Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 18, No.1 (2022), pp. 73–80. doi:10.24198/jmi.v18.n1.36091.73-80.

Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan

Siti Rahmatalia, Asmiati*, Notiragayu

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lampung
Jl. Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung, Indonesia 35145
Email* : asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id

Abstrak
Bilangan kromatik lokasi graf merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik suatu graf. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi graf G. Pada paper ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf split lintasan dan graf barbel split lintasan. Metode yang digunakan untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut adalah dengan menentukan batas atas dan batas bawahnya. Hasil yang diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan dan barbelnya adalah sama yaitu 4.
Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf split lintasan, graf barbel split lintasan.

Abstract
The locating chromatic number of a graph extends the partition dimension and vertex coloring of a graph. The minimum number of locating coloring of graph G is called the locating chromatic number of graph G. This paper will discuss the locating chromatic number of path split graph and barbell path split graph. The method used to obtain the locating chromatic number of the graph is to determine the upper and lower bound. The results obtained are that the path split graph's locating chromatic number and the barbell are the same, namely 4.
Keywords: locating-chromatic number of graph, path split graph, barbell path split graph

1. Pendahuluan

Konsep pewarnaan graf muncul sebagai model dalam menyelesaikan permasalahan pewarnaan peta. Pada tahun 1852, Frederick Guthri (1833-1886), mahasiswa di University College London, mengunjungi professor matematika, Augustus De Morgan (1806-1871), untuk menyampaikan penemuan matematika dari kakak lelakinya, Francis Guthrie (1831-1899). Beliau mendapatkan konjektur empat warna (*The Four Color Conjecture*) yang menyatakan: Semua negara di peta dapat diwarnai dengan menggunakan maksimal empat warna sedemikian sehingga dua negara yang berbatasan mempunyai warna berbeda. Keinginan yang kuat dari para matematikawan untuk menyelesaikan permasalahan empat warna tersebut menginspirasi munculnya konsep pewarnaan daerah, titik, sisi, dan graf planar. Konsep inilah yang digunakan untuk mewarnai graf secara umum.

2000 Mathematics Subject Classification: 05C10
Received: 12-10-2021, Revised: 25-04-2022, Accepted: 09-05-2022.

Bilangan kromatik lokasi graf yang diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [2], pada tahun 2002 merupakan penggabungan dari konsep dimensi partisi graf [3] dan pewarnaan graf. Dimensi partisi graf merupakan pengembangan dari konsep dimensi metrik graf yang pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter [4] pada tahun 1976. Bayak aplikasi yang dapat diterapkan menggunakan konsep dimensi metrik graf diantaranya adalah navigasi robotik [5], optimisasi penempatan sensor kebakaran [6], dan klasifikasi data senyawa kimia [7]. Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan pengelompokan titik berdasarkan warnanya yang disebut kelas-kelas warna dengan syarat setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna berbeda.

Berikut ini diberikan denisi bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk. [2]. Misalkan G graf terhubung dan berhingga. Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap $u,\ v$ bertetangga di G. Partisi $\Pi = C_1, C_2, ..., C_k$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas - kelas warna $C_i, 1 \leq i \leq k$ dari $V(G)$ yang menginduksi pewarnaan titik c. Jarak suatu titi v ke titik x dinotasikan dengan $d(v,x)$ adalah panjang lintasan terpendek dari kedua titik tersebut. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-ordinat terurut $(d(v,C_1), d(v,C_2), ..., d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i) = \min\{d(v,x)|x \ \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di $V(G)$ mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari graf G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Kajian tentang bilangan kromatik lokasi pada suatu graf masih menarik hingga saat ini karena belum terdapatnya suatu teorema yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sebarang graf. Chartrand dkk. [2] telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lengkap, siklus, lintasan, dan pohon. Setahun setelahnya Chartrand dkk. [8] telah mendapatkan graf berorde n berbilangan kromatik lokasi $(n-1)$. Asmiati dkk. [9] telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang. Kemudian Behtoei dkk. [10] berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf kneser. Welyyanti dkk. [11] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf dengan titik dominan. Selanjutnya, Asmiati [12] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf ulat dan kembang api yang tidak seragam. Setahun kemudian, Asmiati [13] memperoleh bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan.

Hal menarik lainnya adalah karakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi tertentu yang telah dikaji oleh Chartrand dkk. [8]. Mereka telah mengkarakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi $(n-1)$ dan mengklasifikasi graf dengan batas atas bilangan kromatik lokasinya adalah $(n-2)$. Selanjunya Asmiati dan Baskoro [14] tahun 2012, telah berhasil mengkarakterisasi graf memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Baskoro dan Asmiati [15] telah menentukan karakterisasi graf pohon berbilangan kromatik lokasi 3. Pada tahun 2017, Asmiati dkk. [16] telah memperoleh karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi 4 atau 5.

Kajian bilangan kromatik lokasi dan variannya juga terus berkembang sampai saat ini. Pada tahun 2018, Asmiati dkk. [17] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel dengan graf pembentuknya adalah graf lengkap atau graf Petersen diperumum. Kemudian Asmiati dkk. [18] juga telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi untuk subdivisi dari graf barbel memuat graf Petersen diperumum. Pada graf origami, Irawan dkk. [19] telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasinya dan menganalisis graf barbelnya. Irawan dkk. [16] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf barbel yang memuat graf origami. Selanjutnya, pada tahun 2021, Asmiati dkk. [20] telah berhasil menganalisis bilangan kromatik lokasi graf shadow lintasan dan graf barbelnya. Prawinasti dkk. [21] telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf split siklus dan Damayanti dkk. [22] untuk bilangan kromatik lokasi dari beberapa modifikasi graf lintasan dengan siklus.

Sejauh penelusuran literatur belum terdapat kajian tentang bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan. Berdasarkan hal tersebut, maka pada paper ini didiskusikan tentang bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan dan graf barbel split lintasan.

Graf split lintasan yang dinotasikan dengan $spl(P_n)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(spl(p_n)) = \{u_i, v_i; 1 \le i \le n\}$, dan himpunan sisi $E(spl(P_n)) = \{u_i n_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\}$. Graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ adalah graf sederhana yang diperoleh dari tiruan graf split lintasan yang dihubungkan oleh suatu jembatan, yaitu sisi $\left(\frac{u_{n+1}}{2} \frac{u\prime_{n+1}}{2}\right)$ untuk n ganjil dan $\left(\frac{u_n}{2} \frac{u\prime_n}{2}\right)$ untuk n genap, dengan himpunan titik tiruan graf splitnya adalah $\{u'_i, v'_i\ ;\ 1 \le i \le n\}$.

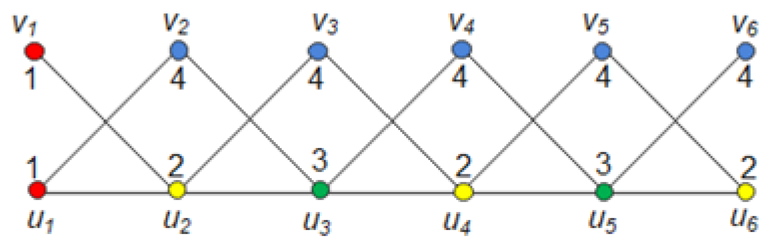
Teorema berikut merupakan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi graf yang telah dibuktikan oleh Chartrand, dkk. [2].

Teorema 1.1 (Chartrand, dkk. [2])**.** *Untuk setiap graf terhubung G berorde $n \ge 3$ memenuhi $3 \le \chi_L(G) \le n$.*

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas bilangan kromatik lokasi pada graf split lintasan yang dinotasikan dengan $spl(P_n)$ dan graf barbel dari graf split lintasan yang dinotasikan dengan $B_{spl(P_n)}$.

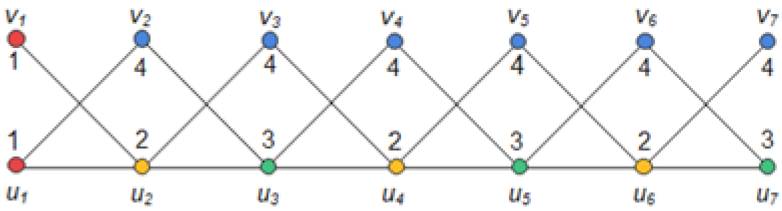
2.1. **Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan.** Pada bagian ini didiskusikan tentang bilangan kromatik lokasi graf split lintasan, namun akan diberikan beberapa contoh penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf split lintasan. Berikut ini diberikan contoh penentuan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_6)$. Pertama, ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan $spl(P_6)$. Karena graf split lintasan $spl(P_6)$ berorde $n \ge 3$, maka berdasarkan Teorema 1.1 membutuhkan sekurang-kurangnya 3 warna. Andaikan c pewarnaan lokasi pada $spl(P_7)$ menggunakan 3 warna. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(u_1) = c(v_1) = 1$ maka, $\{c(u_2), c(v_2)\} = \{2, 3\}$. Akibatnya $c(u_3) = 1$ dan $c_\pi(u_1) = c_\pi(u_3)$, suatu kontradiksi. Oleh karena itu $\chi_L(spl(p_6)) \ge 4$. Selanjutnya, menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_6)$.



Gambar 1. Pewarnaan lokasi minimum $Spl(P_6)$

Misalkan c pewarnaan titik pada graf split lintasan $spl(P_6)$ menggunakan 4 warna dengan kelas-kelas warnanya adalah : $C_1 = \{u_1, v_1\}$, $C_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$, $C_3 = \{u_3, u_5\}$, $C_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Maka diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(u_1) = (0,1,2,1)$; $c_\pi(u_2) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(u_3) = (2,1,0,1)$; $c_\pi(u_4) = (3,0,1,1)$; $c_\pi(u_5) = (4,1,0,1)$; $c_\pi(u_6) = (5,0,1,1)$; $c_\pi(v_1) = (0,1,2,2)$; $c_\pi(v_2) = (1,2,1,0)$; $c_\pi(v_3) = (2,1,2,0)$; $c_\pi(v_4) = (3,2,1,0)$; $c_\pi(v_5) = (4,1,2,0)$; $c_\pi(v_6) = (5,2,1,0)$. Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L(Spl(P_6)) \le 4$. Jadi $\chi_L(Spl(P_6)) = 4$.

Berikut ini diberikan contoh penentuan bilangan kromatik lokasi graf $spl(P_7)$. Karena graf split lintasan $spl(P_7)$ berorde $n \ge 3$, maka berdasarkan Teorema 1.1 membutuhkan sekurang-kurangnya 3 warna. Andaikan c pewarnaan lokasi pada $spl(P_7)$. menggunakan 3 warna. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(u_1) = c(v_1) = 1$ maka, $\{c(u_2), c(v_2)\} = \{2, 3\}$. Akibatnya $c(u_3) = 1$ dan $c_\pi(u_1) = c_\pi(u_3)$, suatu kontradiksi. Oleh karena itu $\chi_L(spl(p_6)) \ge 4$. Selanjutnya, menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_7)$.



GAMBAR 2. Pewarnaan lokasi minimum $Spl(P_7)$

Misalkan c pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan 4 warna dengan kelas-kelas warnanya yaitu: $C_1 = \{u_1, v_1\}$, $C_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$, $C_3 = \{u_3, u_5, u_7\}$, $C_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Maka diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(u_1) = (0, 1, 2, 1)$; $c_\pi(u_2) = (1, 0, 1, 1)$; $c_\pi(u_3) = (2, 1, 0, 1)$; $c_\pi(u_4) = (3, 0, 1, 1)$; $c_\pi(u_5) = (4, 1, 0, 1)$; $c_\pi(u_6) = (5, 0, 1, 1)$; $c_\pi(u_7) = (6, 1, 0, 1)$; $c_\pi(v_1) = (0, 1, 2, 2)$; $c_\pi(v_2) = (1, 2, 1, 0)$; $c_\pi(v_3) = (2, 1, 2, 0)$; $c_\pi(v_4) = (3, 2, 1, 0)$; $c_\pi(v_5) = (4, 1, 2, 0)$; $c_\pi(v_6) = (5, 2, 1, 0)$, dan $c_\pi(v_7) = (6, 1, 2, 0)$. Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L(Spl(P_7)) \leq 4$. Jadi $\chi_L(Spl(P_7)) = 4$.

Teorema 2.1. *Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah 4.*

BUKTI. Pertama-tama ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf $spl(P_n)$. Berdasarkan Teorema 1.1 $\chi_L(spl(P_n)) \geq 3$. Andaikan c pewarnaan lokasi pada $spl(P_n)$ menggunakan 3 warna. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(u_1) = c(v_1) = 1$ maka, $\{c(u_2), c(v_2)\} = \{2, 3\}$. Akibatnya $c(u_3) = 1$ dan $c_\pi(u_1) = c_\pi(u_3)$, suatu kontradiksi. Jadi, $\chi_L(spl(P_n)) \geq 4$.
Selanjutnya, untuk menetukan batas atas dari graf $spl(P_n)$. Misalkan c pewarnaan titik menggunakan 4 warna sebagai berikut :

$$c(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1; \\ 2, & \text{untuk } i = 2n, n \geq 1; \\ 3, & \text{untuk } i = 2n+1, n \geq 1. \end{cases}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1; \\ 4, & \text{untuk } i > 1. \end{cases}$$

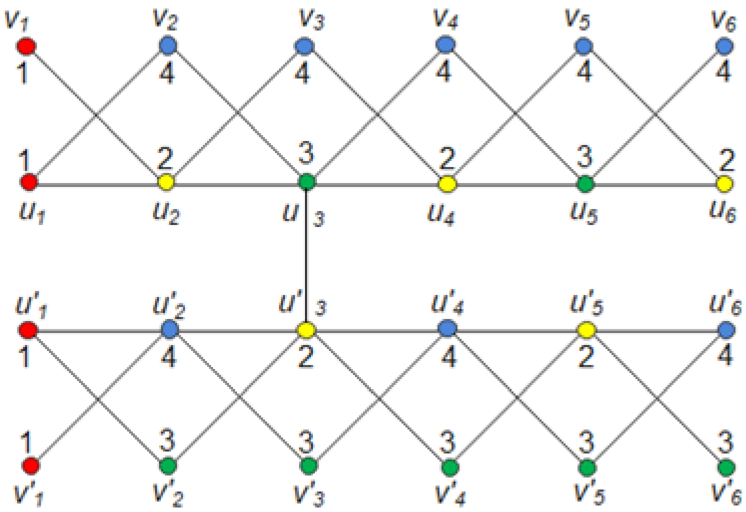
Kode warna dari $(Spl(P_n))$ adalah:

$$c_\pi(u_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n; \\ 0, & \text{ordinat ke-3, untuk } i \text{ ganjil, } 3 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-3, untuk } i = 1; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\pi(v_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-4, untuk } i \geq 2; \\ 2, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-3, untuk } i \text{ ganjil, } 3 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-4, untuk } i =; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Karena semua titik di $V(Spl(P_n))$ untuk $n \geq 3$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna. Akibatnya $\chi_L(Spl(P_n)) \leq 4$. Oleh karena itu $\chi_L(Spl(P_n)) = 4$. $\square$

2.2. **Bilangan Kromatik Lokasidari Graf Barbel yang memuat Split Lintasan.** Berikut ini diberikan contoh penentuan bilangan kromatik lokasi graf $B_{spl(P_6)}$ akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf. Karena graf barbel split lintasan $B_{spl(P_6)}$ memuat graf split lintasan $spl(P_n)$, maka berdasarkan Teorema 2.1 jelas bahwa $\chi_L\left(B_{spl(P_6)}\right) \geq 4$. Selanjutnya, menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf $B_{spl(P_6)}$ sebagai berikut:

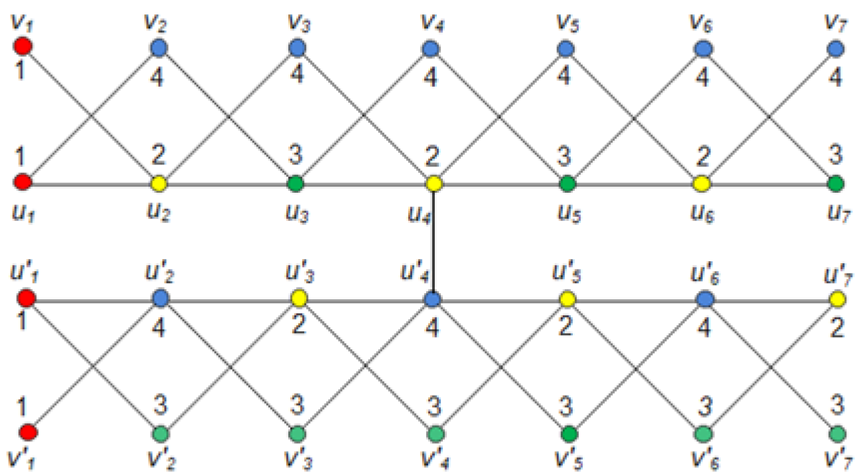


Gambar 3. Pewarnaan lokasi minimum $B_{spl(P_6)}$

Misalkan c pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan 4 warna dengan kelas-kelas warnanya adalah: $C_1 = \{u_1, u'_1, v_1, v'_1\}$, $C_2 = \{u_2, u_4, u_6, u'_3, u'_5\}$, $C_3 = \{u_3, u_5, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6\}$, $C_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, u'_2, u'_4, u'_6\}$. Maka diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(u_1) = (0,1,2,1)$; $c_\pi(u_2) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(u_3) = (2,1,0,1)$; $c_\pi(u_4) = (3,0,1,1)$; $c_\pi(u_5) = (4,1,0,1)$; $c_\pi(u_6) = (5,0,1,1)$; $c_\pi(v_1) = (0,1,2,2)$; $c_\pi(v_2) = (1,2,1,0)$; $c_\pi(v_3) = (2,1,2,0)$; $c_\pi(v_4) = (3,2,1,0)$; $c_\pi(v_5) = (4,1,2,0)$; $c_\pi(v_6) = (5,2,1,0)$; $c_\pi(u'_1) = (0,2,1,1)$; $c_\pi(u'_2) = (1,1,1,0)$; $c_\pi(u'_3) = (2,0,1,1)$; $c_\pi(u'_4) = (3,1,1,0)$; $c_\pi(u'_5) = (4,0,1,1)$; $c_\pi(u'_6) = (5,1,1,0)$; $c_\pi(v'_1) = (0,2,2,1)$; $c_\pi(v'_2) = (1,1,0,2)$; $c_\pi(v'_3) = (2,2,0,1)$; $c_\pi(v'_4) = (3,1,0,2)$; $c_\pi(v'_5) = (4,2,0,1)$; $c_\pi(v'_6) = (5,1,0,2)$. Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L\left(B_{spl(P_6)}\right) \leq 4$. Jadi $\chi_L\left(B_{spl(P_6)}\right) = 4$.

Selanjutnya, diberikan contoh penentuan bilangan kromatik lokasi graf $B_{spl(P_7)}$ akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf $B_{spl(P_7)}$. Karena graf barbel split lintasan $B_{spl(P_7)}$ memuat graf split lintasan $spl(P_n)$, maka berdasarkan Teorema 2.1 membutuhkan sekurang-kurangnya 4 warna. Oleh karena itu $\chi_L\left(B_{spl(P_7)}\right) \geq 4$. Selanjutnya, menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf $B_{spl(P_7)}$ seperti pada Gambar 4.

Misalkan c pewarnaan titik menggunakan 4 warna dan kelas-kelas warnanya adalah: $C_1 = \{u_1, u'_1, v_1, v'_1\}$, $C_2 = \{u_2, u_4, u_6, u'_3, u'_5, u'_7\}$, $C_3 = \{u_3, u_5, u_7, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7\}$, $C_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, u'_2, u'_4, u'_6\}$.Maka diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(u_1) = (0,1,2,1)$; $c_\pi(u_2) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(u_3) = (2,1,0,1)$; $c_\pi(u_4) = (3,0,1,1)$; $c_\pi(u_5) = (4,1,0,1)$; $c_\pi(u_6) = (5,0,1,1)$; $c_\pi(u_7) = (6,1,0,1)$; $c_\pi(v_1) = (0,1,2,2)$; $c_\pi(v_2) = (1,2,1,0)$; $c_\pi(v_3) = (2,1,2,0)$; $c_\pi(v_4) = (3,2,1,0)$; $c_\pi(v_5) = (4,1,2,0)$; $c_\pi(v_6) = (5,2,1,0)$; $c_\pi(v_7) = (6,1,2,0)$; $c_\pi(u'_1) = (0,2,1,1)$; $c_\pi(u'_2) = (1,1,1,0)$; $c_\pi(u'_3) = (2,0,1,1)$; $c_\pi(u'_4) = (3,1,1,0)$; $c_\pi(u'_5) = (4,0,1,1)$;



Gambar 4. Pewarnaan lokasi minimum $B_{spl(P_7)}$

$c_\pi\,(u\prime_6) = (5,1,1,0)$; $c_\pi\,(u\prime_7) = (6,0,1,1)$; $c_\pi\,(v\prime_1) = (0,2,2,1)$; $c_\pi\,(v\prime_2) = (1,1,0,2)$; $c_\pi\,(v\prime_3) = (2,2,0,1)$; $c_\pi\,(v\prime_4) = (3,1,0,2)$; $c_\pi\,(v\prime_5) = (4,2,0,1)$; $c_\pi\,(v\prime_6) = (5,1,0,2)$; $c_\pi\,(v\prime_7) = (6,2,0,1)$. Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L\left(B_{spl(P_7)}\right) \leq 4$. Jadi $\chi_L\left(B_{spl(P_7)}\right) = 4$.

Teorema 2.2. *Bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan, $B_{spl(P_n)}$ untuk $n \geq 3$ adalah 4.*

Bukti. Graf $B_{spl(P_n)}$ memuat graf *spl* (P_n), maka berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh $\chi_L(B_{spl(P_n)}) \geq 4$.
Misalkan c adalah pewarnaan titik pada $B_{spl(P_n)}$ mengunakan 4 warna sebagai berikut:

$$c(u_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1; \\ 2, & \text{untuk } i = 2n, n \geq 1; \\ 3, & \text{untuk } i = 2n+1, n \geq 1. \end{cases}$$

$$c(u_i') = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 2n+1; \\ 2, & \text{untuk } i = 2n+1; \\ 4, & \text{untuk } i = 2n. \end{cases}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1; \\ 4, & \text{untuk } i > 1. \end{cases}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1; \\ 3, & \text{untuk } i > 1. \end{cases}$$

Kode warna titik-titik dari $B_{spl(P_n)}$ adalah:

$$c_\pi(u_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n; \\ 0, & \text{ordinat ke-3, untuk } i \text{ ganjil, } 3 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-3, untuk } i = 1; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\pi(u_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 3 \leq i \leq n; \\ 0, & \text{ordinat ke-4, untuk } i \text{ ganjil, } 2 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-2, untuk } i = 1; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\pi(v_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-4, untuk } i > 2; \\ 2, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 2 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-3, untuk } i \text{ ganjil, } 3 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-4, untuk } i = 1; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$c(v_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke-1, untuk } i \geq 1; \\ 0, & \text{ordinat ke-3, untuk } i > 1; \\ 2, & \text{ordinat ke-2, untuk } i \text{ genap, } 3 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-3, untuk } i \text{ ganjil, } 2 \leq i \leq n; \\ 2, & \text{ordinat ke-4, untuk } i = 1; \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Karena semua titik di $V\left(B_{spl(P_n)}\right)$ untuk $n \geq 3$ mempunyai kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna. Akibatnya $\chi_L\left(B_{spl(P_n)}\right) \leq 4$. Oleh karena itu $\chi_L\left(B_{spl(P_n)}\right) = 4$. $\square$

3. Simpulan

Pada penelitian telah diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi untuk graf split lintasan dan graf barbel split lintasan adalah sama, yaitu 4. Penelitian lanjutan yang dapat dilakukan adalah menentukan operasi lain pada graf split lintasan yang mempertahankan bilangan kromatik lokasinya.

Daftar Pustaka

[1] Thiele., A., 2004, A robust optimization approach to supply chains and revenue management. PhD thesis, School of Management and Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology.

[2] Harary, F. and Melter, RA., 1976, On the metric dimension of a graph, *Ars Combinatori*, 2, pp. 191-195.

[3] Chartrand, G., Salehi, E., and Zhang, P., 1998, On the partition dimension of graph, *Congr. Numer*, 130, pp. 157-168.

[4] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., and Zhang, P., 2002, The Locating Chromatic Number of a Graph, *Bull. Inst. Combin. Appl*, 36, pp. 89-101.

[5] Saenpholphat, V., and Zhang, P., 2004, Conditional resolvability: a survey, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 38, pp. 1997-2017.

[6] Chartrand, G., and Zhang, P., 2003, The theory and appllications of resolvability in graphs, a survey, *Congr. Numer*, 160, pp. 47-68.

[7] Johnson, M.A., 1993, Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design, *J. Biopharm. Statist*, 3, pp. 203-236.

[8] Chartrand, G., Edwin, D., Henning, M. A., Slater, P.J., and Zhang, P., 2003, Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number $n-1$, *Discrete Mathematics*, 269, pp. 6579.

[9] Asmiati, Assiyatun, H., and Baskoro, E.T., 2011, Locating Chromatic Number of Amalgamation of Stars, *ITB J. Sci*, 43(1), pp. 1-8.

[10] Behtoei, A., dan Omoomi, B., 2011, On The Locating Chromatic Number of Kneser Graphs, *Discrete Appl. Math*, 159(18), pp. 22142221.

[11] Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., and Uttunggadewa, S., 2015, On Locating Chromatic Number for Graphs with Dominant Vertices, *Procedia Comput. Sci.*, 74, pp. 89-92.

[12] Asmiati., 2016, On The Locating-Chromatic Numbers of Non-Homogeneous Caterpillars and Firecracker Graphs, *Far East Journal Of Mathematical Sciences*, 100(8), pp. 1305-1316.

[13] Asmiati., 2017, Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan oleh suatu Lintasan, *Jurnal Matematika Integratif*, 13(2), pp. 115-121.

[14] Asmiati, and Baskoro, E.T., 2012, Characterizing of Graphs Containing Cycle with Locating-Chromatic Number Three, *AIP Conf. Proc*, 1450, pp. 351-357.

[15] Baskoro, E.T., and Asmiati, 2013, Characterizing all trees with locating-chromatic number 3, *Elec. J. of Graph Theory and Applications*, 1(2), pp. 109-117.

[16] Irawan, A., Asmiati., Zakaria, L., Muludi, K., and Bernadhita, U., 2021, Subdivision of Certain Barbell Operation of Origami Graphs has Locating-Chromatic Number Five, *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(9), pp. 1738-7906.

[17] Asmiati., Yana, I.K.D.C., and Yulianti, L., 2018, On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 100(8), pp. 1-5.

[18] Asmiati., Yana, I.K.S.G., and Yulianti, L., 2019, On the Locating Chromatic Number of subdivision of Barbell Graphs containing generalized Petersen graphs, *International Journal of Computer Science and Network Security*, 19(7), pp. 45-50.

[19] Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., and Muludi, K., 2021, The Locating Chromatic Number of Origami Graphs, *Algorithms*, 14(167), pp. 1-15.

[20] Asmiati., Damayanti, M., and Yulianti, 2021, On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs, *Indonesian Journal of Combinatorics*, 5(2), pp. 82-93.

[21] Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, Gesti, N.R., 2021, The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle, *J.Phys. Conf. Ser*, 1751, pp. 1-5.

[22] Damayanti, M., Asmiati., Fitriani., Ansori., dan Faradila, A., 2021, The Locating Chromatic Number of Some Modified Path with Cycle having Locating Number Four, *J. Phys. Conf. Ser*, 1751, pp. 1-5.