Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 14, No. 1 (2018), pp. 27–30. doi:10.24198/jmi.v14.n1.16047.27-30

# Kekekalan Proses Integral Fungsional Pada Perkalian Ruang Ukuran

Endang Rusyaman, Diah Chaerani, Kankan Parmikanti

**Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran**
**Jalan Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363**
**rusyaman@unpad.ac.id, d.chaerani@unpad.ac.id, parmikanti@unpad.ac.id**

**Abstrak**
Sifat-sifat integral, khususnya integral *Lebesgue* merupakan kajian yang menarik bagi para peneliti, misalnya penelitian tentang integral dari suatu fungsional di suatu ruang ukuran. Demikian juga apabila ruang yang diambil sebagai domainnya adalah sebuah ruang berupa perkalian dua buah ruang ukuran. Isi makalah ini dikonsentrasikan pada sebuah fungsi terukur bernilai real yang didefinisikan pada perkalian dua buah ruang ukuran. Dengan menggunakan metode pembuktian melalui konsep kekonvergenan barisan fungsi, diperlihatkan bahwa integral dari suatu fungsional pada perkalian dua ruang ukuran ternyata bersifat kekal. Apabila proses integrasi dilakukan dengan urutan yang berbeda, yaitu terlebih dahulu di ruang ukuran pertama dilanjutkan di ruang ukuran kedua, atau sebaliknya, maka nilai integral tersebut bernilai sama.
*Kata kunci*: integral, ruang ukuran, fungsional, *Lebesgue*.

**Abstract**
*The properties of integral, in particular the integral Lebesgue, have been regarded as an interesting discourse among scholars, for instance, a study on the integral of a functional in a measure space as well as if the space taken as a domain is a product measure space. The paper will be focused on a real values measurable function which is defined in the product measure space. By using the proofing method through the concept of convergence of function sequence, it is shown that the integral of a functional in the product measure space can be maintained. In other words, if the integral process is performed in different arrangement, i.e., firstly performed in the first measure space then continued in the second one or vice versa, the integral value will be the same.*
*Keywords* : integral, measure space, functional, *Lebesgue*.

## 1. Pendahuluan

Kajian tentang integral di ruang ukuran (*measure space*) merupakan kajian klasik, kajian yang sudah sangat tua hampir sepanjang jaman. Namun demikian kajian ini memang sangat menarik minat para peneliti dari dulu hingga sekarang. Christer Borell misalnya, dalam [2] telah membuat kajian khusus mulai dari ruang ukuran dan integral fungsi di ruang terukur, dilanjutkan dengan mendefinisikan produk ruang ukuran. Selanjutnya LaszloHorvath dalam [5] membahas tentang ketaksamaan integral Lebesgue di ruang ukuran, sedangkan dalam [6]

*2000 Mathematics Subject Classification*: 28A25, 28A35
Received: 2018-03-10, accepted: 2018-04-18.

yang bersangkutan melengkapinya dengan kajian sebuah persamaan integral di ruang tersebut. Khusus yang membahas tentang perkalian ruang (*product space*), diantaranya Huoxiang Wu, 2006, dalam makalahnya [4], telah membahas tentang fungsi Littlewood-Paley umum dan integralnya di ruang perkalian. Masih berbicara di ruang perkalian, Suichi Sato,[8], berbicara tentang aplikasi dari integral Marcinkiewicz, sedangkan Stan Gudder dalam [7] membahas dan memperkenalkan tentang ukuran quantum, khususnya integral quantum sebagai perumuman dari integral *Lebesgue*, serta menunjukkan bahwa teorema Radon-Nikodym tidak berlaku di ruang Quantum. Selain mereka tersebut di atas, yang dikenal membahas tentang integral dan perkalian ruang ukuran adalah Arunava Mukherjea[1], yang memperlihatkan hubungan antara validitas teorema Tonelli pada integral di perkalian ruang ukuran dengan ruang ukuran semidefinit., Demikian pula Fernando Bombal dan Ignacio Villanueva [3], yang membahas tentang operator integral di ruang perkalian C(K).

Isi dari makalah ini, berlatar belakang perkalian ruang ukuran dan fungsi-fungsi atau fungsional terukur (*measure space*) yang terdapat di dalamnya. Apabila dalam [1] digunakan teorema Tonelli yang integrannya menggunakan nilai mutlak dan integral nya terhadap $dx$ dan $dy$, maka penulis mencoba melihat pengembangannya tanpa nilai mutlak dengan intgralnya terhadap ukuran $d\mu$ dan $d\lambda$. Selain itu pembuktian teoremanya menggunakan konsep-konsep kekonvergenan barisan fungsi dengan mengambil barisan fungsi yang konvergen ke fungsional yang diintegralkan. Namun sebelum membahas permasalahan yang utama, terlebih dahulu penulis sajikan hal-hal mendasar yang menunjang permasalahan inti tadi, sekaligus untuk mengingatkan kembali pada permasalahan tersebut. Namun sebelum membahas permasalahan yang utama, terlebih dahulu penulis sajikan hal-hal mendasar yang menunjang permasalahan inti tersebut.

Misalkan X suatu himpunan, dan $\mathfrak{X}$ koleksi himpunan bagian dari X. $\mathfrak{X}$ disebut $\sigma$-aljabar pada X apabila X$\in \mathfrak{X}$, untuk setiap A di $\mathfrak{X}$, maka komplemen dari A juga di $\mathfrak{X}$, dan jika $A_i \in \mathfrak{X}$ untuk setiap $i$, maka $(\cup_i A_i)$ dan $(\cap_i A_i)$ juga anggota $\mathfrak{X}$. Semua hinpunan anggota $\mathfrak{X}$ disebut himpunana terukur. Selanjutnya seuah fungsional $\mu$ dari X ke interva; $[0, \infty)$ disebut ukuran (*measure*) apabila $\mu(\phi) = 0$ dan untuk himpunan disjoin $Ai$ senantiasa berlaku $\mu(\cup_i A_i) = \Sigma\mu(A_i)$. Fungsi $f : X \to R$ dikatakan terukur (*measurable*) apabila untuk setiap bilangan real $\alpha$, himpunan $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{X}$. Secara umum, jika X suatu himpunan, $\mathfrak{X}$ $\sigma$-aljabar, dan ukuran $\mu$ pada X, maka $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ disebut ruang ukuran.

## 2. Landasan Teori

Sebelum membahas masalah pokok, terlebih dahulu disampaikan landasan teori berupa definisi dan teorema. Dimulai dengan perkalian dua ruang ukuran yang tersaji dalam definisi berikut.

**Definisi 2.1.** *Misalkan $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ dan $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ merupakan dua buah ruang ukuran, dengan $\mathfrak{X}$ dan $\mathcal{Y}$ masing-masing merupakan $\sigma$-aljabar dari $X$ dan $Y$. Maka $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ adalah menyatakan perkalian ruang ukuran dari $\sigma$-aljabar $X \times Y$. Untuk menunjukkan sifat ketertutupan dari suatu koleksi himpunan terhadap operasi gabugan dan irisan, berikut adalah definisi tentang kelas kemonotonan.*

**Definisi 2.2.** *Kelas Monoton m adalah sebuah koleksi himpunan yang mana apabila setiap $A_i \in m$ dan $Bi \in m$ dengan $A_i \subset A_{i+1}$ dan $B_{i+1 \subset B_i}$, maka berlaku $A = \cup A_i \in m$ dan $B = \cap B \in m$. Selanjutnya jika suatu himpunan terdapat dalam $X \times Y$, maka perlu didefinisikan bagian-x dan bagian-y dari himpunan tersebut. Dalam hal ini, bagian-x adalah himpunan dari unsur-unsur y yang berpasangan dengan x, sedangkan bagian-y adalah himpunan dari unsur-unsur x yang berpasangan dengan y. Secara lebih jelas terlihat dalam definisi berikut.*

**Definisi 2.3.** *Jika $E \subset X \times Y, c \in X$, dan $y \in Y$ maka $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ dan $E_y = \{y : (x, y) \in E\}$ berturut-turut dinamakan bagian-x dan bagian-y dari E. Dalam hal ini $E_x \subset Y$ dan $E_y \subset X$. Seperti halnya himpunan pada $X \times Y$ yang telah didefinisikan di atas, demikian pula sebuah fungsi f pada $X \times Y$, perlu didefinisikan fungsi bagian-x dan fungsi bagian-y dari fungsi tersebut, seperti tersaji pada definisi berikut.*

**Definisi 2.4.** *Misalkan $f$ sebuah fungsi pada $X \times Y$. Maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$, didefinisikan fungsi $f_x$ dan $f_y$ dimana $f_x(y) = f(x,y)$ dan $f_y(x) = f(x,y)$. Dengan keempat definisi tersebut di atas, diharapkan akan memudahkan pemahaman terhadap teorema-teorema yang akan disajikan pada makalah ini.*

## 3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini akan diberikan tiga buah teorema yang merupakan pokok dari materi pada makalah. Pertama akan ditunjukkan bahwa bagian-x dan bagian-y dari fungsional terukur f pada $X \times Y$ dalam perkalian ruang ukuran $\mathfrak{X} \times y$ merupakan fungsi terukur. Kedua, teorema tentang keterukuran fungsi dan kesamaan dua integral, dan teorema ketiga adalah teorema inti tentang sifat kekekalan integral pada perkalian ruang ukuran $\mathfrak{X} \times y$.

**Teorema 3.1.** *Misalkan $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ dan $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ merupakan dua buah ruang terukur, dan $f$ sebuah fungsi terukur pada $X \times Y$ dalam $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. Maka :*

*(1) untuk setiap $x \in X, f_x$ adalah fungsi terukur dalam $X$*
*(2) untuk setiap $y \in Y, f_y$ adalah fungsi terukur dalam $Y$*

***Bukti :*** *Untuk setiap himpunan V, ambil $Q = \{(x,y) : f(x,y) \in V\}$. Maka : $Q \in \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ dan $Q_x = \{y : f_x(y) \in V\}$ karena $Q_x \in Y$, maka $f_x$ terukur dalam Y. Bukti yang sama untuk b.*

**Teorema 3.2.** *Misalkan $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ dan $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ merupakan dua buah ruang terukur hingga-$\sigma$. Misalkan pula $Q \in \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. Jika $\varphi(x) = \lambda(Q_x)$ dan $\psi(y) = \mu(Q_y)$ untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$, maka $\varphi$ adalah terukur untuk $\mathfrak{X}$ dan $\psi$ adalah terukur-y serta berlaku pula*

$$\int_x \varphi d\mu = \int_y \psi d\lambda \tag{1}$$

***Catatan :*** *Diasumsikan bahwa pada ruang terukur di atas, mu dan $\lambda$ adalah ukuran positif pada $\mathfrak{X}$ dan $\mathcal{Y}$. Juga bahwa $X$ adalah gabungan terhitung dari beberapa himpunan terpisah $X_n$ dengan $\mu(X_n) < \infty$ untuk semua $n$, dan $Y$ adalah gabungan terhitungdari beberapa himpunan terpisah $Y_m$ dengan $\mu(Y_m) < \infty$ untuk semua $m$. Berikut adalah definisi perkalian dari dua buah ukuran, yang mana diperlukan untuk menotasikan integral Lebesgue dari suatu fungsional terhadap dua ukuran pada perkalian ruang ukuran $X \times Y$, dan akan digunakan pada teorema kekekalan integral.*

**Definisi 3.3.** *Misalkan $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ dan $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ merupakan dua buah ruang terukur hingga-$\sigma$, dan $Q \in \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. Didefinisikan :*

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_x \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_y \mu(Q_y) d\lambda(y) \tag{2}$$

*Sebut bahwa $\mu \times \lambda$ sebagai perkalian dari dia ukuran $\mu$ dan $\lambda$. Dalam hal ini jelas bahwa $\mu \times \lambda$ adalah hingga-$\sigma$.*

*Sekarang tibalah pada teorema inti yang menunjukkan kekekalan proses integral pada perkalian ruang ukuran.*

**Teorema 3.4.** *Misalkan $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ dan $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ merupakan dua buah ruang terukur hingga-$\sigma$, dan $f$ adalah fungsional terukur-$\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ pada $X \times Y$. Jika $0 \leq f \leq \infty$ dan $\varphi(x) = \int_y f_x d\lambda$, $\varphi$ adalah terukur-$\mathfrak{X}$, $\psi$ adalah terukury, dan*

$$\int_x \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\mu \tag{3}$$

***Bukti:*** *Ambil $Q \in \mathfrak{X} \times y$ dan $f = X^Q$. Dari definisi 3.3 di atas, maka persamaan (3) adalah tepat merupakan kesimpulan dari Teorema 3.2. Dengan demikian teorema ini berlaku untuk semua fungsi terukur-$\mathfrak{X} \times y$ sederhana non negative $s$. Secara umum terdapat barisan fungsi $s_n$ sedemikian sehingga $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ...$ dan $s_n(x,y)$ mendekati $f(x,y)$ pada setiap titik dari $X \times Y$.*

*Jika $\varphi_n$ dihubungkan dengan $s_n$ seperti halnya $\varphi$ dihubungkan dengan $f$, maka diperoleh:*

$$\int_x \varphi_x d\mu = \int_{X\times Y} s_n d(\mu\times\lambda) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

*Dengan menggunakan teorema konvergensi kemonotonan pada ($Y$, $Y$, $\lambda$), dapat diperlihatkan bahwa $\varphi_n(x)$ monoton naik dan konvergen ke $\varphi(x)$ untuk setiap $x \in X$ dengan $n \to ||\infty||$. Jadi teorema konvergensi monoton juga berlaku pada dua buah integral di atas dan pada bentuk pertama dalam persamaan* (3) *tersebut.*

## 4. Kesimpulan

Setelah meneliti dan membahas uraian pada inti uraian di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk fungsi bernilai real yang terukur dan non negatif pada perkalian ruang ukuran, berlaku hukum kekekalan pengintegralan, yaitu:

$$\int_X \int_Y f_x d\lambda d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu\times\lambda) = \int_Y \int_X d\mu d\lambda \tag{5}$$

**Ucapan Terimakasih.**

Penelitian ini didanai oleh Universitas Padjadjaran melalui Program Penelitian Unggulan Perguruan Tinggi No. 1084/UN6.D/LT/2018 Tanggal 6 Februari 2018.

## Daftar Pustaka

[1] Arunava Mukherjea, 1972, A remark on Tonellis theorem on integration in product spaces, Pacific Journal of Mathematics, Volume 42, , No. 1, Pages 177 185.
[2] Christer Borell, 2006, Lecture Notes on Measure Theory, Version: January 12, Chalmers och Gteborgs universitet, Gteborg .
[3] Fernando Bombal, Ignacio Villanueva, 2001, Integral operators on the product of C(K) spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 264, issue 1, 1 December 2001, Pages 107 121.
[4] Huoxiang Wu, 2006,General Littlewood-Paley functions and singular integral operators on product spaces, Mathematische Nachrichten Journal, Volume279, Pages 431 444.
[5] LaszloHorvath, 1999, Integral Inequalities in Measure Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 231, Pages 278 300
[6] LaszloHorvath, 2003, Integral Equations in Measure Spaces, Integral Equationsand Operators Theory, February 2003, Volume 45,Issue 2, Pages 155176
[7] Stan Gudder, 2009, Quantum Measure and Integration Theory, J.Math.Phys
[8] SuichiSato, 1993, On an Application of the Marcinkiewicz Integral for the Product Space, London Mathematical Society, Volume s2-47, Pages 73 78 .