

Model Matematika Arus Listrik dengan Persamaan Diferensial Metode Koefisien Tak Tentu

UTTI MARINA RIFANTI¹, TESA NUR PADILAH², ISMI WIDYANINGRUM³

¹Fakultas Teknologi Telekomunikasi dan Elektro, Institut Teknologi Telkom Purwokerto
marina@ittelkom-pwt.ac.id

²Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Singaperbangsa Karawang
tesa.nurpadilah@staff.unsika.ac.id

³Prodi Pendidikan Matematika, STKIP Syekh Manshur
ismiw3009@gmail.com

Abstrak

Persamaan diferensial dapat digunakan untuk merumuskan berbagai fenomena alam yang memuat perubahan kuantitas, salah satunya masalah dinamika arus listrik. Banyaknya muatan listrik yang mengalir pada suatu waktu dapat ditentukan dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial. Pada arus listrik yang mengalir dalam suatu rangkaian tertutup (*loop*) diterapkan Hukum Kirchoff. Selanjutnya, untuk menentukan banyaknya muatan yang mengalir pada suatu rangkaian pada waktu t dapat digunakan penyelesaian dengan menggunakan persamaan diferensial tingkat- n . Jika bentuk persamaan yang diperoleh adalah persamaan diferensial tak homogen dengan koefisien konstanta, maka persamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Untuk menganalisa perilaku perubahan kuat arus tersebut, dapat diplot grafik simulasinya dengan menggunakan Maple.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial, Arus Listrik, Hukum Kirchoff.

Abstract

Differential equations can be used to form various dynamic natural phenomena, such as the dynamics of electric current. The amount of electrical charge that flows at a time can be determined by the solution of differential equations. Electric current flowing in a closed circuit is applied to Kirchoff's Law. Furthermore, to determine the amount of charge flowing in a circuit at time t , a solution can be used using higher order of differential equations. If these equations are non-homogeneous differential equations with constant coefficients, then the differential equation can be solved by the undetermined coefficient method. To analyze the behavior of changes in the strength of the current, the simulation graph can be plotted using Maple.

Keywords: Differential Equations, Electric Current, Kirchoff Law.

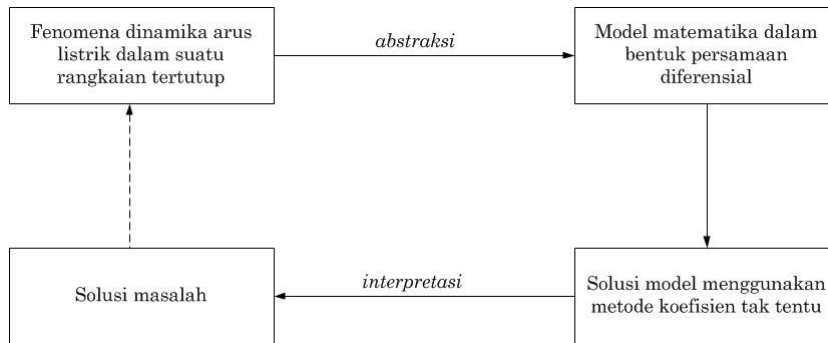
1. PENDAHULUAN

Dalam dunia elektronika kita mengenal istilah arus listrik yang mengalir dalam suatu rangkaian tertutup (loop). Rangkaian tertutup adalah suatu rangkaian yang terdiri dari sumber tegangan dan beban yang dihubungkan dengan suatu penghantar, sehingga menghasilkan arus listrik [1]. Teori tentang rangkaian listrik sangat penting untuk dipelajari karena digunakan dalam kehidupan sehari-hari [2]. Teori rangkaian listrik ini berasal dari hukum dasar fisika yang ditemukan oleh Colomb (1885), Ohm (1827), Faraday (1831), dan Kirchoff (1857) [3]. Pada konduktor elektrolit terdapat muatan bebas berupa ion-ion positif dan negatif yang mudah bergerak. Jika dalam konduktor terdapat suatu medan listrik, maka muatan-muatan tersebut akan bergerak atau mengalir, dan gerakan dari muatan-muatan ini dinamakan arus listrik. Rangkaian listrik terdiri dari sejumlah elemen rangkaian tunggal yang saling berhubungan. Pada umumnya, rangkaian listrik mengandung paling sedikit satu sumber tegangan atau arus [4]. Dalam listrik arus searah dalam suatu rangkaian listrik sederhana dikenal adanya Hukum Kirchoff. Hukum Kirchoff ditemukan oleh fisikawan asal Jerman, Gustav Robert Kirchoff. Kirchoff menjelaskan hukumnya ke dalam dua bagian, yaitu Hukum I Kirchoff dan Hukum II Kirchoff [5].

Terdapat beberapa penelitian yang berkaitan dengan rangkaian listrik. Sebagian di antaranya menggunakan model matematika untuk melakukan simulasi dan menentukan solusi dari rangkaian listrik tersebut. Yuniarsi (2011) menggunakan beberapa macam metode numerik untuk menentukan solusi dari model matematika arus listrik dalam suatu rangkaian tertutup [6]. Selanjutnya, Al Firman (2015) menggunakan teori graf dalam bentuk *spanning tree* dalam menentukan hambatan total dari suatu rangkaian listrik [7]. Kemudian, Silmi dan Rina (2017) menggunakan metode numerik Eliminasi Gauss dengan bantuan Matlab untuk menentukan solusi dari model matematika arus listrik dalam suatu rangkaian tertutup [8]. Selain dengan metode numerik dan teori graf, model matematika dapat juga diimplementasikan dalam bentuk lainnya. Salah satu bentuk dari model matematika yang cukup penting adalah persamaan diferensial [9]. Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung variabel tak bebas beserta turunannya terhadap variabel bebas. Dari persamaan diferensial tersebut, dapat ditentukan sebuah solusi menggunakan metode-metode tertentu berdasarkan bentuk umum persamaan diferensial yang dihasilkan dari model. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial adalah metode koefisien tak tentu [10]. Arus listrik yang mengalir saat t dapat ditentukan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial dengan syarat awal tertentu. Sehingga dapat ditentukan banyaknya arus yang mengalir pada suatu rangkaian saat waktu t . Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai model matematika arus listrik pada suatu rangkaian listrik tertutup menggunakan persamaan diferensial metode koefisien tak tentu.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah metode penelitian deskriptif dan kualitatif. Adapun fenomena yang dibahas dalam penelitian ini merupakan fenomena yang terdapat dalam kehidupan sehari-hari, yaitu rangkaian listrik. Pada penelitian ini, penulis mendeskripsikan suatu masalah atau fenomena yang berupa besar arus pada suatu rangkaian tertutup saat waktu t . Seperti yang telah dipaparkan sebelumnya dalam latar belakang, penulis menggunakan model matematika dalam menggambarkan dinamika arus listrik pada suatu rangkaian tertutup. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini merupakan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Setelah diformulasikan dalam model matematika dalam bentuk persamaan diferensial tersebut kemudian akan ditentukan solusi rangkaian listrik menggunakan metode koefisien tak tentu. Dari solusi matematis tersebut kemudian dilakukan interpretasi masalah sesuai dengan fenomena awalnya. Adapun alur penelitian secara keseluruhan dapat dilihat dari Gambar 1 berikut.



GAMBAR 1. Gambaran rangkaian sederhana sesuai Hukum I Kirchoff

Pada penelitian ini dibutuhkan beberapa teori dasar yang berkaitan dengan rangkaian listrik, seperti definisi arus listrik, Hukum Kirchoff, persamaan diferensial, dan metode koefisien tak tentu. Berikut ini merupakan penjelasan dari beberapa teori dasar tersebut.

2.1. Arus Listrik. Arus listrik adalah gerakan dari muatan-muatan pada suatu konduktor. Arus listrik dapat diukur dalam satuan *Coulomb/second* (Cs^{-1}) atau *Ampere* (A), sedangkan muatan listrik diukur dalam satuan *Coulomb*. Jika arus listrik konstan, maka besar arus (I) dalam satuan *Ampere* dapat dinyatakan dalam Persamaan (1) berikut

$$I = \frac{Q}{t} \tag{1}$$

dengan

I : arus listrik (*Coulomb per second*),

Q : muatan listrik (*Coulomb*),

t : waktu (*second*).

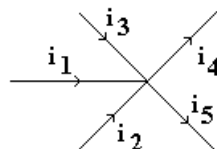
Persamaan (1) dapat dituliskan dalam bentuk fungsi integral sebagai berikut

$$Q = \int I dt \tag{2}$$

Sedangkan secara umum, arus listrik yang mengalir saat t dapat ditentukan menggunakan:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{3}$$

2.2. Hukum Kirchoff. Hukum I Kirchoff dan Hukum II Kirchoff ditemukan oleh Gustav Robert Kirchoff. Hukum Kirchoff menjelaskan tentang suatu rangkaian listrik sederhana. Rangkaian listrik tersebut terdiri dari saklar, baterai, dan lampu. Jika saklar terbuka, maka lampu tidak menyala karena arus listrik belum mengalir. Namun jika saklar tertutup, maka lampu akan menyala karena arus listrik mengalir dari kutub positif menuju kutub negatif baterai. Bunyi dari hukum I Kirchoff adalah total dari kuat arus yang masuk ke percabangan akan sama dengan total dari kuat arus yang keluar dari percabangan. Berikut adalah ilustrasi dari Hukum Kirchoff I dengan $i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$.



GAMBAR 2. Gambaran rangkaian sederhana sesuai Hukum I Kirchoff

Dari Hukum I Kirchoff tersebut diperoleh persamaan

$$\sum I = 0 \quad (4)$$

Hukum II Kirchoff disebut juga Hukum Rangkaian Tertutup berisi bahwa penjumlahan tegangan pada masing-masing komponen penyusun yang membentuk suatu lintasan tertutup bernilai nol. Jumlah tegangan atau beda potensial dalam suatu rangkaian tertutup sama dengan nol. Atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum V = \sum I.R = 0 \quad (5)$$

Dalam Hukum II Kirchoff perlu diperhatikan bahwa jika arah arus searah dengan arah *loop*, maka arus bertanda positif. Sebaliknya, jika arah arus berlawanan dengan arah *loop*, maka arus bertanda negatif. Selain itu, jika kutub positif sumber tegangan dijumpai terlebih dahulu daripada kutub negatifnya, maka GGL akan bertanda positif. Sebaliknya, jika kutub negatif sumber tegangan dijumpai terlebih dahulu daripada kutub positifnya, maka GGL akan bertanda negatif [11].

Berikut ini adalah tabel voltage drop dari beberapa jenis elemen pada suatu rangkaian listrik:

TABEL 1. *Voltage Drop* dari beberapa rangkaian listrik

Circuits Element	Voltage Drop
Induktor	$L \frac{di}{dt}$
Resistor	$R.I$
Capacitor	$\frac{1}{C} Q$

2.3. Persamaan Diferensial. Bentuk umum dari persamaan diferensial linier tingkat n adalah sebagai berikut:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (6)$$

Penyelesaian dari Persamaan (6) adalah

$$y = y_c + y_p \quad (7)$$

dengan

y_c = penyelesaian persamaan (6) dalam bentuk penyelesaian komplementer $g(x) = 0$

y_p = penyelesaian khusus persamaan (6) dengan nilai awal tertentu.

2.4. Metode Koefisien Tak Tentu. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (6) adalah metode koefisien tak tentu. Adapun langkah-langkah metode koefisien tak tentu adalah sebagai berikut [10].

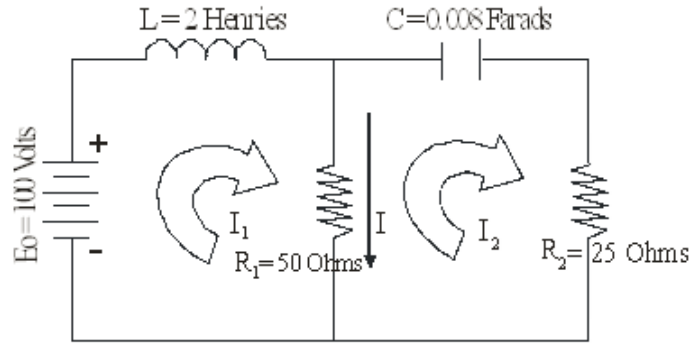
- (1) Menentukan penyelesaian komplementer y_c .
- (2) Menggunakan operator penghapus fungsi $g(x)$, tentukan penyelesaian umum sesuai dengan Persamaan (7).
- (3) Kemudian tentukan penyelesaian khusus y_p .

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhatikan rangkaian tertutup dua *loop* seperti yang terlihat pada Gambar 3 dengan hambatan (R dalam ohm), kumparan (L dalam henry), kapasitor (C dalam farad), dan tegangan (E dalam volt) berikut ini!

Keterangan gambar:

R = Tahanan dalam Ohm



GAMBAR 3. Perjalanan arus listrik pada loop sederhana

C = kapasitor dalam Farad

L = Induktor dalam Henry

E_0 = Gaya elektromotif dalam Volt

I = Arus yang mengalir pada rangkaian dalam Ampere

Hukum II Kirchoff berbunyi penjumlahan dari tegangan dalam sebuah rangkaian listrik tertutup sederhana akan sama dengan nol. Diketahui bahwa penurunan pada tahanan, kapasitor, dan induktor masing-masing adalah $R.I$, $\frac{1}{C}Q$, dan $L\frac{dI}{dt}$. Sedangkan Q adalah muatan dalam kapasitor, dan E_0 adalah tegangan. Dengan menerapkan hukum Kirchoff tersebut akan diperoleh $\sum V = 0$ sehingga dari loop 1 diperoleh

$$\begin{aligned}
 -E + V_L + V_{R_1} &= 0 \\
 \Leftrightarrow E_0 - V_L - V_{R_1} &= 0 \\
 \Leftrightarrow E_0 - L\frac{dI_1}{dt} - R_1I &= 0 \\
 \Leftrightarrow E_0 - L\frac{dI_1}{dt} - R_1(I_1 - I_2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow L\frac{dI_1}{dt} &= E_0 - R_1(I_1 - I_2) \\
 \Leftrightarrow \frac{dI_1}{dt} &= \frac{E_0}{L} - \frac{R_1}{L}I_1 + \frac{R_1}{L}I_2
 \end{aligned} \tag{8}$$

Selanjutnya dari loop 2 diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 V_C - V_{R_1} + V_{R_2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow V_C - R_1I + R_2I_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow V_C - R_1(I_1 - I_2) + R_2I_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{C}Q - R_1I_1 + R_1I_2 + R_2I_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{C}I_2 - R_1\frac{dI_1}{dt} + R_1\frac{dI_2}{dt} + R_2\frac{dI_2}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Substitusi Persamaan (8) ke Persamaan (9) sehingga diperoleh:

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{R_1E_0}{(R_1 + R_2)L} - \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)L}I_1 + \left(\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)L}I_2 - \frac{1}{C(R_1 + R_2)}I_2 \right) \tag{10}$$

Substitusi nilai dari E_0 , L , dan R_1 ke dalam Persamaan (8) dan Persamaan (10) sehingga akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= 50 - 25I_1 + 25I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \frac{100}{3} - \frac{50}{3}I_1 + 15I_2\end{aligned}\quad (11)$$

Dengan menurunkan kedua ruas dari persamaan pertama pada Sistem (11), maka diperoleh

$$I_1'' = -25I_1' + 25I_2' \quad (12)$$

Substitusi persamaan kedua pada Sistem (11) ke Persamaan (12) sehingga diperoleh

$$I_1'' + 10I_1' + \frac{125}{3}I_1 = \frac{250}{3} \quad (13)$$

Persamaan (13) merupakan persamaan diferensial tak homogen dengan koefisien konstanta. Sehingga Persamaan (13) akan diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Langkah pertama, ditentukan persamaan karakteristik dari Persamaan (13) tersebut. Persamaan karakteristik dari Persamaan (13) adalah sebagai berikut:

$$\lambda^2 + 10\lambda + \frac{125}{3} = 0 \quad (14)$$

Dari Persamaan (14) diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -5 + \frac{5}{3}\sqrt{6}i \\ \lambda_2 &= -5 - \frac{5}{3}\sqrt{6}i\end{aligned}\quad (15)$$

Jadi diperoleh penyelesaian komplementer sebagai berikut

$$I_C = c_1e^{(-5+\frac{5}{3}\sqrt{6}i)t} + c_2e^{(-5-\frac{5}{3}\sqrt{6}i)t} \quad (16)$$

Dari Persamaan (13) dapat diketahui operator penghapus

$$g(t) = \frac{250}{3} \quad (17)$$

sehingga diperoleh persamaan diferensial homogen sebagai berikut

$$\begin{aligned}\left(D^2 + 10D + \frac{125}{3}\right)I &= \frac{250}{3} \\ \Leftrightarrow D\left(D^2 + 10D + \frac{125}{3}\right)I &= 0\end{aligned}\quad (18)$$

Sehingga dari Persamaan (18) diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -5 + \frac{5}{3}\sqrt{6}i; \quad \lambda_2 = -5 - \frac{5}{3}\sqrt{6}i; \quad \lambda_3 = 0 \quad (19)$$

Jadi diperoleh I_c dan I_p dari untuk $I_1(t)$ sebagai berikut

$$I_1(t) = c_1e^{(-5+\frac{5}{3}\sqrt{6}i)t} + c_2e^{(-5-\frac{5}{3}\sqrt{6}i)t} + c_3 \quad (20)$$

Misalkan $I_p = c_3$, sehingga $I_p = 2$ dan diperoleh

$$I_1(t) = (c_1 + c_2)e^{-5t} \cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + (c_1 - c_2)ie^{-5t} \sin\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + 2 \quad (21)$$

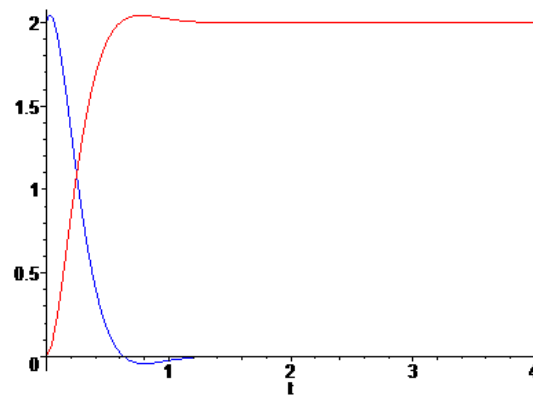
Substitusikan Persamaan (21) ke persamaan pertama pada Sistem (11), sehingga diperoleh

$$I_2(t) = c_3e^{-5t} \cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + c_4e^{-5t} \sin\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) \quad (22)$$

dengan

$$\begin{aligned} c_3 &= \left(\frac{4}{5}(c_1 + c_2) + \frac{1}{15}\sqrt{6}i(c_1 - c_2) \right) \\ c_4 &= \left(\frac{4}{5}i(c_1 - c_2) - \frac{1}{15}\sqrt{6}(c_1 + c_2) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Jika digunakan nilai awal $I_1(0) = 0$ dan $I_2(0) = 2$ terhadap penyelesaian umum tersebut, maka solusi Sistem (11) dapat disimulasikan menggunakan program Maple dengan plot grafik sebagai berikut.



GAMBAR 4. Grafik simulasi perubahan arus listrik

Keterangan:

Warna Merah: Grafik perubahan I_1 pada waktu t

Warna Biru: Grafik perubahan I_2 pada waktu t

Dari Gambar 4 dapat diketahui perubahan arus (I) baik I_1 maupun I_2 pada waktu t . Untuk I_1 pada keadaan awal ($t = 0$) bernilai nol karena belum ada arus listrik. Kemudian lama-kelamaan muatan listrik akan meningkat hingga pada akhirnya akan stabil di titik 2. Sebaliknya, I_2 pada keadaan awal ($t = 0$) bernilai 2 atau dengan kata lain sudah ada arus listrik yang mengalir. Kemudian lama-kelamaan banyaknya muatan listrik akan berkurang hingga pada akhirnya akan habis. Sesuai dengan bunyi Hukum Kirchoff bahwa arus yang masuk sama dengan jumlah arus yang keluar. Dengan kata lain, muatan yang mengalir di dalam suatu rangkaian listrik tertutup selalu sama. Namun, ada kalanya dalam rentang waktu tertentu arah arus berlawanan dengan arah *loop*, sehingga arus bertanda negatif seperti yang terlihat pada Gambar (4) saat $t = 0.8$.

4. SIMPULAN

Banyaknya arus listrik yang mengalir pada suatu waktu dapat ditentukan dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial. Dinamika arus listrik yang mengalir dalam suatu rangkaian tertutup (*loop*) seperti pada Gambar 3 dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= 50 - 25I_1 + 25I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \frac{100}{3} - \frac{50}{3}I_1 + 15I_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Dari sistem tersebut diperoleh solusi umum sebagai berikut.

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (c_1 + c_2) e^{-5t} \cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + (c_1 - c_2) i e^{-5t} \sin\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + 2 \\ I_2(t) &= c_3 e^{-5t} \cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) + c_4 e^{-5t} \sin\left(\frac{5}{3}\sqrt{6}t\right) \end{aligned} \quad (25)$$

dengan

$$\begin{aligned} c_3 &= \left(\frac{4}{5}(c_1 + c_2) + \frac{1}{15}\sqrt{6}i(c_1 - c_2)\right) \\ c_4 &= \left(\frac{4}{5}i(c_1 - c_2) - \frac{1}{15}\sqrt{6}(c_1 + c_2)\right) \end{aligned} \quad (26)$$

Dari hasil simulasi diperoleh hasil bahwa besar arus yang mengalir saat t pada *loop* 1 dan *loop* 2 berbanding terbalik. Jika arus pada *loop* 1 mengalami kenaikan, maka arus pada *loop* 2 akan menurun. Sebaliknya jika arus pada *loop* 1 mengalami penurunan, maka arus pada *loop* 2 akan meningkat. Namun pada waktu yang lama akan stabil di titik tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wahyudi, "Analisis Hasil Belajar Mahasiswa Pada Pokok Bahasan Hukum Ohm Dan Kirchoff Dalam Mata Kuliah Elektronika Dasar I," *Jurnal Pendidikan Fisika dan Teknologi*, vol. 1, no. 2, pp. 129-135, 2015.
- [2] A. R. Farizki, H. N. Palit and A. Setiawan, "Aplikasi Pembelajaran Rangkaian Listrik Sederhana Berbasis Android," *Jurnal Infra*, vol. 4, no. 1, pp. 41-47, 2016.
- [3] Khairunnisa, Rangkaian Listrik, Yogyakarta: Deepublish, 2018.
- [4] M. Nahvi and J. A. Edminister, Rangkaian Listrik, Jakarta: Erlangga, 2003.
- [5] I. S. Hendrayani, "Bermain Peran Bersama Kelompok Dalam Pembelajaran Arus Searah Loop Sederhana Untuk Program Lintas Minat Fisika," *Jurnal Ilmiah P2M STKIP Siliwangi*, vol. 5, no. 2, pp. 69-74, 2018.
- [6] Y. Rahayu, "Penerapan Metode Numerik pada Rangkaian Listrik," *Techno.COM*, pp. 145-52, 2011.
- [7] A. Firman, "Menentukan Hambatan Total pada Rangkaian Listrik Menggunakan Spanning Tree", Universitas Islam Negeri Alauddin, Makassar, 2015.
- [8] R. A. Silmi, "Implementasi Metode Eliminasi Gauss Pada Rangkaian Listrik Menggunakan Matlab," *Jurnal Ilmiah Teknologi Harapan*, vol. 6, no. 1, pp. 30-35, 2017.
- [9] M. T. Sitanggang, T. Ginting and T. R. Simbolon, "Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan Shock Absorber," *Jurnal Saintia Fisika*, vol. 6, no. 1, pp. 1-7, 2013.
- [10] E. J. Purcell and D. Varberg, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2, Jakarta: Erlangga, 2007.
- [11] R. Yusanti, "Kemampuan Menghitung Besar Arus Dan Besar Tegangan Pada Rangkaian Listrik Arus Searah Siswa Kelas X Jurusan Elektronika Industri SMK Negeri 2 Pekanbaru," *Jurnal Pendidikan dan Pengajaran*, vol. 2, no. 4, pp. 523-529, 2018.