Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 19, No.1 (2023), pp. 29–39. doi:10.24198/jmi.v19.n1.45399.29-39

Aturan Titik Tengah *Double* untuk Mengaproksimasi Integral Riemann-Stieltjes

Rike Marjulisa, Imran M

Numerical Computing Group, Department of Mathematics, University of Riau
Pekanbaru 28293
email:rikemarjulisa@unri.ac.id, imranm@unri.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas penurunan aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Aturan titik tengah *double* diturunkan dengan mengaproksimasi beberapa fungsi monomial tertentu yang bertujuan untuk mendapatkan nilai-nilai dari koefisien metode yang baru. Selanjutnya dibahas bentuk *error* dari metode yang diusulkan. Pada bagian akhir diberikan hasil komputasi numerik dari metode yang diusulkan dan dibandingkan dengan metode-metode sebelumnya. Simulasi numerik menunjukkan bahwa metode yang dikembangkan memberikan solusi hampiran yang lebih baik.

Kata kunci: aturan titik tengah, integral Riemann-Stieltjes, bentuk *error*.

Abstract

This paper discusses the derivation of the double midpoint rule for approximating the Riemann-Stieltjes integral. The double midpoint rule is derived by approximating certain monomial functions to obtain the values of the coefficients of the new method. Furthermore, the error form of the proposed method is discussed. Finally, numerical computational results of the proposed method are given and compared with previous methods. Numerical simulations show that the developed method gives a better approximate solution.

Keywords: midpoint rule, Riemann-Stieltjes integral; error term

1. Pendahuluan

Integral Riemann-Stieltjes adalah generalisasi dari integral Riemann yang dikemukakan pertama kali oleh Thomas Joannnes Stieltjes (1856-1894) [2, h. 391]. Integral ini melibatkan dua fungsi, yaitu fungsi bernilai real f dan fungsi monoton naik g yang merupakan integrator dari fungsi f, masing-masing terdefinisi pada interval tertutup $[a, b]$ yang dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)dg(x). \tag{1}$$

2000 Mathematics Subject Classification: 26B15

Received: 2023-02-14, Accepted: 2023-05-22, Published: 2023-06-01

Aturan kuadratur banyak dikembangkan untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes dengan tujuan untuk mendapatkan ketelitian yang lebih tinggi. Mercer [9] mengembangkan aturan trapesium untuk integral Riemann-Stieltjes yang menghasilkan pertidaksamaan Hadamards pada integral secara umum. Kemudian Mercer [10] juga memodifikasi aturan titik tengah dan simpson $\frac{1}{3}$ untuk integral Riemann-Stieltjes dengan menggunakan konsep kecembungan relatif. Memon *et al.* [4, 5] juga mengusulkan skema kuadratur berbasis turunan dan bebas turunan yang efisien untuk integral Riemann-Stieltjes dengan verifikasi numerik. Selain itu Memon *et al.* [6, 7, 8] memodifikasi aturan simpson $\frac{1}{3}$ yang memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi),$$

dengan menambahkan nilai turunan rata-rata harmonik (SM), centroidal (SC), dan heronian (SH) untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes sehingga diperoleh formula baru berturut-turut sebagai berikut

$$\begin{aligned} SM &= \left(\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g(a)\right) f(a) \\ &\quad + \left(\frac{4}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + \left(g(b) - \frac{3}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f(b) \\ &\quad + \Bigg(\frac{-(b-a)^2(3a+5b)}{96}\int_a^b g(t)dt + \frac{17b^2-10ab-7a^2}{48}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt \\ &\quad - b\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt + \int_a^b\int_a^t\int_a^z\int_a^y g(x)dxdydzdt\Bigg) f^{(4)}\left(\frac{2ab}{a+b}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} SC &= \left(\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g(a)\right) f(a) \\ &\quad + \left(\frac{4}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + \left(g(b) - \frac{3}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f(b) \\ &\quad + \Bigg(\frac{-(b-a)^2(3a+5b)}{96}\int_a^b g(t)dt \\ &\quad + \frac{17b^2-10ab-7a^2}{48}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - b\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt \\ &\quad + \int_a^b\int_a^t\int_a^z\int_a^y g(x)dxdydzdt\Bigg) f^{(4)}\left(\frac{2\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
SH = & \left(\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g(a)\right) f(a) \\
& + \left(\frac{4}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& + \left(g(b) - \frac{3}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) f(b) \\
& + \Bigg(\frac{-(b-a)^2(3a+5b)}{96}\int_a^b g(t)dt + \frac{17b^2-10ab-7a^2}{48}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt \\
& - b\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt + \int_a^b\int_a^t\int_a^z\int_a^y g(x)dxdydzdt\Bigg) f^{(4)}\left(\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Selanjutnya Zhao dan Zhang [11] memodifikasi aturan trapesium untuk integral Riemann-Stieltjes dengan menggunakan nilai-nilai turunan pada titik ujung interval integrasi. Aturan trapesium komposit juga dikembangkan oleh Zhao *et al.* [13] untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Selain itu, Zhao dan Zhang [12] juga telah menurunkan aturan trapesium untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Aturan ini memiliki ketelitian 3, tetapi *error* yang dihasilkan masih cukup besar. Menurut Antia [1, h.174] aturan titik tengah *double* adalah aturan yang lebih akurat daripada aturan titik tengah dan aturan trapesium karena mempartisi interval integrasi dari a ke b menjadi dua kali pada titik tengah setiap interval. Oleh karena itu memperoleh solusi hampiran yang lebih akurat, penulis menurunkan aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Kemudian dilanjutkan dengan menententukan bentuk *error* dari metode tersebut. Pada bagian akhir dilakukan komputasi numerik untuk mengetahui keakuratan metode yang diusulkan.

2. Metode Penelitian

Zhao dan Zhang [12] menurunkan aturan trapesium dengan tujuan untuk mendapatkan solusi hampiran yang mendekati solusi eksak. Aturan trapesium memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi). \tag{5}$$

Aturan trapesium pada persamaan (5) diturunkan dengan mengaproksimasi beberapa fungsi monomial sehingga diperoleh aturan trapesium untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Bentuk umum aturan trapesium untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dg(t) \approx TZ = & \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g(a)\right) f(a) \\
& + \left(g(b) - \frac{1}{b-a}\right) f(b) \\
& + \left(\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt\right) f''(c),
\end{aligned} \tag{6}
$$

dengan

$$c = \frac{\left(-2b^2+a^2-ab\right)\int_a^b g(t)dt + 6b\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - 6\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt}{6\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - 3(b-a)\int_a^b g(t)dt}.$$

Prosedur yang sama dilakukan oleh penulis untuk menurunkan aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Selanjutnya bentuk *error* aturan trapesium untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes diperoleh dengan menggunakan konsep ketelitian dari selisih antara nilai eksak dan rumus kuadratur untuk fungsi monomial dengan derajat tertentu. Kemudian teknik yang sama diaplikasikan untuk memperoleh bentuk *error* aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Simulasi numerik dilakukan untuk menunjukkan keunggulan dari metode yang diusulkan.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas penurunan aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Selanjutnya ditentukan bentuk *error* dari aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. Pada bagian akhir dibandingkan hasil simulasi numerik dari metode yang diusulkan dengan metode-metode yang sudah ada sebelumnya.

3.1. Aturan Titik Tengah *Double* Untuk Mengaproksimasi Integral Riemann-Stieltjes.

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$, didefinisikan titik $x_0 = \frac{a+b}{2}$ maka pendekatan dengan aturan titik tengah untuk mengaproksimasi integral $\int_a^b f(x)dx$ adalah

$$M(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

Untuk mendapatkan solusi aproksimasi yang lebih akurat, aturan titik tengah dimodifikasi menjadi aturan titik tengah komposit. Aturan titik tengah komposit adalah gabungan dari n subinterval pada aturan titik tengah untuk mengaproksimasi integral tentu. Menurut Burden [3, hal. 148] bentuk umum aturan titik tengah komposit adalah

$$M_n(f) = 2h\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j}) + \frac{(b-a)h^2}{6}f''(\xi), \tag{7}$$

dengan $x_j = a + (j+1)h$ untuk $j = -1, 0, \ldots, n+1$.

Bentuk umum aturan titik tengah *double* diperoleh ketika $n = 2$ pada persamaan (7) sebagai berikut

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{(b-a)^3}{96}f''(\xi), \quad \xi \in [a, b], \tag{8}$$

dengan $x_0 = a+\frac{1}{4}(b-a)$ dan $x_1 = a+\frac{3}{4}(b-a)$. Aturan titik tengah *double* diapproksimasi untuk fungsi monomial tertentu dan menghasilkan beberapa sistem persamaan yang diselesaikan sehingga diperoleh aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes.

Teorema 3.1. *Misalkan $f'(t)$ dan $g(t)$ kontinu pada interval $[a, b]$ dan $g(t)$ fungsi naik di titik interval $[a, b]$. Aturan titik tengah double untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes (MD) adalah*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dg(t) = &\left(\frac{-1}{2}g(b) - \frac{3}{2}g(a) + \frac{2}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)f(a)\\ &+\left(\frac{3}{2}g(b) + \frac{1}{2}g(a) - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt\right)f(b)\\ &+\left(\frac{3\,(b-a)^2}{32}\left(g(b)-g(a)\right) - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right)f''(c),\end{aligned} \tag{9}$$

dengan

$$c = \frac{g(b)\left(\frac{3(b-a)^2(a+2b)}{16}\right) - g(a)\left(\frac{3(b-a)^2(2a+b)}{16}\right)}{r}$$
$$-\frac{\left[\frac{1}{16}(b-a)(35b+13a)\right]\int_a^b g(t)dt - 6b\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt + 6\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt}{r},$$

dengan

$$r = 6\left[\frac{3(b-a)^2}{32}(g(b)-g(a)) - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right].$$

Bukti. Aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes diperoleh dengan menurunkan persamaan (8) yang dinyatakan sebagai berikut

$$\int_a^b f(t)dg(t) \approx a_0 f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + a_1 f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + c_0 f''(c). \tag{10}$$

Kemudian tentukan nilai a_0, a_1, c_0, dan c, sehingga integral di persamaan (10) eksak untuk $f(t) = 1, t, t^2, t^3$. Hasil dari integral persamaan (10) terhadap fungsi-fungsi monomial $f(t)$ adalah sebagai berikut

$$\int_a^b 1dg(t) = a_0 + a_1, \tag{11}$$
$$\int_a^b tdg(t) = a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right) + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right), \tag{12}$$
$$\int_a^b t^2dg(t) = a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2 + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 + 2c_0, \tag{13}$$
$$\int_a^b t^3dg(t) = a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3 + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3 + 6c_0c. \tag{14}$$

Formula integral Riemann-Stieltjes diterapkan ke ruas kiri dari persamaan (11)-(14) sehingga diperoleh

$$a_0 + a_1 = g(b) - g(a), \tag{15}$$
$$a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right) + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right) = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(t)dt, \tag{16}$$
$$a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2 + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 + 2c_0 = b^2g(b) - a^2g(a) - 2b\int_a^b g(t)dt + 2\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt, \tag{17}$$
$$a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3 + a_1\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3 + 6c_0c = b^3g(b) - a^3g(a) - 3b^2\int_a^b g(t)dt + 6b\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - 6\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt. \tag{18}$$

Nilai a_0, a_1, c_0, c diperoleh dengan cara menyelesaikan sistem persamaaan (15)-(18). Dari persamaan (15) didapat persamaan berikut

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= g(b) - g(a) \\ a_0 &= g(b) - g(a) - a_1 \end{aligned} \tag{19}$$

Kemudian dari persamaan (16) diperoleh persamaan berikut

$$a_1 = \frac{bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(t)dt - a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)}{\left(\frac{a+3b}{4}\right)} \tag{20}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (19) ke persamaan (20) diperoleh nilai a_0 dan a_1. Prosedur ini dilakukan berulang dengan menggunakan metode gabungan untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Prosedur ini menghasilkan nilai a_0, a_1, c_0, c sebagai berikut

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{-1}{2}g(b) - \frac{3}{2}g(a) + \frac{2}{b-a}\int_a^b g(t)dt,\\
a_1 &= \frac{3}{2}g(b) + \frac{1}{2}g(a) - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt,\\
c_0 &= \frac{3(b-a)^2}{32}(g(b)-g(a)) - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt,\\
c &= \frac{g(b)\left(\frac{3(b-a)^2(a+2b)}{16}\right) - g(a)\left(\frac{3(b-a)^2(2a+b)}{16}\right)}{6\left[\frac{3(b-a)^2}{32}(g(b)-g(a)) - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right]}\\
&\quad - \frac{\left[\frac{1}{16}(b-a)(35b+13a)\right]\int_a^b g(t)dt - 6b\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt + 6\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt}{6\left[\frac{3(b-a)^2}{32}(g(b)-g(a)) - \frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right]}.
\end{aligned}$$

Kemudian koefisien-koefisien yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan (10), maka Teorema 3.1 terbukti. □

Persamaan (9) diverifikasi untuk $f(t) = t^4$ yang memiliki solusi eksak sebagai berikut

$$\int_a^b t^4 dg(t) = b^4 g(b) - a^4 g(a) - 4\left(\int_a^b t^3 g(t)dt\right).$$

Solusi yang diperoleh dengan menggunakan persamaan (9) yaitu

$$\begin{aligned}
MD &= \frac{\left(\frac{-g(b)-3g(a)}{2} + \frac{2\int_a^b g(t)dt}{b-a}\right)\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4 + \left(\frac{3g(b)+g(a)}{2} - \frac{2\int_a^b g(t)dt}{b-a}\right)\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4}{s}\\
&\quad + \frac{\frac{1}{3}\left[\frac{3}{16}g(b)(b-a)^2(a+2b) - \frac{3}{16}g(a)(b-a)^2(2a+b) - \frac{1}{16(b-a)(35b+13a)\left(\int_a^b g(t)dt\right)}\right.}{s}\\
&\quad + \frac{\left.6b\left(\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right) - 6\left(\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt\right)\right]^2}{s}
\end{aligned} \tag{21}$$

dengan

$$s = \frac{3}{32}(b-a)^2(g(b)-g(a)) - \frac{1}{2}(b-a)\int_a^b g(t)dt + \int_a^b\int_a^t g(x)dxdt$$

Dari persamaan (21) terlihat solusi yang diperoleh tidak eksak untuk $f(t) = t^4$. Oleh karena itu, ketelitian dari metode ini adalah 3.

3.2. Bentuk *Error* Aturan Titik Tengah *double* Untuk Mengaproksimasi Integral Riemann-Stieltjes.

Pada bagian ini diberikan bentuk *error* aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes. *Error* aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes diperoleh dari selisih antara formula kuadratur untuk monomial $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$ dan nilai eksak

$$\frac{1}{(p+1)!}\int_a^b x^{p+1}dx = \frac{b^{p+2}-a^{p+2}}{(p+2)!},$$

dengan p adalah ketelitian dari formula kuadratur.

Teorema 3.2. *Misalkan $f'(t)$ dan $g(t)$ kontinu pada interval $[a,b]$ dan $g(t)$ fungsi naik di interval $[a,b]$. Bentuk error dari aturan titik tengah double untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes adalah*

$$\begin{aligned} R[f] &= \Bigg[\left(\frac{45b^4+12a^3b-18a^2b^2-52ab^3+13a^4-96(b-a)^2c^2}{2048}\right)g(b) \\ &\quad -\left(\frac{377a^4+156a^3b+54a^2b^2-36ab^3-39b^4+96(b-a)^2c^2}{2048}\right)g(a) \\ &\quad +\left(\frac{5a^3+11a^2b+11ab^2-27b^3-48(b-a)c^2}{192}\right)\int_a^b g(t)dt \\ &\quad +\frac{2b^2-ac^2}{2a}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - b\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt \\ &\quad +\int_a^b\int_a^t\int_a^z\int_a^y g(x)dxdydzdt\Bigg] f^{(4)}(\xi)\, g^{'}(\eta). \end{aligned} \tag{22}$$

Bukti. *Error* pada persamaan (22) diperoleh dengan menggunakan monomial berorde 4 yaitu

$$f(t) = \frac{t^4}{4!}. \tag{23}$$

Persamaan (23) diubah ke dalam bentuk intergral Riemann-Stieltjes sehinga diperoleh

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \frac{1}{4!}\int_a^b t^4 dg(t). \tag{24}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (24) diselesaikan dengan menggunakan integral parsial. Misalkan

$$\begin{aligned} u &= t^4, \\ dv &= g'(t), \\ du &= 4t^3, \\ v &= g(t), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{4!}\int_a^b t^4 g^{'}(t)dt = \frac{1}{24}\left(t^4 g(t)\Big|_a^b - \int_a^b 4t^3 g(t)dt\right),$$

atau

$$\frac{1}{4!}\int_a^b t^4 g^{'}(t)dt = \frac{1}{24}\left(b^4 g(b) - a^4 g(a)\right) - \int_a^b 4t^3 g(t)dt. \tag{25}$$

Selanjutnya untuk menghitung $\int_a^b t^3 g(t)$ pada persamaan (25) digunakan juga integral parsial sehingga didapat

$$\int_a^b g(t)dt = t^3\int_a^b g(x)\Big|_a^b - \int_a^b\int_a^t 3t^2 dxdt,$$

atau

$$\int_a^b t^3 dt = b^3 \int_a^b g(t)dt - 3\int_a^b \int_a^t t^2 g(x)dxdt. \tag{26}$$

Kemudian untuk menghitung $\int_a^b \int_a^t t^2 g(x)dxdt$ pada persamaan (26) dilakukan dengan cara yang sama yaitu dengan integral parsial, sehingga diperoleh

$$\int_a^b \int_a^t t^2 g(x)dxdt = t^2 \int_a^t \int_a^y g(x)dxdy\bigg|_a^b - \int_a^b \int_a^t \int_a^y 2tg(x)dxdydt,$$

atau

$$\int_a^b \int_a^t t^2 g(x)dxdt = b^2 \int_a^b \int_a^t g(x)dxdt - 2\int_a^b \int_a^t \int_a^y tg(x)dxdydt. \tag{27}$$

Integral lipat tiga $\int_a^b \int_a^t \int_a^y tg(x)dxdydt$ pada persamaan (27) dihitung dengan integral parsial. Kemudian diperoleh persamaan berikut yaitu

$$\int_a^b \int_a^t \int_a^y tg(x)dxdydt = t\int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdzdy\bigg|_a^b - \int_a^b \int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdydzdt,$$

atau

$$\int_a^b \int_a^t \int_a^y tg(x)dxdydt = b\int_a^b \int_a^t \int_a^y g(x)dxdydt - \int_a^b \int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdydzdt. \tag{28}$$

Persamaan (28) disubstitusikan ke persamaan (27) diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^t t^2 g(x)dxdt &= b^2 \int_a^b \int_a^t g(x)dxdt - 2b\int_a^b \int_a^t \int_a^y g(x)dxdydt \\ &\quad +2\int_a^b \int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdydzdt. \end{aligned} \tag{29}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (29) ke persamaan (26) didapat

$$\begin{aligned}\int_a^b t^3 g(t)dt &= b^3 \int_a^b g(t)dt - 3b^2 \int_a^b \int_a^t g(x)dxdt \\ &\quad +6b\int_a^b \int_A^t \int_a^y g(x)dxdydt \\ &\quad -6\int_a^b \int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdydzdt. \end{aligned} \tag{30}$$

Persamaan (30) disubstitusikan ke persamaan (25) sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\int_a^b t^4 dg(t)dt &= \frac{1}{24}\left[b^4 g(b) - a^4 g(a)\right] - \frac{b^3}{6}\int_a^b g(t)dt \\ &\quad +\frac{b^2}{a}\int_a^b \int_a^t g(x)dxdt - b\int_a^b \int_a^t \int_a^y g(x)dxdydt \\ &\quad +\int_a^b \int_a^t \int_a^z \int_a^y g(x)dxdydzdt. \end{aligned} \tag{31}$$

Dari Teorema 3.1 diperoleh solusi hampirannya adalah

$$
\begin{aligned}
MD \;=\; & \left[\frac{-1}{2}g(b)-\frac{3}{2}g(a)+\frac{2}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right]\left[\frac{1}{24}\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4\right] \\
& +\left[\frac{3}{2}g(b)+\frac{1}{2}g(a)-\frac{2}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt\right]\left[\frac{1}{24}\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4\right] \\
& +\left[\frac{3\,(b-a)^2}{32}\,(g(b)-g(a))-\frac{b-a}{2}\int_a^b g(t)dt+\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt\right]\frac{c^2}{2}. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Persamaan (32) disederhanakan sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
MD \;=\; & \left(\frac{-81a^4-108a^3b-54a^2b^2-12ab^3-b^4}{12288}\right)g(b) \\
& -\left(\frac{243a^4+324a^3b+162a^2b^2+36ab^3+3b^4}{12288}\right)g(a) \\
& +\left(\frac{162a^4+216a^3b+108a^2b^2+24ab^3+2b^4}{(b-a)\,6144}\right)\int_a^b g(t)dt \\
& +\left(\frac{3a^4+36a^3b+162a^2b^2+324ab^3+243b^4}{12288}\right)g(b) \\
& +\left(\frac{a^4+12a^3b+54a^2b^2+108ab^3+81b^4}{12288}\right)g(a) \\
& -\left(\frac{2a^4+24a^3b+108a^2b^2+216ab^3+162b^4}{(b-a)\,6144}\right)\int_a^b g(t)dt \\
& +\left(\frac{3\,(b-a)^2\,c^2}{64}\right)g(b)-\left(\frac{3\,(b-a)^2\,c^2}{64}\right)g(a)-\left(\frac{(b-a)\,c^2}{4}\right)\int_a^b g(t)dt \\
& +\frac{c^2}{2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt \\
MD \;=\; & \left(\frac{-39a^4-36a^3b+54a^2b^2+156ab^3+121b^4-288\,(b-a)^2\,c^2}{6144}\right)g(b) \\
& -\left(\frac{121a^4-156a^3b+54a^2b^2-36ab^3-39b^4+288\,(b-a)^2\,c^2}{6144}\right)g(a) \\
& +\left(\frac{5b^3-11ab^2+11a^2b-5a^3-48\,(b-a)^2\,c^2}{192}\right)\int_a^b g(t)dt \\
& +\frac{c^2}{2}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Bentuk *error* diperoleh dengan mengurangkan solusi eksak dengan solusi hampiran sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
R[f] &= \frac{1}{4!}\int_a^b t^4 dg(t) - MD \\
R[f] &= \Bigg[\left(\frac{45b^4+12a^3b-18a^2b^2-52ab^3+13a^4-96(b-a)^2c^2}{2048}\right)g(b) \\
&\quad -\left(\frac{377a^4+156a^3b+54a^2b^2-36ab^3-39b^4+96(b-a)^2c^2}{2048}\right)g(a) \\
&\quad +\left(\frac{5a^3+11a^2b+11ab^2-27b^3-48(b-a)c^2}{192}\right)\int_a^b g(t)dt \\
&\quad +\frac{2b^2-ac^2}{2a}\int_a^b\int_a^t g(x)dxdt - b\int_a^b\int_a^t\int_a^y g(x)dxdydt \\
&\quad +\int_a^b\int_a^t\int_a^z\int_a^y g(x)dxdydzdt\Bigg] f^{(4)}(\xi)\, g'(\eta).
\end{aligned}
$$

□

3.3. **Hasil Komputasi Numerik.**

Pada bagian ini dilakukan komputasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan hasil komputasi dari MD dengan beberapa metode yang sudah ada sebelumnya. Fungsi yang digunakan dalam komputasi numerik ini adalah $\int_{3,5}^{4,5}\sin 5x d(\cos x)$, $\int_5^6 \sin x d\left(x^3\right)$dan $\int_5^6 e^x d(\sin x)$. Hasil komputasi disajikan pada Tabel 1 dengan *error* diperoleh dari selisih antara solusi eksak dengan solusi numerik.

Tabel 1. Perbandingan hasil komputasi metode MD, TZ, SC,SH dan SM

Metode	Integral		
	$\int_{3,5}^{4,5}\sin 5x d(\cos x)$	$\int_5^6 \sin x d\left(x^3\right)$	$\int_5^6 e^x d(\sin x)$
	Error	*Error*	*Error*
MD	0.097350550833	0.021962856150	0.044004164600
TZ	1.794807211081	10.41799826475	14.68593479070
SC	2.190068939462	0.147735074140	1.044730321100
SH	2.046834691319	0.147735074140	1.044730321100
SM	1.696017817970	0.155143462410	0.994861123700

Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa MD menghasilkan *error* lebih kecil untuk ketiga contoh dibandingkan dengan *error* TZ, SC, SH, dan SM. Misalnya untuk $\int_{3,5}^{4,5}\sin 5x d(\cos x)$, TZ, SC, SH, dan SM berturut-turut menghasilkan *error* sebesar 1.794807211081, 2.190068939462, 2.046834691319, dan 1.696017817970, sedangkan MD menghasilkan *error* yang lebih kecil yaitu 0.097350550833. Hal ini juga berlaku untuk $\int_5^6 \sin x d\left(x^3\right)$dan $\int_5^6 e^x d(\sin x)$. Ini menunjukkan MD memiliki keakuratan yang baik. MD memiliki akurasi yang lebih baik karena metode ini mengevaluasi fungsi f pada titik tengah interval yang telah dipartisi menjadi dua kali lebih kecil.

4. Simpulan

Aturan titik tengah *double* untuk mengaproksimasi integral Riemann-Stieltjes diperoleh dari penurunan aturan titik tengah *double*. Aturan ini memiliki ketelitian 3. Bentuk *error* aturan titik tengah *double* untuk integral Riemann-Stieltjes diperoleh dari selisih antara nilai eksak dan rumus kuadratur untuk monomial pada derajat tertentu. Hasil komputasi numerik menunjukkan bahwa aturan titik tengah *double* untuk integral Riemann-Stieltjes memiliki keakuratan yang baik dibandingkan dengan metode yang lain. Jadi secara keseluruhan dapat disimpulkan aturan titik tengah *double* untuk integral Riemann-Stieltjes dapat dijadikan salah satu metode alternatif dalam menghitung integral Riemann-Stieltjes.

Daftar Pustaka

[1] Antia, M.H., *Numerical Methods for Scientists*, Tata McGraw Hill, Delhi, 1995.

[2] Bartle, R.G., *A Modern Theory of Integration*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.

[3] Burden, R.L., Faires, J.D., *Numerical Analysis, Ninth Ed.*, Brooks Cole, Boston, 2011.

[4] Memon, K., Shaikh, M.M., Chandio, M.S., Shaikh, A.W., 2020, A Modified Derivative Based Scheme for the Riemann-Stieltjes Integral, *Journal-SURJ* (*Science Series*), Volume 52, Issue 1, Pages 37-40.

[5] Memon, K., Shaikh, M.M., Chandio, M.S., Shaikh, A.W.,2020, A new and efficient Simpsons $\frac{1}{3}$-type quadrature rule for Riemann-Stieltjes integral, *Journal Of Mechanics Of Continua And Mathematical Sciences*, Volume 15, Issue 11, Pages 132-148.

[6] Memon, K., Shaikh, M.M., Chandio, M.S., Shaikh, A.W., 2021, A New Harmonic Mean Derivative-Based Simpson's $\frac{1}{3}$-Type Scheme For Riemann-Stieljes Integral, *Journal Of Mechanics Of Continua And Mathematical Sciences*, Volume 16, Issue 4, Pages 28-46.

[7] Memon, K., Shaikh, M.M., Chandio, M.S., Shaikh, A.W., 2021, Efficient Derivative-Based Simpson's $\frac{1}{3}$-Type Scheme Using Centroidal Mean For Riemann-Stieljes Integral, *Journal Of Mechanics Of Continua And Mathematical Sciences*, Volume 16, Issue 3, Pages 69-85.

[8] Memon, K., Shaikh, M.M., Chandio, M.S., Shaikh, A.W.,2021, Heronian Mean Derivative-Based Simpson's-Type Scheme For Riemann-Stieljes Integral, *Journal Of Mechanics Of Continua And Mathematical Sciences*, Volume 16, Issue 3, Pages 53-68.

[9] Mercer, P.R., 2008, Hadamards inequality and trapezoid rules for the Riemann-Stieltjes integral,*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 344, Issue 2, 15 August 2008, Pages 921-926.

[10] Mercer, P.R., 2012, Relative convexity and quadrature rules for the Riemann-Stieltjes integral, *Journal of Mathematical Inequalities*, Volume 6, Issue 1, Pages 65-68.

[11] Zhao, W., Zhang, Z., 2014, Derivative-based trapezoid rule for the Riemann-Stieltjes integral, *Mathematical Problem in Engineering*, Volume 2014.

[12] Zhao, W., and Zhang, Z., 2014, Midpoint derivative-based trapezoid rule for the Riemann-Stieltjes integral, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 33, Pages 369-376.

[13] Zhao, W., Zhang, Z., Ye, Z., 2015, Composite trapezoid rule for the Riemann-Stieltjes integral and its Richardson extrapolation formula, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 35, Pages 311-318.