Jurnal Matematika Integratif
Volume 10 No 1, April 2014, hal 63-67

ISSN 1412-6184

Tinjauan Terhadap Grup *Cogenerated* secara Hingga

Edi Kurniadi
Program Studi Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
Jalan Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor 45363
email: edi.kurniadi@unpad.ac.id

ABSTRAK

Dualitas antara grup bebas dan grup *divisible* memotivasi munculnya konsep dual terhadap grup yang dibangun secara hingga. Suatu sistem L dari unsur-unsur grup A dikatakan sistem *cogenerator* jika untuk setiap grup B, setiap homomorfisma f dari A ke B sedemikian sehingga $L \cap \operatorname{Ker} f$ adalah himpunan hampa atau 0 harus suatu monomorfisma. Dalam makalah ini dilakukan suatu tinjauan terhadap sistem hingga L dari *cogenerator* yang disebut dengan grup *cogenerated* secara hingga.

Kata kunci : dual grup, *cogenerator*, grup dibangun secara hingga, grup *cogenarated* secara hingga

ABSTRACT

The duality between free and divisible groups motivate a concept dual to finitely generated groups. A system L of elements of a group A is called a system cogenerators if for every group B, every homomorphism f from A into B such that $\mathbf{L} \cap \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{f}$ *equal to empty or 0 must be a monomorphism . In this paper we review a finite system cogenerators that is called cogenerated finitely group.*

Keywords: *dual group, cogenerators, finitely generated group, and finitely cogenerated group*

1. Pendahuluan

Konsep dual dapat digunakan untuk mempelajari teori dasar *coalgebra* dalam *Hopf Algebras* seperti dalam tulisan Sweedler [5] dan Sorin [6]. *Coalgebra* muncul sebagai bentuk dual dari *algebra.* Demikian juga grup siklik yang dikarakterisasi dengan homomorfisma $\varphi: B \to A$ dengan $a \in \operatorname{Im} \varphi$ epik dapat didualkan sehingga muncul istilah grup *cocyclic*.

Istilah grup *cogenerated* hingga (*finitely cogenerated*) merupakan konsep dasar dualitas grup yang dibangun secara hingga (*finitely generated*). Hasil tersebut analog dengan dualitas antara kondisi maksimum dan minimum serta keekivalenan bahwa grup yang dibangun secara hingga berarti jumlah langsung sebanyak hingga grup-grup siklik dan berarti pula subgrup-subgrup yang memenuhi kondisi maksimum.

Termotivasi oleh konsep-konsep di atas, penulis mengkaji konsep yang berkaitan dengan perluasan *essential* grup hingga, dan jumlah langsung sebanyak hingga grup-grup *cocyclic* sebagai keekivalenan dengan grup *cogenerated* hingga (*finitely cogenerated*) [3].

2. Landasan Teori

Tipe-Tipe Grup

Pembahasan konteks aljabar topologi sebagaimana telah dikemukan oleh Massey [4] dipaparkan pada subseksi ini. Misalkan A grup dan S himpunan bagian A, simbol $\langle S \rangle$ menotasikan subgrup dari A yang dibangun oleh S yaitu irisan semua subgrup dari A yang memuat S . Jika S memuat unsur-unsur $a_i (i \in I)$, tuliskan $\langle S \rangle = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle_{i \in I}$. Grup yang dibangun secara hingga adalah grup yang mempunyai sistem pembangun hingga. Grup $\langle a \rangle$ adalah grup siklik yang dibangun oleh unsur a G.

Dari [1] diperoleh sifat bahwa order suatu grup siklik sama dengan order pembangunnya yaitu $\left|\langle a\rangle\right| = |a|$.

Selanjutnya jika setiap order dari semua unsur di A hingga maka A disebut grup torsi, sebaliknya jika setiap unsur di A berorder tak hingga kecuali 0 maka A dikatakan bebas torsi. Teorema berikut berkaitan dengan grup torsi

Teorema 1. *Himpunan T dari semua unsur berorder hingga dalam grup A adalah subgrup A. T grup torsi dan grup kuosien* A/T *bebas torsi.*

Grup *primary* atau p-grup didefinisikan sebagai grup yang order semua unsurnya pangkat p prim *fixed* dan grup yang memuat semua unsur a di A sedemikian sehingga order a kuadrat bebas bilangan bulat disebut *socle* $S(A)$ dari grup A.

Misalkan $n > 0$, maka terdapat dua subgrup dari A yaitu

a. $nA = \{na | a \in A\}$.

b. $A[n] = \{a | a \in A, na = 0\}$.

Dapat ditunjukkan bahwa keduanya subgrup dari A.

Selanjutnya diberikan $a \in A$, bilangan bulat terbesar nonnegatif r sedemikian sehingga $p^r x = a$ dapat diselesaikan untuk suatu $x \in A$ disebut *p-height* a yang dinotasikan dengan $h_p(a)$. Jika $p^r x = a$ dapat diselesaikan untuk sembarang r maka a disebut *p-height* tak hingga yaitu $h_p(a) = \infty$. Untuk p prim tuliskan $h_p(a)$ dengan notasi $h(a)$. Untuk p-grup diperoleh $S(A) = A[p]$.

Subgrup E dari grup A dikatakan *essential* jika $E \cap B \neq 0$ untuk setiap subgrup B dari A yang nontrivial. Dalam hal ini, A dikatakan perluasan *essential* dari E

Hasil berikut analog dengan yang dikemukakan penulis dalam hasil dan pembahasan.

Teorema 2. *Jika A suatu grup maka kondisi berikut ekivalen*

(i) A dibangun secara hingga

(ii) A jumlah langsung sebanyak hingga grup-grup siklik

(iii) Subgrup A memenuhi kondisi maksimum

Unsur a dari suatu grup A dapat dibagi (*divisible*) oleh bilangan bulat positif n, dinotasikan oleh $n\,|\,a$, jika persamaan

$$nx = a, \quad (a \in A) \tag{1}$$

dapat diselesaikan di A. Ekivalen dengan mengatakan bahwa A memuat suatu elemen b sehingga x=b suatu solusi dari (1).

Berikut adalah beberapa konsekuensi dari konsep divisibilitas di atas

1. Jika x=b suatu solusi dari (1) maka koset $b + A[n]$ adalah himpunan semua solusi-solusi dari (1).
2. Jika A bebas torsi, maka solusi dari (1) unik.
3. Jika $(n,o(a))$=1, maka (1) selalu dapat diselesaikan.
4. Jika A jumlah langsung B dan C yaitu $A = B \oplus C$, maka $n\,|\,a = b + c$ berarti $n\,|\,b$ dan $n\,|\,c$.

Dari konsekuensi di atas diperoleh bahwa suatu grup D dikatakan *divisible* jika $n \mid a$ untuk semua $a \in D$ dan semua bilangan bulat positif n. Contoh grup *divisible* ini adalah grup himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$, grup *quasicyclic* $\mathbb{Z}(p^\infty)$, dan grup faktor $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Cogenerator* Grup *Cocyclic

Suatu grup siklik dapat dikarakterisasi sebagai grup A yang memuat suatu unsur a sedemikian sehingga sembarang homomorfisma $\varphi: B \to A$ dengan $a \in \operatorname{Im}\varphi$ epik. Dengan mendualkan konsep tersebut, diperoleh grup *cocyclic* C jika ada suatu unsur $c \in C$ sedemikian sehingga $\varphi: C \to B$ dan $c \notin \operatorname{Ker}\varphi$ mengakibatkan φ monik. Dalam hal ini c disebut *cogenerator* dari C. Maka diperoleh bahwa setiap subgrup adalah kernel dari suatu homomorfisma. Oleh karena itu, *cogenerator* c tentunya termuat dalam subgrup subgrup C yang tak trivial, yaitu subgrup terkecil dari C yang nontrivial. Dengan demikian diperoleh sifat berikut

Sifat 1. *Jika suatu grup mempunyai subgrup terkecil yang tak trivial maka grup tersebut adalah cocyclic dan sembarang unsur tak nolnya dalam subgrup terkecil tersebut adalah cogenerator.*

Sebagai ilustrasi grup siklik $\langle a \rangle$ dengan order pangkat prim p^k adalah grup *cocyclic* dengan *cogenerator*nya adalah semua unsur dari $\langle a \rangle$ yang berorder p. Misalkan $G = \langle a \rangle$ grup siklik berorder 4, maka diperoleh hubungan bahwa $e < \langle a^2 \rangle < \langle a \rangle$ yang menunjukkan $\langle a^2 \rangle$ subgrup terkecil nontrivial dari $\langle a \rangle$. Oleh karena itu, $G = \langle a \rangle$ grup *cocyclic* dengan *cogenerator*nya a^2.

Tipe lain dari grup *cocyclic* adalah grup *quasicyclic* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ dengan p bilangan prim. Grup ini diperoleh dari akar pangkat kompleks ke p^n dari 1.

Berikut adalah hasil yang cukup penting berkaitan dengan grup *cocyclic*

Teorema 3. *Grup C dikatakan cocyclic berarti* $C \cong \mathbb{Z}(p^k)$ *dengan* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *atau* ∞.

3. Metode Penelitian

Metode penelitian dalam makalah ini berupa kajian terhadap jurnal matematika khususnya dalam bidang aljabar. Pertama selidiki sifat-sifat yang berlaku pada grup yang dibangun secara hingga. Selanjutnya dilakukan pengembangan untuk dual grup yang dibangun secara hingga. Dual yang dimaksud di sini adalah grup *cogenerated* hingga.

4. Hasil dan Pembahasan

Dalam Fuchs [3] suatu sistem L dari unsur-unsur grup A dikatakan sistem *cogenerator* jika untuk setiap grup B, setiap homomorfisma f dari A ke B sedemikian sehingga $L \cap \operatorname{Ker} f$ adalah himpunan hampa atau 0 harus suatu monomorfisma. Kondisi tersebut ekivalen dengan mengatakan bahwa setiap subgrup tak nol dari A memuat unsur tak nol dari L. Subgrup yang dibangun oleh L, $\langle L \rangle$, merupakan subgrup *essential* dari A. Subgrup essential adalah suatu sistem *cogenerators*.

Definisi 1 *Grup yang cogenerated secara hingga adalah grup yang mempunyai sistem cogenerator hingga.*

Pandang grup *cocyclic* $G = \langle a \rangle$ berorder 8. Perhatikan bahwa $\langle a^4 \rangle$ subgrup terkecil dari G

Sehingga a^4 *cogenerator* dari *G*. Selain itu, G adalah perluasan *essential* dari $\langle a^4 \rangle$. Jadi, $\langle a^4 \rangle$ sistem *cogenerator* hingga dari *G*. Oleh karenanya, *G* grup *cogenerated* secara hingga.

Secara umum diperoleh rantai subgrup dari grup *cocyclic* dengan order pangkat prim p^k yaitu

$$0 < \langle a^{p^{k-1}} \rangle < \langle a^{p-2} \rangle < \ldots < \langle a^p \rangle < \langle a \rangle$$

Dalam hal ini dapat dipilih sistem *cogenerator* $L = \langle a^{p^{k-1}} \rangle$ dan *L* hingga sehingga grup tersebut adalah grup *cocyclic* yang *cogenerated* secara hingga.

■

Teorema 2 dalam grup yang dibangun secara hingga analog dengan hasil grup *cogenerated* secara hingga oleh [2] sebagai berikut

Teorema 4. *Untuk suatu grup A kondisi beriku ekivalen*

(i) A cogenerated secara hingga

(ii) A perluasan essential dari suatu grup hingga

(iii) A jumlah langsung sebanyak hingga grup-grup cocyclic

Bukti :

Hanya bagian penting dari Teorema 4 yang akan dibuktikan dan yang medukung pembahasan dalam tulisan ini yaitu $(i) \rightarrow (ii)$ dan $(ii) \rightarrow (iii)$.

$(i) \rightarrow (ii)$ Asumsikan (i) berlaku, akan dibuktikan bahwa *A* perluasan *essential* dari suatu grup hingga. Karena *A* grup yang dibangun secara *cogenerated* maka *A* mempunyai sistem *cogenerator*s hingga, katakanlah *L*. Tidak satu pun unsur-unsur di *A* yang berorder hingga, sebaliknya dapat dipilih subgrup yang nontrivial dengan meniadakan *cogenerator* tak nol di *L* dalam suatu grup siklik yang dibangun oleh suatu unsur berorder tak hingga. Diperoleh bahwa L suatu sistem yang memuat unsur-unsur berorder hingga sedemikian sehingga $\langle L \rangle$ hingga. Jadi, grup A adalah perluasan essential dari grup hingga $\langle L \rangle$. (ii) terbukti.

$(ii) \rightarrow (iii)$. Sekarang asumsikan bahwa (ii) berlaku yaitu *A* perluasan essential dari grup hingga *B*. Hal ini berarti diperoleh *A* grup torsi dengan sebanyak hingga *p*-komponen. Tanpa mengurangi keumuman bukti asumsikan bahwa *A* dan *B* keduanya *p*-grup. Oleh karenanya, $A[p] = B[p]$ hingga. Untuk suatu $a \in A$ yang besifat tetap, persamaan $px = a$ mempunyai tak hingga banyak solusi di *A*. Pernyataan terakhir terjadi karena *A* grup torsi. Selanjutnya jika $h(a) = \infty$ maka *height* dari solusi-solusi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tidak semua hingga, yaitu jika $y \in A$ memenuhi $p^n y = a$, maka $p^{n-1}y$ salahsatu di antara $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Dapat disimpulkan bahwa $a \in A[p]$ dengan *height* tak hingga sedemikian sehingga dapat diperoleh rantai naik untuk mendapatkan subgrup *quasicyclic* dari *A*. Karena gabungan subgrup-subgrup *quasicyclic* dari *A* yaitu *D* bersifat *devisible* berakibat $A = D \oplus C$. Selanjutnya karena $C[p]$ hingga maka *height* maksimal hingga *m* dari unsur-unsurnya sedemikian sehingga $p^{m+1}C = 0$. Jadi, *A* jumlah langsung grup-grup *cocyclic*. (iii) terbukti.

5. Simpulan

Telah diberikan tinjauan ulang terhadap grup *cogenerated* hingga yaitu grup yang mempunyai sistem *cogenerator* hingga. Grup perluasan *essential* adalah contoh grup *cogenerated* hingga dan subgrup terkecilnya memuat semua *cogenerator*nya. Lebih lanjut sifat-sifat grup *cogerated* hingga telah diberikan dalam Teorema 4. Untuk kajian lebih lanjut dapat dikaji apakah grup *cogenerated* secara hingga mengakibatkan subgrup-subgrupnya memenuhi kondisi minimum.

Daftar Pustaka

1. Gallian, 2010, *Contemporary Abstract Algebra,* 7th edition. Matrix Production Inc.
2. Kurosh, A.G, 1932., Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Ann.***106**, 107-113.
3. Laszlo Fuchs., 1970, *Infinite Abelian Groups*. Volume 36-I, Pp 252-274., Academic Press New York and London
4. Massey., 1967., *Algebraic Topology : An introduction,* Springer Verlag, New York.
5. Moss. E. Sweedler, 1969., *Hopf Algebras, W.A.* Benjamin, Inc, New York, 1 – 28.
6. Sorin,D, 2001., *Hopf Algebras An Introduction*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1-55.