= \inf_{(pq)z=x} S(S(\nu_A(p), \nu_B(q)), \nu_C(z))\\ &= \inf_{p(qz)=x} S(\nu_A(p), S(\nu_B(q), \nu_C(z)))\\ &= \inf_{pr=x} \inf_{qz=r} S(\nu_A(p), S(\nu_B(q), \nu_C(z))).\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $p, r \in G$ dengan $pr = x$ dapat diperoleh

$$\inf_{qz=r} S(\nu_A(p), S(\nu_B(q), \nu_C(z))) = S(\nu_A(p), \inf_{qz=r} S(\nu_B(q), \nu_C(z))),$$

sehingga

$$\begin{aligned}\nu_{(A\circ_{(T,S)}B)\circ_{(T,S)}C}(x) &= \inf_{pr=x} S(\nu_A(p), \inf_{qz=r} S(\nu_B(q), \nu_C(z)))\\ &= \inf_{pr=x} S(\nu_A(p), \nu_{B\circ_{(T,S)}C}(r))\\ &= \nu_{A\circ_{(T,S)}(B\circ_{(T,S)}C)}(x).\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti $(A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} C^* = A^* \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} C^*)$.

(2) Akan dibuktikan $(A^* \circ_{(T,S)} B^*)^{-1} = (B^*)^{-1} \circ_{(T,S)} (A^*)^{-1}$. Ambil sebarang $x \in G$. Diperoleh

$$\begin{aligned}\mu_{(A\circ_{(T,S)}B)^{-1}}(x) &= \mu_{A\circ_{(T,S)}B}(x^{-1})\\ &= \sup_{yz=x^{-1}} T(\mu_A(y), \mu_B(z))\\ &= \sup_{yz=x^{-1}} T(\mu_B(z), \mu_A(y))\\ &= \sup_{z^{-1}y^{-1}=x} T(\mu_{B^{-1}}(z^{-1}), \mu_{A^{-1}}(y^{-1}))\\ &= \mu_{B^{-1}\circ_{(T,S)}A^{-1}}(x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\nu_{(A\circ_{(T,S)}B)^{-1}}(x) &= \nu_{A\circ_{(T,S)}B}(x^{-1})\\ &= \inf_{yz=x^{-1}} S(\nu_A(y), \nu_B(z))\\ &= \inf_{yz=x^{-1}} S(\nu_B(z), \nu_A(y))\\ &= \inf_{z^{-1}y^{-1}=x} S(\nu_{B^{-1}}(z^{-1}), \nu_{A^{-1}}(y^{-1}))\\ &= \nu_{B^{-1}\circ_{(T,S)}A^{-1}}(x).\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti $(A^* \circ_{(T,S)} B^*)^{-1} = (B^*)^{-1} \circ_{(T,S)} (A^*)^{-1}$. □

Syarat perlu dan cukup suatu himpunan fuzzy intuitionistik dari grup G merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G diberikan sebagai berikut.

Teorema 3.10. *Himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari grup G merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G jika dan hanya jika memenuhi*

(1) $A^* \circ_{(T,S)} A^* \subseteq A^*$,
(2) $(A^*)^{-1} = A^*$.

Bukti. Diketahui $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. Ambil sebarang $x \in G$. Untuk x tersebut, ambil sebarang $y, z \in G$ yang memenuhi $yz = x$. Diperhatikan bahwa $\mu_A(x) = \mu_A(yz) \geq T(\mu_A(y), \mu_A(z))$ dan $\nu_A(x) = \nu_A(yz) \leq S(\nu_A(y), \nu_A(z))$. Akibatnya

$$\mu_A(x) \geq \sup_{yz=x} T(\mu_A(y), \mu_A(z)) = \mu_{A\circ_{(T,S)}A}(x),$$

$$\nu_A(x) \leq \inf_{yz=x} S(\nu_A(y), \nu_A(z)) = \nu_{A\circ_{(T,S)}A}(x).$$

Jadi, terbukti $A^* \circ_{(T,S)} A^* \subseteq A^*$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 3.8 dan Teorema 3.7 berturut-turut, diketahui $(A^*)^{-1}(x) = A^*(x^{-1})$ dan $A^*(x) = A^*(x^{-1})$, sehingga diperoleh $(A^*)^{-1}(x) = A^*(x)$. Dengan demikian, terbukti $(A^*)^{-1} = A^*$.

Sebaliknya, diketahui himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari grup G memenuhi $A^* \circ_{(T,S)} A^* \subseteq A^*$ dan $(A^*)^{-1} = A^*$. Ambil sebarang $y, z \in G$. Diperhatikan bahwa $yz = x$ untuk suatu $x \in G$, sehingga dapat diperoleh

$$\mu_A(yz) = \mu_A(x) \geq \mu_{A\circ_{(T,S)}A}(x) = \sup_{yz=x} T(\mu_A(y), \mu_A(z)) \geq T(\mu_A(y), \mu_A(z)),$$

$$\nu_A(yz) = \nu_A(x) \leq \nu_{A\circ_{(T,S)}A}(x) = \inf_{yz=x} S(\nu_A(y), \nu_A(z)) \leq S(\nu_A(y), \nu_A(z)).$$

Selanjutnya, berdasarkan yang diketahui, didapat $(A^*)^{-1}(y) = A^*(y)$. Di sisi lain, berdasarkan Definisi 3.8, diketahui $(A^*)^{-1}(y) = A^*(y^{-1})$. Akibatnya, diperoleh bahwa $A^*(y^{-1}) = A^*(y)$. Dengan demikian, terbukti bahwa A^* merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G. □

Rasuli [8] memberikan syarat perlu dan cukup *product* dua (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup Abelian G atas norm (t-norm T dan s-norm S) merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G sebagaimana Teorema 3.11.

Teorema 3.11 ([8]). *Misalkan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dan $B^* = (\mu_B, \nu_B)$ masing-masing merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup Abelian G, maka $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G jika dan hanya jika $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$.*

Namun, kebenaran teorema tersebut dapat disangkal oleh contoh berikut.

Contoh 3.12. *Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari $\mathbb{Z}$ dengan μ_A dan ν_A didefinisikan berturut-turut oleh*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1; & \textit{jika } x \in 4\mathbb{Z}, \\ 0,8; & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}, \\ 0,9; & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}+1; \end{cases} \qquad \nu_A(x) = \begin{cases} 0; & \textit{jika } x \in 4\mathbb{Z}, \\ 0,1; & \textit{lainnya}, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ serta himpunan fuzzy intuitionistik $B^* = (\mu_B, \nu_B)$ dari $\mathbb{Z}$ dengan μ_B dan ν_B didefinisikan berturut-turut oleh

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|+2}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{|x|}{|x|+1}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}+1; \end{cases} \qquad \nu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \textit{jika } x = 0, \\ \frac{1}{2|x|+4}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{|x|+1}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}+1, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Himpunan fuzzy intuitionistik A^* dan B^* merupakan (T_D, S_D)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup $\mathbb{Z}$. Karena $\mathbb{Z}$ grup Abelian, maka berlaku $A^* \circ_{(T_D,S_D)} B^* = B^* \circ_{(T_D,S_D)} A^*$. Namun, $A^* \circ_{(T_D,S_D)} B^*$ bukan merupakan (T_D, S_D)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup $\mathbb{Z}$ sebab $\mu_{A\circ_{(T_D,S_D)}B}(2) = \frac{1}{4} \ngeq T_D(\mu_{A\circ_{(T_D,S_D)}B}(1), \mu_{A\circ_{(T_D,S_D)}B}(1)) = T_D(1, 1) = 1$.

Berdasarkan Contoh 3.12, untuk (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik A^* dan B^* dari grup Abelian G dengan T t-norm tak kontinu dan S s-norm tak kontinu, jika $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$, maka $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ belum tentu merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G

Oleh karena itu, Teorema 3.11 dirumuskan kembali dengan memberikan syarat, yaitu T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu. Selain itu, syarat berupa grup Abelian G pada Teorema 3.11 dapat diperlemah menjadi sebarang grup G, sehingga diperoleh Teorema 3.13.

Sifat *product* dua (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G atas norm (t-norm T dan s-norm S) diberikan sebagai berikut. Sifat tersebut berupa syarat perlu dan cukup *product* dua (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G atas norm (t-norm T dan s-norm S) dengan T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G.

Teorema 3.13. *Misalkan $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dan $B^* = (\mu_B, \nu_B)$ masing-masing merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G dengan T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu, maka $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G jika dan hanya jika $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$.*

Bukti. Diketahui $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. Berdasarkan Teorema 3.9 poin 2 dan Teorema 3.10, dapat diperoleh

$$A^* \circ_{(T,S)} B^* = (A^* \circ_{(T,S)} B^*)^{-1} = (B^*)^{-1} \circ_{(T,S)} (A^*)^{-1} = B^* \circ_{(T,S)} A^*.$$

Dengan demikian, terbukti $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$.

Sebaliknya, diketahui $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$. Berdasarkan Teorema 3.9 poin 2 dan Teorema 3.10, diperoleh

$$(A^* \circ_{(T,S)} B^*)^{-1} = (B^* \circ_{(T,S)} A^*)^{-1} = (A^*)^{-1} \circ_{(T,S)} (B^*)^{-1} = A^* \circ_{(T,S)} B^*.$$

Selanjutnya, karena T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu, maka berdasarkan Teorema 3.9 poin 1, diperoleh

$$\begin{aligned}(A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} (A^* \circ_{(T,S)} B^*) &= A^* \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} A^*) \circ_{(T,S)} B^* \\ &= A^* \circ_{(T,S)} (A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} B^* \\ &= (A^* \circ_{(T,S)} A^*) \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} B^*).\end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.10 diperoleh

$$(A^* \circ_{(T,S)} B^*) \circ_{(T,S)} (A^* \circ_{(T,S)} B^*) = (A^* \circ_{(T,S)} A^*) \circ_{(T,S)} (B^* \circ_{(T,S)} B^*) \subseteq A^* \circ_{(T,S)} B^*.$$

Dengan demikian, $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. □

Misalkan A^* dan B^* masing-masing merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G dengan T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu. Dengan adanya Teorema 3.13, untuk membuktikan bahwa $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G, cukup dibuktikan bahwa $A^* \circ_{(T,S)} B^* = B^* \circ_{(T,S)} A^*$. Selain itu, apabila diperoleh $A^* \circ_{(T,S)} B^* \neq B^* \circ_{(T,S)} A^*$, maka dapat dipastikan $A^* \circ_{(T,S)} B^*$ bukan merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari G.

Selanjutnya, Rasuli [8] menyatakan bahwa *image* dari (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik.

Teorema 3.14 ([8]). *Diberikan grup G, grup H, dan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari G. Jika $\varphi : G \to H$ merupakan homomorfisma grup, maka $\varphi(A^*)$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup H.*

Namun, terdapat contoh yang dapat menyangkal kebenaran Teorema 3.14. Contoh tersebut diberikan sebagai berikut.

Contoh 3.15. *Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan himpunan fuzzy intuitionistik $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ dari $\mathbb{Z}$ dengan μ_A dan ν_A didefinisikan berturut-turut oleh*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \textit{jika } x = 0, \\ \frac{|x|}{|x|+1}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} + 1, \\ \frac{1}{|x|}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \end{cases} \qquad \nu_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{jika } x = 0, \\ \frac{1}{|x|+1}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} + 1, \\ \frac{1}{2|x|}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Himpunan fuzzy intuitionistik A^* merupakan (T_D, S_D)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup $\mathbb{Z}$. Selanjutnya, diberikan grup $(\mathbb{Z}_2, +)$ dan didefinisikan homomorfisma *grup* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ *oleh*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \overline{0}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}, \\ \overline{1}, & \textit{jika } x \in 2\mathbb{Z}+1, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. *Himpunan fuzzy intuitionistik* $\varphi(A^*)$ *bukan merupakan* (T_D, S_D)*-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup* $\mathbb{Z}_2$ *sebab* $\mu_{\varphi(A)}(\overline{0}) = \frac{1}{2} \ngeq T_D(\mu_{\varphi(A)}(\overline{1}), \mu_{\varphi(A)}(\overline{1})) = T_D(1,1) = 1$.

Berdasarkan Contoh 3.15, dapat ditarik kesimpulan bahwa *image* dari (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup dengan T t-norm tak kontinu dan S s-norm tak kontinu belum tentu merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik. Oleh karena itu, Teorema 3.14 dirumuskan kembali dengan memberikan syarat, yaitu T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu, sehingga diperoleh Teorema 3.16.

Sifat *image* dari (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup berupa syarat cukup agar *image* dari (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik di bawah homomorfisma grup merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik diberikan sebagai berikut.

Teorema 3.16. *Diberikan homomorfisma grup* $\varphi : G \to H$ *dan* (T,S)*-subgrup fuzzy intuitionistik* $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ *dari grup* G. *Jika* T t*-norm kontinu dan* S s*-norm kontinu, maka* $\varphi(A^*)$ *merupakan* (T,S)*-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup* H.

Bukti. Diketahui $A^* = (\mu_A, \nu_A)$ merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. Akan dibuktikan $\varphi(A^*)$ merupakan (T,S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup H. Ambil sebarang $u, v \in H$. Misalkan $u \notin \varphi(G)$ atau $v \notin \varphi(G)$. Jika $u \notin \varphi(G)$, maka $\mu_{\varphi(A)}(u) = 0$ dan $\nu_{\varphi(A)}(u) = 1$. Jika $v \notin \varphi(G)$, maka $\mu_{\varphi(A)}(v) = 0$ dan $\nu_{\varphi(A)}(v) = 1$. Diperhatikan bahwa t-norm T memenuhi $T(x,0) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$ sebab untuk sebarang $x \in [0,1]$ berlaku $0 \le T(x,0) = T(0,x) \le T(0,1) = 0$. Akibatnya, dapat diperoleh

$$T(\mu_{\varphi(A)}(u), \mu_{\varphi(A)}(v)) = 0 \le \mu_{\varphi(A)}(uv).$$

Diperhatikan bahwa s-norm S memenuhi $S(x,1) = 1$ untuk setiap $x \in [0,1]$ sebab untuk sebarang $x \in [0,1]$ berlaku $1 = S(1,0) = S(0,1) \le S(x,1) \le 1$. Akibatnya, dapat diperoleh

$$S(\nu_{\varphi(A)}(u), \nu_{\varphi(A)}(v)) = 1 \ge \nu_{\varphi(A)}(uv).$$

Sementara itu, jika $u \notin \varphi(G)$, maka $u^{-1} \notin \varphi(G)$, sehingga

$$\mu_{\varphi(A)}(u) = 0 = \mu_{\varphi(A)}(u^{-1}) \text{ dan } \nu_{\varphi(A)}(u) = 1 = \nu_{\varphi(A)}(u^{-1}).$$

Selanjutnya, misalkan $u \in \varphi(G)$ dan $v \in \varphi(G)$, maka terdapat $x, y \in G$ sedemikian sehingga $u = \varphi(x)$ dan $v = \varphi(y)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi(A)}(uv) &= \sup\{\mu_A(z) \mid z \in G, \varphi(z) = uv\} \\ &\ge \sup\{\mu_A(xy) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &\ge \sup\{T(\mu_A(x), \mu_A(y)) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\}. \end{aligned}$$

Kemudian untuk setiap $x \in \varphi^{-1}(u)$ dan $y \in \varphi^{-1}(v)$ berlaku

$$\mu_A(x) \le \sup\{\mu_A(x) | x \in G, \varphi(x) = u\} \text{ dan } \mu_A(y) \le \sup\{\mu_A(y) | y \in G, \varphi(y) = v\},$$

sehingga berdasarkan sifat monoton dapat diperoleh

$$T(\mu_A(x), \mu_A(y)) \le T(\sup\{\mu_A(x) | x \in G, \varphi(x) = u\},\ \sup\{\mu_A(y) | y \in G, \varphi(y) = v\}).$$

Lebih lanjut, karena T kontinu, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x', y' \in [0,1]$ dengan

$$\sqrt{(\sup\{\mu_A(x) \mid x \in G, \varphi(x) = u\} - x')^2 \ + \ (\sup\{\mu_A(y) \mid y \in G, \varphi(y) = v\} - y')^2} < \delta$$

berlaku

$$|T(\sup\{\mu_A(x) | x \in G, \varphi(x) = u\},\ \sup\{\mu_A(y) | y \in G, \varphi(y) = v\}) - T(x', y')| < \epsilon.$$

Untuk δ tersebut, terdapat $a \in \varphi^{-1}(u)$ dan $b \in \varphi^{-1}(v)$, sehingga

$\sup\{\mu_A(x) | x \in G, \varphi(x) = u\} - \mu_A(a) < \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$ dan $\sup\{\mu_A(y) | y \in G, \varphi(y) = v\} - \mu_A(b) < \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$.

Lebih lanjut, dapat diperoleh

$$\sqrt{(\sup\{\mu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\} - \mu_A(a))^2 + (\sup\{\mu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\} - \mu_A(b))^2} < \delta$$

yang berakibat

$$T(\sup\{\mu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\},\ \sup\{\mu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\}) - T(\mu_A(a), \mu_A(b)) < \epsilon.$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned}&\sup\{T(\mu_A(x), \mu_A(y)) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\}\\ &= T(\sup\{\mu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\}, \sup\{\mu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\}).\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi(A)}(uv) &\geq T(\sup\{\mu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\}, \sup\{\mu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\})\\ &= T(\mu_{\varphi(A)}(u), \mu_{\varphi(A)}(v)).\end{aligned}$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi(A)}(uv) &= \inf\{\nu_A(z) \mid z \in G, \varphi(z) = uv\}\\ &\leq \inf\{\nu_A(xy) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\}\\ &\leq \inf\{S(\nu_A(x), \nu_A(y)) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\}.\end{aligned}$$

Kemudian untuk setiap $x \in \varphi^{-1}(u)$ dan $y \in \varphi^{-1}(v)$ berlaku

$$\nu_A(x) \geq \inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\} \text{ dan } \nu_A(y) \geq \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\},$$

sehingga berdasarkan sifat monoton dapat diperoleh

$$S(\nu_A(x), \nu_A(y)) \geq S(\inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\},\ \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\}).$$

Lebih lanjut, karena S kontinu, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x', y' \in [0, 1]$ dengan

$$\sqrt{(\inf\{\nu_A(x) \mid x \in G, \varphi(x) = u\} - x')^2 \ +\ (\inf\{\nu_A(y) \mid y \in G, \varphi(y) = v\} - y')^2} < \delta$$

berlaku

$$|S(\inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\},\ \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\}) - S(x', y')| < \epsilon.$$

Untuk δ tersebut, terdapat $a \in \varphi^{-1}(u)$ dan $b \in \varphi^{-1}(v)$, sehingga

$\nu_A(a) - \inf\{\nu_A(x) \mid x \in G, \varphi(x) = u\} < \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$ dan $\nu_A(b) - \inf\{\nu_A(y) \mid y \in G, \varphi(y) = v\} < \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$.

Lebih lanjut, dapat diperoleh

$$\sqrt{(\nu_A(a) - \inf\{\nu_A(x) \mid x \in G, \varphi(x) = u\})^2 \ +\ (\nu_A(b) - \inf\{\nu_A(y) \mid y \in G, \varphi(y) = v\})^2} < \delta$$

yang berakibat

$$S(\nu_A(a), \nu_A(b)) - S(\inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x)=u\}, \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y)=v\}) < \epsilon.$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned}&\inf\{S(\nu_A(x), \nu_A(y)) \mid x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\}\\ &= S(\inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\},\ \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\}),\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi(A)}(uv) &\leq S(\inf\{\nu_A(x)|x \in G, \varphi(x) = u\},\ \inf\{\nu_A(y)|y \in G, \varphi(y) = v\})\\ &= S(\nu_{\varphi(A)}(u), \nu_{\varphi(A)}(v)).\end{aligned}$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$\mu_{\varphi(A)}(u^{-1}) = \sup\{\mu_A(z)|z \in G, \varphi(z) = u^{-1}\} = \sup\{\mu_A(z^{-1})|z \in G, \varphi(z^{-1}) = u\} = \mu_{\varphi(A)}(u),$$

$$\nu_{\varphi(A)}(u^{-1}) = \inf\{\nu_A(z)|z \in G, \varphi(z) = u^{-1}\} = \inf\{\nu_A(z^{-1})|z \in G, \varphi(z^{-1}) = u\} = \nu_{\varphi(A)}(u).$$

Dengan demikian, terbukti $\varphi(A^*)$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari H. $\square$

Misalkan $\varphi : G \to H$ merupakan homomorfisma grup dan A^* merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup G. Dengan adanya Teorema 3.16, apabila diketahui T t-norm kontinu dan S s-norm kontinu, maka dapat dipastikan $\varphi(A^*)$ merupakan (T, S)-subgrup fuzzy intuitionistik dari grup H.

4. Simpulan

Sifat *product* atas norm (t-norm dan s-norm) dari dua subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) dalam [8] yang dinyatakan sebagaimana Teorema 3.11 dapat disangkal kebenarannya oleh Contoh 3.12. Oleh karena itu, Teorema 3.11 dirumuskan kembali dengan memberikan syarat, yaitu t-norm dan s-norm masing-masing bersifat kontinu, serta memperlemah syarat grup Abelian menjadi sebarang grup, sehingga diperoleh Teorema 3.13.

Selanjutnya, sifat *image* dari subgrup fuzzy intuitionistik atas norm (t-norm dan s-norm) di bawah homomorfisma grup dalam [8] yang dinyatakan sebagaimana Teorema 3.14 dapat disangkal kebenarannya oleh Contoh 3.15. Dengan memberikan syarat, yaitu t-norm dan s-norm masing-masing bersifat kontinu, Teorema 3.14 dirumuskan kembali sehingga diperoleh Teorema 3.16.

Daftar Pustaka

[1] Anthony, J. M., dan Sherwood, H., 1979, Fuzzy groups redefined, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 69, hal 124-130.

[2] Atanassov, K. T., 1986, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20, hal. 87-96.

[3] Biswas, R., 1997, Intuitionistic fuzzy subgroups, *NIFS*, 3(2), hal. 53-60.

[4] Hur, K., Kang, H. W., dan Song, H. K., 2003, Intuitionistic fuzzy subgroups and subrings, *Honam Mathematical J*, 25(2), hal. 19-41.

[5] Klir, G. J., dan Yuan, B., 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall PTR, New Jersey.

[6] Mordeson, J. N., Bhutani, K. R., dan Rosenfeld, A., 2005, *Fuzzy Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[7] Rasuli, R., 2018, Fuzzy subgroups over a t-norm, *Journal of Information and Optimization Sciences*, 39(8), hal. 1757-1765.

[8] Rasuli, R., 2020, Intuitionistic fuzzy subgroups with respect to norms (T, S), *Engineering and Applied Science Letters*, 3(2), hal. 40-53.

[9] Rosenfeld, A., 1971, Fuzzy groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, hal. 512-517.

[10] Sessa, S., 1984, On fuzzy subgroups and fuzzy ideals under triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems*, 13, hal. 95-100.

[11] Sharma, P. K., 2011, Intuitionistic fuzzy groups, *IFRSA International Journal of Data Warehousing & Mining*, 1(1), hal. 86-94.

[12] Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, hal. 338-353.

[13] Zahedi, M. M., dan Mashinchi, M., 1989, Some results on redefined fuzzy subgroups, *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, 1(1), hal. 65-67.