

Analisis Dinamik Penyebaran Covid-19 dengan Faktor Vaksinasi menggunakan Metode Runge-Kutta Fehlberg

RIZKY ASHGI¹, SRI PURWANI², NURSANTI ANGGRIANI²

¹ Mahasiswa Program Studi S-2 Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran

² Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363

Email: rizky19016@mail.unpad.ac.id, sri.purwani@unpad.ac.id,

nursanti.anggriani@unpad.ac.id

Abstrak

Pada saat ini dunia sedang menghadapi wabah pandemik Covid-19. Penyakit ini dapat menular hingga menyebabkan kematian pada seseorang. Penyebaran penyakit ini terus ada di suatu wilayah dalam jangka waktu yang tidak dapat di prediksi, oleh sebab itu pemerintah melakukan berbagai cara untuk mencegah penularan penyakit ini salah satunya dengan program vaksinasi. Dengan program ini diharapkan dapat mencegah penyebaran Covid-19 dan berbagai upaya dilakukan untuk memperhitungkan kapan berakhirnya penyakit Covid-19 di suatu wilayah populasi. Hal ini bersesuaian dengan bidang matematika epidemiologi yaitu pemodelan matematika yang dapat memprediksi kapan berakhirnya penyakit Covid-19 di suatu wilayah. Salah satu model yang sesuai adalah SVIR (*Susceptible, Vaccination, Infection, Recovery*). Metode pada penelitian ini adalah analisis matematika yaitu dengan menentukan titik *equilibrium* dan *basic reproduction number* (R_0) sedangkan analisis numeriknya dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan waktu berakhirnya penyakit Covid-19 dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg. Berdasarkan hasil penelitian ini bahwa analisis kestabilan di titik E_0 dan E_1 adalah stabil dengan mempunyai nilai eigen negatif, R_0 stabil artinya bebas penyakit. Model SVIR yang kami usulkan yang diselesaikan dengan RKF45 menunjukkan bahwa penyakit Covid-19 berakhir di hari ke enam puluh.

Kata kunci: Covid-19, Metode Runge-Kutta Fehlberg, model SVIR.

Abstract

Currently, the world is facing the Covid-19 pandemic. This disease can be contagious to cause death in a person. The spread of this disease continues to exist in an area for an unpredictable period of time, therefore the government takes various ways to prevent the transmission of this disease, one of which is a vaccination program. This program is expected to prevent the spread of Covid-19 and various efforts are made to predict when the Covid-19 disease will end in a population area. This is in accordance with the field of epidemiology mathematics, namely mathematical modeling that can predict when the Covid-19 disease will end in an area. One of suitable models is SVIR (Susceptible, Vaccination, Infection, Recovery). The method used in this research was mathematical analysis by determining the equilibrium points and basic reproduction number (R_0), while the numerical analysis used the Runge-Kutta Fehlberg method. The purpose of this study was to determine the end of the Covid-19 disease using the Runge-Kutta Fehlberg method. Based on the results of the research, the stability analysis at points E_0 and E_1 is stable with negative eigenvalues, R_0 is stable meaning free from disease. Our proposed SVIR model solved with RKF45 shows that the Covid-19 disease ends on day sixty.

Keywords: Covid-19, Runge-Kutta Fehlberg Method, SVIR model.

1. PENDAHULUAN

Akhir-akhir ini telah terjadi wabah Covid-19 yang diduga berasal dari kota Wuhan, China (Libotte, *et al.*, [5]). Kemudian pada tanggal 11 Maret 2020 World Health Organization (WHO) mengumumkan adanya pandemi Covid-19 di seluruh dunia (Forde dan Ciupe, [4]). Menurut Paolucci *et al.* [7], *coronavirus disease 2019* (COVID-19) disebabkan oleh *severe acute respiratory syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2). Virus jenis ini ditularkan dari manusia terhadap manusia lainnya melalui udara dan percikan air liur serta ditandai dengan gejala batuk ringan, flu, demam hingga dapat mendatangkan kematian. Menurut Forde and Ciupe, [4], pada tanggal 12 Februari tahun 2021 kasus positif Covid-19 diseluruh dunia telah mencapai 107.4 juta orang dikonfirmasi terinfeksi Covid-19 dan kasus kematian karena Covid-19 diseluruh dunia telah mencapai 2.3 juta orang, sehingga untuk mengurangi penyebaran Covid-19 dilakukan vaksinasi. Vaksin digunakan sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit Covid-19, dengan cara disuntikan ke bagian lengan atas dan biasanya dilakukan hingga dua kali penyuntikan dengan rentang waktu satu bulan. Vaksin diprioritaskan bagi garda terdepan yaitu tenaga kesehatan, kemudian masyarakat. Namun penggunaan vaksin ternyata masih dapat menyebabkan terjadinya infeksi karena Covid-19 memungkinkan bermutasi dan melemahkan atau menyerang sistem kekebalan tubuh, kemudian efikasi vaksin juga berpengaruh terhadap imun alami didalam tubuh seseorang, misalnya apabila dalam vaksin terdapat efikasi vaksin sebesar 50% maka rentang waktu kekebalan tubuh terhadap virus tersebut selama 90 hari dan jika efikasi vaksin sebesar 90% rentang waktu imun di dalam tubuh dapat memungkinkan bertahan selama 365 hari (Acuña-zegarra *et al.*, [1]).

Penelitian pada matematika epidemiologi dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit yang disebabkan oleh virus corona salah satunya dengan menggunakan model *Susceptible-Infected-Recovery* (SIR) di mana populasi individu yang rentan terkena penyakit dilambangkan dengan (S), populasi individu yang sudah terkena penyakit dilambangkan dengan (I), dan populasi individu yang sembuh dilambangkan dengan (R) (Salim *et al.*, [9]).

Comunian *et al.*, [3], menambahkan faktor D sehingga menjadi model *Susceptible-Infected-Recovery-Death* (SIRD) yaitu menggunakan tambahan pada variabel individu meninggal karena penyakit Covid-19 dilambangkan dengan (D). Dari model SIR kemudian ditambahkan faktor V oleh Zhu and Zhu, [10], sehingga menjadi model *Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovery* (SVIR) di mana individu yang sudah divaksinasi dilambangkan dengan (V), dan dari model SIR ada tambahan faktor E oleh Lin *et al.*, [6], sehingga menjadi model *SusceptibleExposed-Infectious-Removed* (SEIR) untuk wabah penyakit Covid-19, di mana ditambahkan pada E yaitu individu yang terinfeksi tetapi tidak menularkan (Roda *et al.*, [8]), sebelumnya penelitian dari model SIR yang dilakukan oleh Libotte *et al.*, [5], yaitu menjadi model SIRW dimana W adalah individu yang divaksinasi dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg. Model matematika yang telah dibuat dapat memberikan suatu informasi yaitu untuk mengetahui rentang waktu berakhirnya pandemi di suatu wilayah, model ini dapat dianalisis melalui analisis kestabilan yaitu dengan menentukan titik equilibrium dan basic reproduction number R_0 tujuannya untuk mengetahui apakah penyakit ini akan berakhir menjadi non-endemik (bebas penyakit) atau menjadi endemik yang akan menetap di suatu populasi.

Persamaan diferensial biasa yang terkandung dalam model-model tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa adalah metode Runge-Kutta Fehlberg. Metode tersebut banyak digunakan (Libotte *et al.*, [5]) karena memiliki ketelitian dan efisiensi tinggi. Hal ini dikarenakan kontrol error yang dimilikinya. Bila pada suatu langkah yang dilakukan oleh metode lain ditemui global error yang tidak memadai, maka harus mengulang dari awal kembali. Sementara dengan metode Runge-Kutta Fehlberg, karena setiap langkahnya berdasarkan kontrol lokal error maka global error tetap terkontrol (kecil). Untuk hal ini metode Runge-Kutta Fehlberg menggunakan pasangan Runge-Kutta orde 4 dan orde 5. Pasangan tersebut digunakan untuk menentukan panjang langkah yaitu berdasarkan lokal error dari solusi Runge-Kutta ordanya. Dengan demikian panjang langkah dinamis. Hal ini merupakan kelebihan dari metode Runge-Kutta Fehlberg dibanding metode lainnya.

Berdasarkan uraian di atas untuk melibatkan vaksinasi kami mengusulkan model SVIR yang diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg. Dengan efisiensi dan ketelitian dari metode Runge-Kutta tersebut, kami akan memprediksi kapan waktu berakhirnya Covid-19 melalui analisa titik Equilibrium dan *Basic Reproduction Number* (R_0).

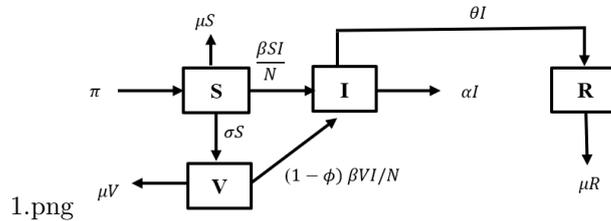
2. METODE PENELITIAN

Pada bagian ini, kita mempresentasikan model matematika yaitu model SVIR. Dimulai dari bagian laju individu kelahiran dilambangkan dengan π dimana individu ini merupakan populasi yang sehat karena awal mula seseorang baru lahir atau belum adanya kasus penyakit Covid-19 di suatu wilayah, Kemudian terdapat disuatu wilayah dengan informasi bahwa adanya orang mengalami demam, batuk, dan flu, individu ini diketahui terinfeksi penyakit dan akan mengalami transmisi ke individu rentan yang dilambangkan dengan S , individu rentan ini membawa suatu gejala yang diakibatkan oleh adanya suatu populasi yang terkena penyakit biasa dan penyakit Covid-19, sehingga orang rentan terdapat yang meninggal karena penyakit biasa atau tanpa adanya penyakit Covid-19 dilambangkan dengan μS , suatu populasi yang terdapat penyakit Covid-19 disebabkan oleh satu orang yang mengalami indikasi terjadinya positif Covid-19. Selanjutnya individu yang awalnya dari satu orang berkerumun ke orang lain, sehingga terjadi interaksi satu sama lain dan individu tersebut meninggal yang diakibatkan oleh penyakit Covid-19 dilambangkan dengan αI . Oleh sebab itu pemerintah berupaya mencegah penyebaran penyakit Covid-19, salah satunya dengan program vaksinasi. Hal ini menunjukkan indikasi terdapat adanya individu yang masih terjangkit penyakit Covid-19, sehingga menjadi terbagi dua bagian yaitu individu yang terkena penyakit Covid-19 dan individu yang divaksin. Laju individu rentan ini bertransmisi ke individu yang terkena penyakit Covid-19 yang dilambangkan dengan I dimana laju rentan ini mempunyai nilai proporsisi dengan $\frac{\beta SI}{N}$ dimana β merupakan laju individu rentan ke individu yang terkena infeksi dengan dibagi

jumlah total populasi yang dilambangkan dengan N dan $\frac{(1-\phi)\beta VI}{N}$ merupakan laju individu rentan ke individu yang divaksin dengan nilai tambahan sebuah proporsi $(1 - \phi)$ ini artinya individu mengalami penyuntikan vaksinasi dengan dosis pertama dan dibagi dengan jumlah total populasi yaitu N . Laju vaksinasi dapat masih terjadi menjadi orang yang terinfeksi karena efikasi dosisnya masih lemah, sehingga dapat meninggal dunia tanpa penyakit Covid-19 yang dilambangkan dengan μV . Laju individu yang terinfeksi berpindah menjadi orang yang sembuh dengan dilambangkan oleh θI dan orang yang sembuh dilambangkan dengan R dimana orang yang sembuh dapat saja meninggal tanpa diakibatkan oleh penyakit Covid-19 yang dilambangkan dengan μR . Adapun jumlah total populasi pada masing-masing variabel S, V, I dan R adalah sebagai berikut:

$$N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t),$$

di mana model SVIR ini merujuk pada Zhu and Zhu, [10], Gambaran berupa model SVIR seperti berikut.



GAMBAR 1. Model SVIR.

Gambar 1 tersebut merupakan peralihan dari laju orang rentan terkena penyakit menuju orang sembuh yang melaju secara transisi. Jadi keadaan tersebut dapat dibentuk menjadi empat kompartemen dengan persamaan berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \frac{\beta SI}{N} - \sigma S - \mu S \tag{1}$$

$$\frac{dV}{dt} = \sigma S - \frac{(1-\phi)\beta VI}{N} - \mu V \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} + \frac{(1-\phi)\beta VI}{N} - \alpha I - \theta I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta I - \mu R. \tag{4}$$

Kemudian menentukan terlebih dahulu nilai parameter pada setiap asumsi-asumsi yang terdapat pada model SVIR dapat dilihat pada Tabel 1.

TABEL 1. Keterangan Parameter.

No.	Parameter	Keterangan	Nilai Parameter
1.	$S(0)$	Jumlah individu rentan terhadap waktu $t = 0$	14
2.	$V(0)$	Jumlah individu vaksinasi terhadap waktu $t = 0$	0
3.	$I(0)$	Jumlah individu terinfeksi terhadap waktu $t = 0$	5
4.	$R(0)$	Jumlah individu sembuh terhadap waktu $t = 0$	0
5.	π	Laju kelahiran	0.2
6.	μ	Laju kematian tanpa akibat penyakit Covid-19	0.04
7.	σ	Laju perpindahan dari S ke V	0.4
8.	α	Laju kematian akibat penyakit Covid-19	0.8
9.	ϕ	Laju kematian parameter karena penyakit Covid-19	0.05
10.	θ	Laju kesembuhan dari I ke R	0.1
11.	β	Laju infeksi dari S ke I dan dari V dan I	0.65

3. ANALISIS MATEMATIKA

3.1. **Titik Equilibrium.** Pada penelitian ini menentukan terlebih dahulu pada analisis kestabilan terhadap model SVIR yang pertama dilakukan yaitu menentukan titik equilibrium dengan menggunakan program maple, kedua dilakukan *basic reproduction number* (R_0) yaitu nilai ambang, dan ketiga menentukan solusi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg, dan yang terakhir akan dilakukan keefektivitasan dari model SVIR yaitu dilihat dari analisis kestabilan dan penyelesaian solusi numerik dari metode Runge-Kutta Fehlberg. Pada model matematika di penelitian ini yaitu model SVIR telah dibuat skema diagramnya dan persamaan diferensialnya merujuk pada Gambar 1. Selanjutnya dilakukan normalisasi pada persamaan diferensialnya adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \beta SI - \sigma S - \mu S \tag{5}$$

$$\frac{dV}{dt} = \sigma S - (1 - \phi) \beta VI - \mu V \tag{6}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + (1 - \phi) \beta VI - \alpha I - \theta I \tag{7}$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta I - \mu R. \tag{8}$$

Kemudian untuk mencari titik non endemik substitusikan ke persamaan (5), (6), (7), (8) jika dimisalkan $R = 0$ dan $I = 0$ maka dapat diperoleh dari persamaan (5) menjadi:

$$S = \frac{\pi}{\sigma + \mu}. \tag{9}$$

Selanjutnya untuk persamaan (6) diperoleh menjadi:

$$V = \frac{\sigma \pi}{(\sigma + \mu) \mu}. \tag{10}$$

Persamaan (7) dan persamaan (8) didapat 0, sehingga titik equilibriumnya di titik non endemik adalah $E_0 = (s, v, i, r) = (\frac{\pi}{\sigma + \mu}, \frac{\sigma \pi}{(\sigma + \mu) \mu}, 0, 0)$. Kemudian menentukan titik endemik yaitu dengan mensubstitusikan ke persamaan (5), (6), (7), (8), jika dimisalkan $S = V = I = R \neq 0$, maka dari persamaan (5) dapat diperoleh:

$$S = \frac{\pi}{\beta I + \sigma + \mu}. \tag{11}$$

Selanjutnya dari persamaan (6), maka dapat diperoleh titik V adalah:

$$V = \frac{\pi \sigma}{\beta I (\beta I - \beta I \phi) + 2\mu + \sigma}. \tag{12}$$

Kemudian untuk mencari titik I dari persamaan (7), didapat:

$$= \frac{\beta I + 2\sigma + 3\mu - \beta I (\beta I - \beta I \phi) + \beta I \phi (\beta I - \beta I \phi) + 2\mu \phi + \sigma \phi}{-\beta \pi - \beta \pi \sigma + \beta \pi \sigma \phi + \alpha + \theta}. \tag{13}$$

Terakhir untuk mencari R disubstitusikan kedalam persamaan (8) dapat diperoleh:

$$R = \frac{\theta I}{\mu}. \tag{14}$$

Setelah semuanya didapat, maka titik endemik dapat diketahui yaitu $E_1 = (s, v, i, r) = (\frac{\pi}{\beta I + \sigma + \mu}, \frac{\pi \sigma}{\beta I (\beta I - \beta I \phi) + 2\mu + \sigma}, \frac{\beta I + 2\sigma + 3\mu - \beta I (\beta I - \beta I \phi) + \beta I \phi (\beta I - \beta I \phi) + 2\mu \phi + \sigma \phi}{-\beta \pi - \beta \pi \sigma + \beta \pi \sigma \phi + \alpha + \theta}, \frac{\theta I}{\mu})$. Kemudian dilanjutkan dengan pelinearannya yaitu dengan menggunakan matriks Jacobian dari persamaan (5),

(6), (7), (8) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial s} &= -\beta I - \sigma - \mu, \quad \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial i} = -\beta S, \quad \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial s} &= \sigma, \quad \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial v} = -(1 - \phi)\beta I - \mu, \quad \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial i} = -(1 - \phi)\beta V, \quad \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial s} &= \beta I, \quad \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial v} = (1 - \phi)\beta I, \quad \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial i} = \beta S + (1 - \phi)\beta V - \alpha - \theta, \quad \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial s} &= 0, \quad \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial i} = \theta, \quad \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial r} = -\mu, \end{aligned}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial s} & \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial v} & \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial i} & \frac{\partial f(s, v, i, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial s} & \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial v} & \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial i} & \frac{\partial g(s, v, i, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial s} & \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial v} & \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial i} & \frac{\partial h(s, v, i, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial s} & \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial v} & \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial i} & \frac{\partial k(s, v, i, r)}{\partial r} \end{bmatrix},$$

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\beta I - \sigma - \mu & 0 & -\beta S & 0 \\ \sigma & -(1 - \phi)\beta I - \mu & -(1 - \phi)\beta V & 0 \\ \beta I & (1 - \phi)\beta I & \beta S + (1 - \phi)\beta V - \alpha - \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -\mu \end{bmatrix}.$$

Apabila dilihat dari titik non endemik $E_0 = (s, v, i, r) = (\frac{\pi}{\sigma + \mu}, \frac{\sigma\pi}{(\sigma + \mu)\mu}, 0, 0)$, maka matriks Jacobiannya dapat diperoleh bahwa nilai eigen dari $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\mu - \sigma$, $\lambda_3 = -\mu$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\mu(\sigma + \mu)}(\beta\phi\sigma\pi + \alpha\mu^2 + \alpha\sigma\mu - \beta\mu\pi - \beta\sigma\pi + \theta\mu^2 + \theta\sigma\mu)$. $\lambda_1 = -\mu < 0$ mempunyai nilai negatif jadi titik λ_1 stabil.

$$\lambda_2 = -\mu - \sigma. \tag{15}$$

Sistem dikatakan stabil atau mempunyai bagian real negatif . Sehingga dapat diperoleh bahwa titik non endemik λ_2 adalah stabil.

$$\lambda_3 = -\mu. \tag{16}$$

Sistem dikatakan stabil atau mempunyai bagian real negatif. Sehingga dapat diperoleh bahwa titik non endemik λ_3 adalah stabil.

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -\frac{1}{\mu(\sigma + \mu)}(\beta\phi\sigma\pi + \alpha\mu^2 + \alpha\sigma\mu - \beta\mu\pi - \beta\sigma\pi + \theta\mu^2 + \theta\sigma\mu) \\ &= -\frac{\beta\phi\sigma\pi + \alpha\mu^2 + \alpha\sigma\mu - \beta\mu\pi - \beta\sigma\pi + \theta\mu^2 + \theta\sigma\mu}{\mu(\sigma + \mu)} \\ &= \frac{-\beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu + \beta\mu\pi + \beta\sigma\pi - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu}{\mu(\sigma + \mu)} \\ &= \frac{\beta\mu\pi + \beta\sigma\pi}{\mu(\sigma + \mu)} - \beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu. \end{aligned} \tag{17}$$

Jika

$$\begin{aligned} \frac{\beta\mu\pi + \beta\sigma\pi}{\mu(\sigma + \mu)} &= \frac{a}{b}, \\ -\beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu &= -c, \\ \lambda_4 &= \frac{a}{b} - c, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \lambda_4 &> 0 \text{ jika } \frac{a}{b} > c, \\ \lambda_4 &< 0 \text{ jika } \frac{a}{b} < c, \\ \lambda_4 &< 0 \text{ untuk } \frac{a}{b} < c. \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh bahwa titik non endemik λ_4 adalah stabil, maka $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$. Mempunyai nilai eigen negatif untuk memenuhi syarat titik stabil, dengan begitu titik non endemik dapat dikatakan stabil. Di titik non endemik

$$E_0 = (s, v, i, r) = \left(\frac{\pi}{\sigma + \mu}, \frac{\sigma\pi}{(\sigma + \mu)\mu}, 0, 0 \right).$$

Titik endemik $E_1 = (s, v, i, r) = \left(\frac{\pi}{\beta I + \sigma + \mu}, \frac{\pi\sigma}{\beta I(\beta I - \beta I\phi) + 2\mu + \sigma}, \frac{\beta I + 2\sigma + 3\mu - \beta I(\beta I - \beta I\phi) + \beta I\phi(\beta I - \beta I\phi) + 2\mu\phi + \sigma\phi}{-\beta\pi - \beta\pi\sigma + \beta\pi\sigma\phi + \alpha + \theta}, \frac{\theta I}{\mu} \right)$ dapat diperoleh bahwa nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$, maka dapat dikatakan titik $\lambda_1 =$ stabil.

$$\lambda_2 = -\mu - \sigma. \quad (18)$$

λ_2 merupakan bagian real negatif, maka dari itu memenuhi syarat titik stabil.

$$\lambda_3 = -\mu. \quad (19)$$

λ_3 merupakan bagian real negatif yang memenuhi syarat titik stabil.

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -\frac{1}{\mu(\sigma + \mu)}(\beta\phi\sigma\pi + \alpha\mu^2 + \alpha\sigma\mu - \beta\mu\pi - \beta\sigma\pi + \theta\mu^2 + \theta\sigma\mu) \\ &= -\frac{\beta\phi\sigma\pi + \alpha\mu^2 + \alpha\sigma\mu - \beta\mu\pi - \beta\sigma\pi + \theta\mu^2 + \theta\sigma\mu}{\mu(\sigma + \mu)} \\ &= \frac{-\beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu + \beta\mu\pi + \beta\sigma\pi - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu}{\mu(\sigma + \mu)} \\ &= \frac{\beta\mu\pi + \beta\sigma\pi}{\mu(\sigma + \mu)} - \beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu. \end{aligned} \quad (20)$$

Jika

$$\begin{aligned} \frac{\beta\mu\pi + \beta\sigma\pi}{\mu(\sigma + \mu)} &= \frac{a}{b}, \\ -\beta\phi\sigma\pi - \alpha\mu^2 - \alpha\sigma\mu - \theta\mu^2 - \theta\sigma\mu &= -c, \\ \lambda_4 &= \frac{a}{b} - c, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \lambda_4 &> 0 \text{ jika } \frac{a}{b} > c, \\ \lambda_4 &< 0 \text{ jika } \frac{a}{b} < c, \\ \lambda_4 &< 0 \text{ untuk } \frac{a}{b} < c. \end{aligned}$$

λ_4 merupakan bagian real negatif yang telah memenuhi syarat titik stabil. Maka $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$, mempunyai nilai eigen negatif untuk memenuhi syarat titik stabil, dengan begitu titik endemik dapat dikatakan stabil. Dititik endemik $E_1 = (s, v, i, r) = \left(\frac{\pi}{\beta I + \sigma + \mu}, \frac{\pi\sigma}{\beta I(\beta I - \beta I\phi) + 2\mu + \sigma}, \frac{\beta I + 2\sigma + 3\mu - \beta I(\beta I - \beta I\phi) + \beta I\phi(\beta I - \beta I\phi) + 2\mu\phi + \sigma\phi}{-\beta\pi - \beta\pi\sigma + \beta\pi\sigma\phi + \alpha + \theta}, \frac{\theta I}{\mu} \right)$. Kemudian *Basic Reproduction Number* (R_0) dari titik non endemik $E_0 = (s, v, i, r) = \left(\frac{\pi}{\sigma + \mu}, \frac{\sigma\pi}{(\sigma + \mu)\mu}, 0, 0 \right)$, karena $S = \frac{\pi}{\sigma + \mu}$, $V = \frac{\sigma\pi}{(\sigma + \mu)\mu}$. Maka substitusikan ke $R_0 = \frac{\beta S + (1 - \phi)\beta V}{(\alpha + \theta)}$ sehingga $R_0 = \frac{\beta\pi(\sigma - \phi\sigma + \mu)}{(\sigma + \mu)\mu(\alpha + \theta)}$. Dilihat dari nilai eigen di titik non endemik maka $\frac{\sigma\pi}{(\sigma + \mu)\mu} < 1$, atau $R_0 < 1$, maka bebas penyakit atau R_0 stabil.

4. ANALISIS NUMERIK

4.1. Metode Runge-Kuta Fehlberg. Metode Runge-Kutta Fehlberg merupakan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang dibangun oleh pasangan Runge-Kutta orde 4 dan orde 5. Solusi kedua pasangan tersebut digunakan untuk mencari lokal error dari metode Runge-Kutta orde 4, yaitu metode Runge-Kutta orde 5 dianggap sebagai solusi sebenarnya. Lokal error tersebut digunakan untuk menentukan ukuran langkah iterasi sehingga

panjang iterasi dapat berubah sesuai toleransi error yang diberikan yaitu jika memenuhi toleransi error maka langkah iterasi diterima, jika kebalikannya maka langkah iterasi diperkecil ini adalah langkah untuk mengontrol lokal error sehingga dapat menjamin global error tetap terkontrol. Untuk membangun metode Runge-Kutta Fehlberg berikut diberikan persamaan-persamaan diferensial pembangun metode tersebut (Atkinson dan Han, [2]).

$$v_0 = f(x_n, y_n) \tag{21}$$

$$v_i = f\left(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} v_j\right), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{22}$$

Metode Runge-Kutta orde 4 dibentuk sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^4 c_i v_i. \tag{23}$$

Sedangkan metode Runge-Kutta orde 5 sebagai berikut:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^5 d_i v_i. \tag{24}$$

Untuk koefisien a_i, b_{ij}, c_i, d_i disajikan dalam Tabel 2 dan Tabel 3.

TABEL 2. Koefisien Fehlberg a_i, b_{ij} .

i	a_i	b_{i0}	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}
1	1/4	1/4				
2	3/8	3/32	9/32			
3	12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197		
4	1	439/216	-8	3680/513	-845/4104	
5	1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40

TABEL 3. Koefisien Fehlberg c_i, d_i .

i	0	1	2	3	4	5
c_i	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	
d_i	16/135	0	6656/12,825	28,561/56,430	-9/50	2/55

Lokal error dalam Runge-Kutta orde 4 ditaksir oleh $T_{n+1} \approx \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}$ dimana \hat{y}_{n+1} solusi Runge-Kutta orde 5 dianggap sebagai solusi sebenarnya.

Merujuk pada Tabel 2 dan Tabel 3 untuk koefisien-koefisien a_i, b_{ij}, c_i, d_i maka diperoleh pasangan solusi Runge-Kutta orde 4 dan orde 5 yang membentuk metode Runge-Kutta Fehlberg sebagai berikut.

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{25}{216} v_0 + \frac{1408}{2565} v_2 + \frac{2197}{4104} v_3 - \frac{1}{5} v_4 \right), \tag{25}$$

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \left(\frac{16}{135} v_0 + \frac{6656}{12825} v_2 + \frac{28561}{56430} v_3 - \frac{9}{50} v_4 + \frac{2}{55} v_5 \right). \tag{26}$$

Dengan memasukan koefisien-koefisien yang ada dalam Tabel 2 maka persamaan (21) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$v_1 = f \left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}hv_0 \right) \quad (27)$$

$$v_2 = f \left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}hv_0 + \frac{9}{32}hv_1 \right) \quad (28)$$

$$v_3 = f \left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}hv_0 - \frac{7200}{2197}hv_1 + \frac{7296}{2197}hv_2 \right) \quad (29)$$

$$v_4 = f \left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}hv_0 - 8hv_1 + \frac{3680}{513}hv_2 - \frac{845}{4104}hv_3 \right) \quad (30)$$

$$v_5 = f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}hv_0 + 2hv_1 - \frac{3544}{2565}hv_2 + \frac{1859}{4104}hv_3 - \frac{11}{40}hv_4 \right). \quad (31)$$

Persamaan-persamaan (27), (28), (29), (30), (31) bersama dengan koefisien-koefisien dalam Tabel 3 digunakan untuk mencari solusi $s_0 - s_5$, $v_0 - v_5$, $i_0 - i_5$, dan $r_0 - r_5$ dalam masing-masing solusi Runge-Kutta orde 4 dan orde 5. Solusi Runge-Kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$S_{n+1} = S_n + h \left(\frac{25}{216}s_0 + \frac{1408}{2565}s_2 + \frac{2197}{4104}s_3 - \frac{1}{5}s_4 \right), \quad (32)$$

$$V_{n+1} = V_n + h \left(\frac{25}{216}v_0 + \frac{1408}{2565}v_2 + \frac{2197}{4104}v_3 - \frac{1}{5}v_4 \right), \quad (33)$$

$$I_{n+1} = I_n + h \left(\frac{25}{216}i_0 + \frac{1408}{2565}i_2 + \frac{2197}{4104}i_3 - \frac{1}{5}i_4 \right), \quad (34)$$

$$R_{n+1} = R_n + h \left(\frac{25}{216}r_0 + \frac{1408}{2565}r_2 + \frac{2197}{4104}r_3 - \frac{1}{5}r_4 \right), \quad (35)$$

dan untuk solusi Runge-Kutta orde 5 diperoleh sebagai berikut

$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n + h \left(\frac{16}{135}s_0 + \frac{6656}{12825}s_2 + \frac{28561}{56430}s_3 - \frac{9}{50}s_4 + \frac{2}{55}s_5 \right), \quad (36)$$

$$\hat{V}_{n+1} = \hat{V}_n + h \left(\frac{16}{135}v_0 + \frac{6656}{12825}v_2 + \frac{28561}{56430}v_3 - \frac{9}{50}v_4 + \frac{2}{55}v_5 \right), \quad (37)$$

$$\hat{I}_{n+1} = \hat{I}_n + h \left(\frac{16}{135}i_0 + \frac{6656}{12825}i_2 + \frac{28561}{56430}i_3 - \frac{9}{50}i_4 + \frac{2}{55}i_5 \right), \quad (38)$$

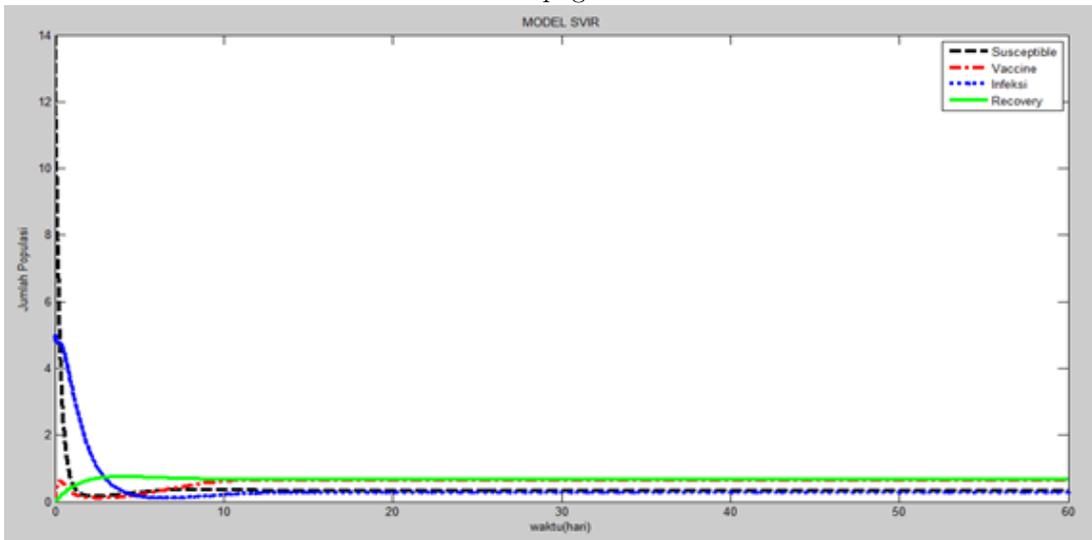
$$\hat{R}_{n+1} = \hat{R}_n + h \left(\frac{16}{135}r_0 + \frac{6656}{12825}r_2 + \frac{28561}{56430}r_3 - \frac{9}{50}r_4 + \frac{2}{55}r_5 \right). \quad (39)$$

Sebagai gambaran penyelesaian model SVIR menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg 45 dengan data asumsi pada kasus rentan, vaksin, infeksi dan sembuh dari Covid-19, menghasilkan solusi seperti diperlihatkan pada Gambar 2.

Untuk masing-masing solusi kasus rentan, vaksin, infeksi dan sembuh digambarkan dalam grafik-grafik pada Gambar 3, 4, 5, dan 6.

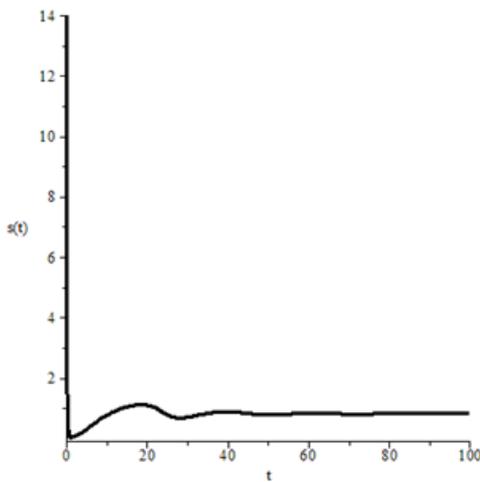
Berdasarkan pada Gambar 3 bahwa populasi rentan mengalami naik turun, kejadian titik puncak berada di hari ke-20 dan mengalami konstan di hari ke-80. Artinya orang yang terkena Covid-19 dapat mengalami kenaikan pada hari ke-20 dan mengalami penurunan pada hari ke-30, setelahnya dapat terkontrol pada hari ke-80. Berdasarkan pada Gambar 4 bahwa orang yang divaksin mengalami titik puncak berada pada hari ke-21 setelahnya laju vaksinasi mulai konstan pada hari ke-90. Artinya populasi yang terkena Covid-19 mengalami kenaikan di hari ke-21 dan mengalami penurunan pada hari ke-32, setelahnya pada hari ke-90 covid-19 dapat terkontrol.

2.png



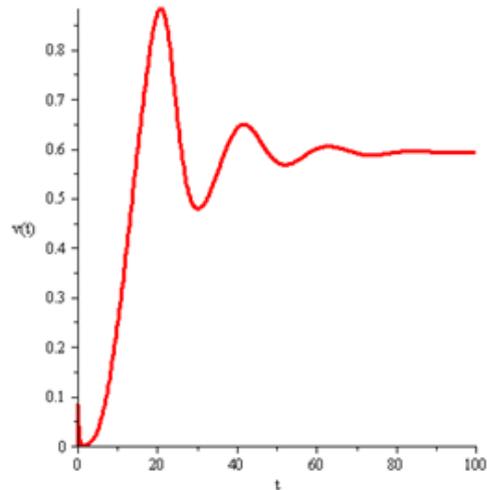
GAMBAR 2. Model SVIR pada ODE 45.

3.png



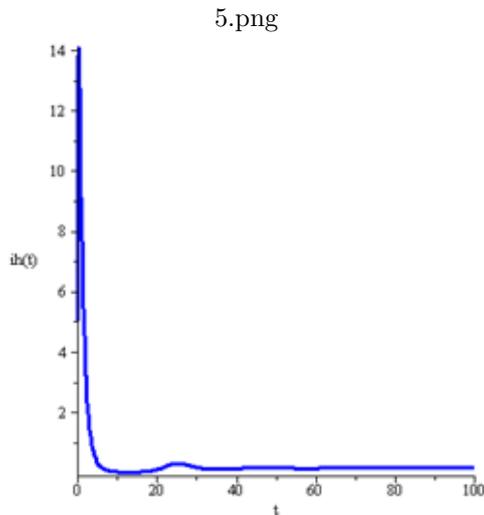
GAMBAR 3. Model Populasi Rentan.

4.png

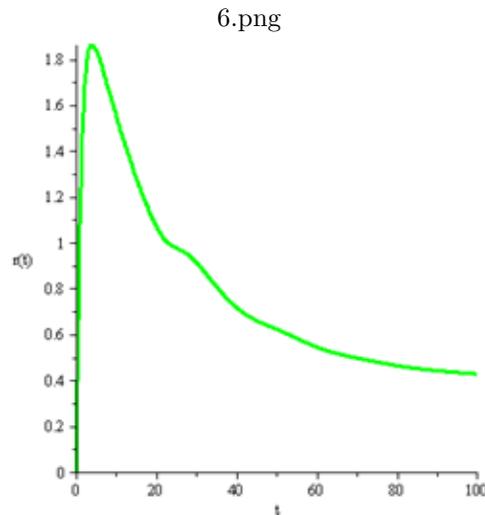


GAMBAR 4. Model Populasi Vaksin.

Berdasarkan pada Gambar 5 telah terjadi kenaikan orang yang terkena Covid-19 pada hari ke-1, kemudian menurun di hari ke-10, setelahnya naik turun, kemudian dapat terkontrol pada hari ke-60, artinya pada hari ke-10 orang yang divaksin dapat menekan terjadinya kasus Covid-19. Berdasarkan pada Gambar 6 bahwa populasi sembuh terjadi kenaikan pada hari ke-3 dan melandari sampai hari ke-100, artinya orang yang terkena Covid-19 mengalami secara terus menerus mengalami penurunan dari terjadinya kenaikan pada hari ke-3 sampai menurun pada hari ke-100.



GAMBAR 5. Model Populasi Rentan.



GAMBAR 6. Model Populasi Vaksin.

5. SIMPULAN

Adanya program vaksinasi dapat menjadi solusi pencegahan penyebaran Covid-19. Untuk membuktikan hal tersebut, kami telah menggunakan model SVIR. Berdasarkan model tersebut, pengaruh dari faktor vaksinasi dapat menekan penyebaran Covid-19. Hasil penelitian menunjukkan, bahwa awal mula jumlah kasus mengalami kenaikan karena pemberian vaksin belum merata, kemudian mengalami penurunan setelah adanya pemberian vaksinasi secara merata. Hari selanjutnya mengalami sedikit kenaikan hal tersebut dikarenakan populasi yang divaksin belum sepenuhnya kebal terhadap imun yang dimilikinya, setelah hari berikutnya mendapatkan vaksin merata dan imun yang ada dalam tubuh seseorang sudah dapat dipenuhi, maka setelah hari ke-60 angka penyebaran penyakit Covid-19 mulai dapat dikontrol karena program vaksinasi ke setiap orang sudah dilakukan secara merata. Selanjutnya untuk analisis kestabilan model SVIR dapat diperoleh dari titik non endemik. E_0 adalah stabil karena memiliki nilai eigen negatif, titik endemik E_1 dapat dikatakan stabil karena mempunyai nilai eigen negatif, dan $R_0 < 1$ artinya penyebaran penyakit Covid-19 di suatu wilayah dapat menghilang atau R_0 stabil. Sementara solusi numerik model SVIR dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg dapat dilihat pada Gambar 2, yang menunjukkan berakhirnya penyebaran Covid-19 yaitu hari ke-60. Sehingga program vaksinasi dalam pencegahan penyebaran penyakit Covid-19 dapat dikatakan efektif.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Acuña-Zegarra, M.A., Díaz-Infante, S., Baca-Carrasco, D. and Olmos-liceaga, D., 2021, Mathematical Biosciences COVID-19 Optimal Vaccination Policies : A Modeling Study on Efficacy, Natural and Vaccine-Induced Immunity Responses, *Mathematical Biosciences*, Volume 337, Page 108614.
- [2] Atkinson, K. and Han, W., 2003, *Elementary Numerical Analysis*, University of Iowa.
- [3] Comunian, A., Gaburro, R., and Giudici, M., 2020, Inversion of a SIR-based model: A critical analysis about the application to COVID-19 epidemic, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 413, Page 132674.
- [4] Forde, J.E., and Ciupe, S.M., 2021, Quantification of the tradeoff between test sensitivity and test frequency in a COVID-19 epidemica multi-scale modeling approach, *Viruses*, volume 13, Issue 3, Page 457.

- [5] Libotte, G.B., Lobato, F.S., Platt, G.M., and Neto, A.J.S., 2020, Determination of an optimal control strategy for vaccine administration in COVID-19 pandemic treatment, *Computer methods and programs in biomedicine*, Volume 196, Page 105664.
- [6] Lin, Q., *et al.*, 2020, A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action, *International journal of infectious diseases*, Volume 93, Pages 211-216.
- [7] Paolucci, S., *et al.*, 2021, EBV DNA increase in COVID-19 patients with impaired lymphocyte subpopulation count, *International Journal of Infectious Diseases*, Volume 104, Pages 315-319.
- [8] Roda, W.C., Varughese, M.B., Han, D., and Li, M.Y., 2020, Why is it difficult to accurately predict the COVID-19 epidemic?, *Infectious disease modelling*, Volume 5, Pages 271-281.
- [9] Salim, N., *et al.*, 2020, COVID-19 epidemic in Malaysia: Impact of lockdown on infection dynamics, *medrxiv*.
- [10] Zhu, C.C. and Zhu, J., 2020, Spread trend of COVID-19 epidemic outbreak in China: using exponential attractor method in a spatial heterogeneous SEIQR model, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Volume 17, Issue 4, Pages 3062-3087.