

Matching Maksimum pada Graf Petersen Berarah Berdasarkan Multiplisitas Geometri Terbesar

ANITA BEKTI PRATIWI¹, TRIYANI²

¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Jl. dr. Seoparno 61 Karangwangkal Purwokerto 53122

Email: anitabektip@gmail.com, triyani@unsoed.ac.id

Abstrak

Matching pada graf berarah merupakan himpunan bagian dari himpunan sisi pada graf berarah tanpa simpul awal atau simpul akhir yang sama. Simpul-simpul *matching* pada graf berarah memiliki kaitan erat dengan multiplisitas geometri terbesar dari matriks ketetangaan graf berarah. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi *matching* maksimum pada graf Petersen berarah dengan pendekatan multiplisitas geometri terbesar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa *matching* maksimum pada graf Petersen berarah tanpa 2 siklus faktor berkaitan dengan multiplisitas geometri terbesar matriks ketetangaan graf. Graf Petersen berarah dengan 2 siklus faktor mempunyai *perfect matching* yang diperoleh dari bentuk kanonik kolom dari matriks ketetangaan graf berarah.

Kata Kunci: *Matching*, Multiplisitas geometri, Graf Petersen berarah, Siklus faktor.

Abstract

Matching in a directed graph is a subset of the edge set in a directed graph without the same starting or ending vertices. The matching vertices in a directed graph have a close relationship with the largest geometric multiplicity of the directed graph adjacency matrix. This study aims to identify the maximum matching on a directed Petersen graph with the largest geometric multiplicity approach. The results show that the maximum matching on a directed Petersen graph without 2 factor cycles is related to the largest geometric multiplicity of the adjacency matrix of the graph. A directed Petersen graph with 2 factor cycles has perfect matching obtained from the canonical column form of the directed graph adjacency matrix.

Keywords: *Matching*, Geometric multiplicity, Directed Petersen graph, Factor cycle.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bagian dari ilmu matematika diskrit yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang ilmuwan Swiss pada tahun 1736. Euler berhasil memecahkan masalah lintasan yang melalui jembatan dan wilayah di kota *Konigsberg*. Euler memodelkan masalah tersebut ke dalam graf di mana suatu wilayah direpresentasikan dengan sebuah simpul (*vertex*)

dan jembatan yang menghubungkan antar wilayah direpresentasikan sebagai sisi (*edge*). Secara umum, graf dapat menggambarkan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut, di mana setiap objek direpresentasikan dengan simpul dan hubungan antar objek direpresentasikan dengan sisi (Jensen dan Gutin, [1]). Hingga saat ini teori graf menjadi pokok bahasan yang menarik dan banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

Salah satu materi dalam teori graf adalah teori *matching*. Teori ini berawal dari masalah *matching* yang dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah perjodohan (*marriage problem*). Masalah perjodohan merupakan masalah bagaimana menentukan pasangan dari sekumpulan pria dan wanita dengan asumsi mereka telah saling mengenal. Masalah perjodohan ini sangat erat kaitannya dengan penentuan *matching* pada graf bipartit. *Matching* pada sebuah graf G merupakan sebuah himpunan sisi-sisi yang saling asing/bebas (*independent edge set*), sedangkan *matching* maksimum adalah *matching* yang memiliki kardinalitas terbesar.

Seiring dengan perkembangan ilmu dan teknologi, teori *matching* ini tidak hanya dapat digunakan untuk memahami struktur graf, tetapi juga dapat dikaitkan dengan masalah penting dalam aspek teoritis, seperti optimasi kombinatorial fisika kristal, dan teori penelitian komputer (Munir, [2]). Selain itu, teori *matching* juga berkaitan erat dengan masalah praktis dalam pengaturan kerja, alokasi sumber daya, aliran jaringan dan sebagainya (Xiong dan Zhu, [4]). *matching* maksimum merupakan salah satu inti permasalahan yang ada dalam teori *matching* (Read, [3]; Xiong dan Zhu [4]).

Pada umumnya pencarian *matching* maksimum pada graf difokuskan pada graf bipartite dan juga graf tak berarah. Pencarian *matching* maksimum pada graf berarah hanya sedikit penelitian yang telah dilakukan. Yang dan Xie [5] menggagas metode baru untuk mengidentifikasi *matching* maksimum pada graf berarah. Metode tersebut menggunakan pendekatan teori *matching* dengan multiplisitas geometri terbesar. Oleh karena itu pada penelitian ini dikaji masalah *matching* maksimum pada Graf Petersen berarah berdasarkan multiplisitas geometri terbesar.

2. ALGORITMA *Matching* PADA GRAF BERARAH

Berikut diberikan beberapa definisi dan landasan teori yang berkaitan dengan penelitian. Beberapa definisi dan teori yang digunakan merujuk pada Jensen dan Gutin [1], Xiong dan Zhu [4], Yang dan Xie [5], Anton [6], Chartrand, Lesniak, dan Zhang [7], Asmiati *et al.* [8], dan Larson [9].

2.1. Definisi dan Notasi.

Definisi 2.1. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong dari objek-objek yang disebut simpul dan E adalah himpunan sisi (mungkin kosong) yang menghubungkan sepasang simpul. Selanjutnya graf G dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Graf G yang setiap sisinya diberi orientasi arah disebut graf berarah (Jensen dan Gutin, [1]).

Definisi 2.2. Sub graf $H = (V_1, E_1)$ dari graf $G = (V, E)$ adalah graf yang himpunan titik dan sisinya merupakan himpunan bagian dari himpunan titik dan sisi pada Graf G . Dengan kata lain $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$ (Jensen dan Gutin, [1]).

Definisi 2.3. Matriks ketetanggaan pada graf berarah G dengan n titik adalah matriks bujur sangkar berordo n dengan elemen baris ke- i kolom ke- j bernilai 0, jika sisi yang menghubungkan titik i ke titik j tidak diberi arah dan bernilai 1 jika sebaliknya (Anton, [6]).

Definisi 2.4. Misalkan D adalah sembarang graf berarah. *Matching* pada graf berarah (M_D) adalah himpunan bagian dari himpunan sisi pada graf berarah tanpa simpul awal atau simpul akhir yang sama. Artinya, tidak ada dua sisi berarah di M_D yang memiliki simpul awal atau simpul akhir yang sama. Sebuah simpul dikatakan *matching* jika simpul tersebut merupakan simpul akhir dari sisi *matching*. *Matching* maksimum pada graf berarah adalah *matching* dengan

kardinalitas terbesar yang dinotasikan dengan M_D^* . Matching maksimum M_D^* disebut *perfect matching* jika semua simpul pada graf berarah merupakan simpul *matching*. Jika M_D^* suatu *perfect matching*, maka $|M_D^*| = N$, dengan N adalah jumlah simpul pada graf berarah (Yang dan Xie, [5]).

Definisi 2.5. Sikel faktor dalam sebuah graf adalah subgraf yang membentuk lintasan dengan simpul awal dan akhir yang sama dengan sisi yang berbeda. Banyaknya sikel faktor dapat ditentukan berdasarkan jumlah subgraf yang membentuk sikel pada suatu graf G (Chartrand, Lesniak, dan Zhang, [7]).

Definisi 2.6. Graf Petersen adalah graf kubik dengan 10 simpul dan 15 sisi dan setiap simpulnya berderajat 3 (tiga). Selanjutnya untuk graf Petersen berarah adalah graf Petersen yang setiap sisinya diberikan arah. Graf Petersen berarah yang tidak mempunyai sikel faktor disebut graf Petersen tanpa sikel faktor, sedangkan Graf Petersen berarah yang mempunyai sikel faktor disebut graf Petersen dengan sikel faktor. Sikel faktor yang dapat terbentuk dalam sebuah graf Petersen berarah yaitu sebanyak dua sikel (Chartrand, Lesniak, dan Zhang, [7]; Asmiati et al., [8]).

Definisi 2.7. Vektor eigen dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah vektor tak nol \mathbf{x} dalam ruang solusi dari sistem linier yang memenuhi $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = 0$ dengan λ adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan \mathbf{x} . Ruang solusi ini disebut ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ . Jika λ_i adalah nilai eigen dari suatu matriks A , maka multiplisitas aljabar λ_i adalah banyaknya λ_i sebagai akar dari persamaan polinomial karakteristik A , sedangkan multiplisitas geometri λ_i adalah dimensi ruang eigen yang bersesuaian dengan λ_i (Anton, [6]).

Definisi 2.8. Bentuk kanonik baris dari suatu matriks A adalah bentuk matriks yang diperoleh dengan melakukan operasi baris elementer pada A sehingga matriks A ekuivalen baris dengan bentuk matriks eselon baris tereduksi (Larson, [9]).

2.2. Algoritma Simpul dan Sisi Matching pada Graf Berarah. Berdasarkan kajian pada Yang dan Xie [5], *matching* maksimum pada graf dapat dicari dengan menggunakan algoritma simpul dan sisi *matching* berdasarkan multiplisitas geometri terbesar pada matriks ketetanggaan graf berarah. Adapun Langkah penentuan *matching* maksimum pada graf berarah adalah sebagai berikut:

Menentukan Simpul *Matching*.

1. Merepresentasikan graf berarah ke dalam matriks ketetanggaan A ;
2. Menentukan nilai eigen λ_i dari matriks A dan multiplisitas geometri $\mu(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$;
3. Menentukan multiplisitas geometri terbesar $\mu(\lambda_i)$, dari λ_i , $i = 1, 2, \dots, l$;
4. Melakukan operasi baris elementer pada $(\lambda_m I_n - A)$ untuk mendapatkan bentuk kanonik baris B ;
5. Menentukan vektor kolom yang bebas linier pada matriks B yang diperoleh pada langkah 4;
6. Vektor-vektor kolom yang bebas linier pada matriks B bersesuaian dengan simpul-simpul *matching*.

Menentukan Sisi *Matching*.

1. Membangun matriks $C_{N \times m}$. Matriks C merupakan matriks berordo $N \times m$, yaitu:

$$C_{N \times m} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m),$$

dengan $a_i = (a_{1i} \quad a_{2i} \quad \cdots \quad a_{ni})^T$, $i = 1, 2, \dots, m$; m menyatakan jumlah simpul *matching*. Kolom-kolom a_i diekstraksi dari kolom-kolom matriks A ;

2. Menentukan kolom a_i yang memuat elemen-elemen minimal berjumlah 1. Jika lebih dari 1 kolom maka dapat dipilih secara sembarang. Asumsikan $a_i = a_1$, dimana $a_{j1} = 1$; $a_{ji} = 0$, $i \neq 1$.

3. Sisi $e = (j, 1)$ adalah sisi *matching* yang berkorespondensi dengan simpul 1, sehingga diperoleh matriks $C_{1 \times m}$;
4. Ulangi langkah 2 pada matriks $C_{1 \times m}$ dengan memilih $a_j \neq a_i$;
5. Menentukan elemen tak nol pada baris dan kolom yang berbeda pada matriks $C_{1 \times m}$;
6. Elemen-elemen tak nol pada langkah 4 bersesuaian dengan sisi-sisi *matching* pada graf berarah G .

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa buku dan jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan pada penentuan *matching* maksimum pada graf Petersen adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf Petersen berarah tanpa siklus faktor dan dengan 2 siklus faktor;
2. Menentukan *matching* maksimum pada graf Petersen berarah tanpa siklus faktor;
3. Menentukan *perfect matching* pada graf Petersen berarah dengan 2 siklus faktor.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

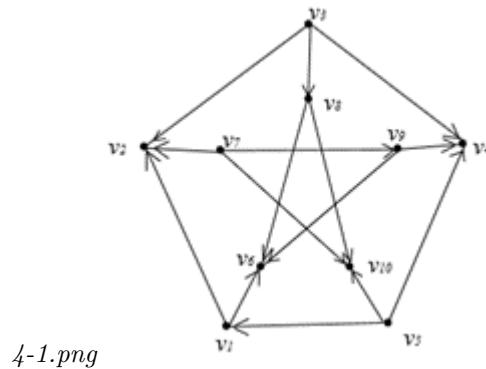
Penentuan *matching* maksimum dan *perfect matching* pada graf Petersen berarah diuraikan sebagai berikut.

4.1. Penentuan *Matching* Maksimum pada Graf Petersen Berarah.

Proposisi 4.1. *Graf Petersen berarah tanpa siklus faktor mempunyai matching maksimum yang dapat ditentukan dengan menggunakan algoritma simpul dan sisi matching berdasarkan multiplisitas geometri terbesar pada matriks ketetanggaan graf Petersen berarah.*

Berikut diberikan contoh graf Petersen berarah tanpa siklus faktor.

Contoh 4.2. *Diberikan graf Petersen berarah G_1 seperti tampak pada Gambar 1 berikut:*



GAMBAR 1. Graf Petersen G_1 .

Representasi matriks ketetangaan dari graf Petersen berarah G_1 :

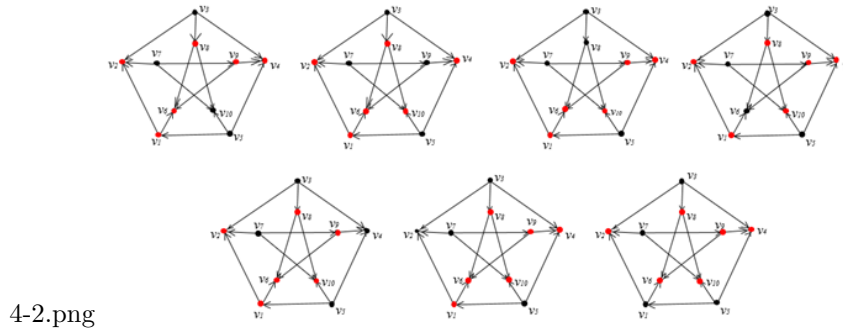
$$A = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks A $\lambda_i = 0; i = 1, 2, \dots, 10$. Karena nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_i = 0; \forall i = 1, 2, \dots, 10$ maka multiplisitas geometri terbesar diperoleh pada saat $\lambda_m = 0$. Nilai multiplisitas geometri ditentukan dengan bantuan software matlab diperoleh $\mu(\lambda) = 4$.

Selanjutnya ditentukan bentuk kanonik baris dari $(\lambda_m I_n - A)$ untuk $\lambda_m = 0$. Dengan menggunakan operasi baris elementer, diperoleh bentuk kanonik baris dari $(\lambda_m I_n - A)$ sebagai berikut:

$$B = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elemen-elemen tak nol pada matriks B adalah elemen-elemen yang bersesuaian dengan simpul $v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_9$, dan v_{10} . Untuk menentukan kolom-kolom bebas linier dari matriks B dapat dilakukan dengan menentukan kombinasi banyaknya baris yang memuat elemen tak nol dari banyaknya kolom yang memuat elemen tak nol. Dalam hal ini dilakukan kombinasi 6 simpul (banyaknya baris yang memuat elemen tak nol) dari 7 simpul (banyaknya kolom yang memuat elemen tak nol). Diperoleh kombinasi simpul $\{(v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_9), (v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}), (v_1, v_2, v_4, v_6, v_9, v_{10}), (v_1, v_2, v_4, v_8, v_9, v_{10}), (v_1, v_2, v_6, v_8, v_9, v_{10}), (v_1, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10}), (v_2, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10})\}$. Kolom-kolom yang bebas linier ditunjukkan oleh ketujuh kombinasi tersebut. Kolom-kolom tersebut bersesuaian dengan simpul-simpul matching maksimum. Apabila digambarkan ke dalam graf, diperoleh kemungkinan simpul-simpul matching seperti pada Gambar 2.



GAMBAR 2. Simpul-simpul *matching* graf Petersen G_1 .

Selanjutnya akan ditentukan sisi-sisi *matching* pada masing-masing kombinasi.

Kasus 1. Kombinasi $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_9)$.

$$C_{10 \times 6} = (a_1 \ a_2 \ a_4 \ a_6 \ a_8 \ a_9),$$

$$C_{10 \times 6} = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_4 & v_6 & v_8 & v_9 \\ v_1 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ v_2 & \\ v_3 & \\ v_4 & \\ v_5 & \\ v_6 & \\ v_7 & \\ v_8 & \\ v_9 & \\ v_{10} & \end{matrix} .$$

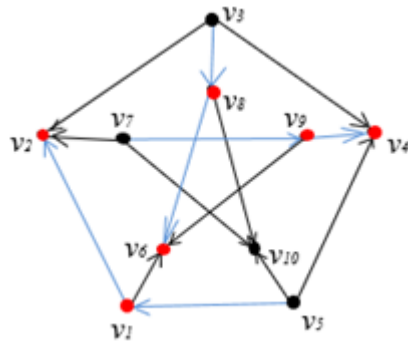
Perhatikan bahwa pada matriks C , elemen pada sel (v_5, v_1) bersesuaian dengan sisi (v_5, v_1) pada graf Petersen berarah G_1 . Pilih sisi (v_5, v_1) pada graf Petersen berarah G_1 sebagai sisi *matching* dengan simpul awal v_5 dan simpul akhir v_1 . Pada kasus ini agar sisi *matching* tersebut tidak memiliki simpul awal yang sama maka haruslah elemen pada sel (v_5, v_4) sama dengan nol, sehingga diperoleh:

$$C_{10 \times 6} = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_4 & v_6 & v_8 & v_9 \\ v_1 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ v_2 & \\ v_3 & \\ v_4 & \\ v_5 & \\ v_6 & \\ v_7 & \\ v_8 & \\ v_9 & \\ v_{10} & \end{matrix} .$$

Karena masih terdapat kolom-kolom yang memuat elemen tak nol lebih dari satu kolom, maka dilanjutkan pemilihan sel-sel yang bersesuaian dengan sisi-sisi *matching*. Pada kasus ini dipilih sel (v_3, v_8) , (v_7, v_9) , (v_9, v_4) , (v_1, v_2) sebagai sel-sel yang bersesuaian dengan sisi-sisi *matching*, sehingga diperoleh matriks:

$$C_{10 \times 6}^l = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_4 & v_6 & v_8 & v_9 \\ v_1 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ v_2 & \\ v_3 & \\ v_4 & \\ v_5 & \\ v_6 & \\ v_7 & \\ v_8 & \\ v_9 & \\ v_{10} & \end{matrix} .$$

Elemen-elemen tak nol pada matriks $C_{10 \times 6}^l$ bersesuaian dengan sisi-sisi *matching*, apabila digambarkan ke dalam graf diperoleh *matching* maksimum seperti pada Gambar 3.

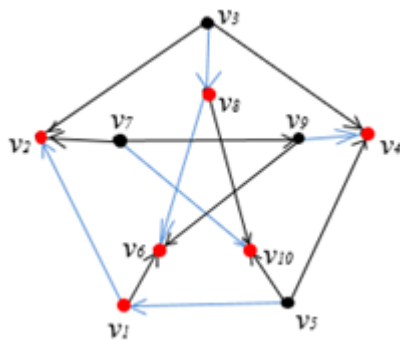


4-3.png

GAMBAR 3. Matching maksimum kasus 1.

Dengan cara yang sama ke enam kombinasi lainnya, dapat diperoleh matching maksimum sebagai berikut:

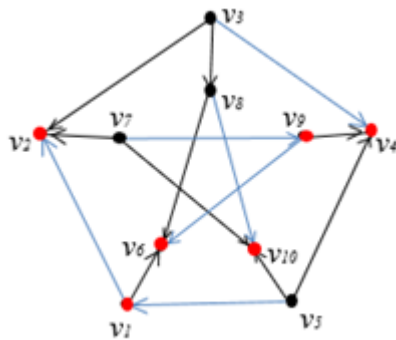
Kasus 2. Kombinasi $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10})$.



4-4.png

GAMBAR 4. Matching maksimum kasus 2.

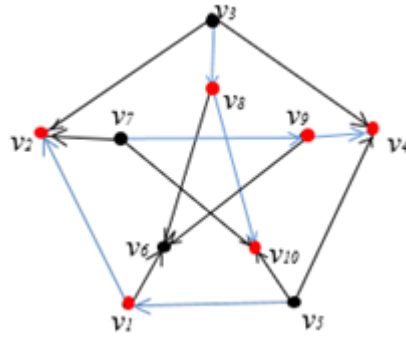
Kasus 3. Kombinasi $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_9, v_{10})$.



4-5.png

GAMBAR 5. Matching maksimum kasus 3.

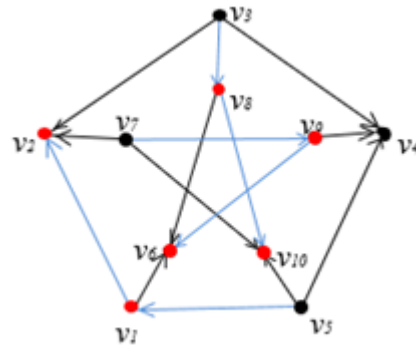
Kasus 4. Kombinasi $(v_1, v_2, v_4, v_8, v_9, v_{10})$.



4-6.png

GAMBAR 6. *Matching* maksimum kasus 4.

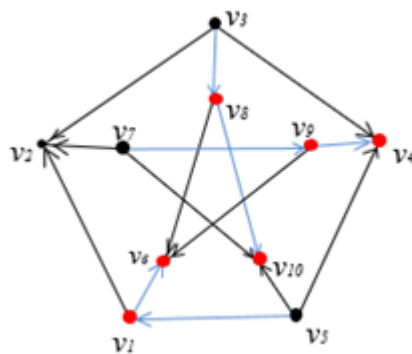
Kasus 5. Kombinasi $(v_1, v_2, v_6, v_8, v_9, v_{10})$.



4-7.png

GAMBAR 7. *Matching* maksimum kasus 5.

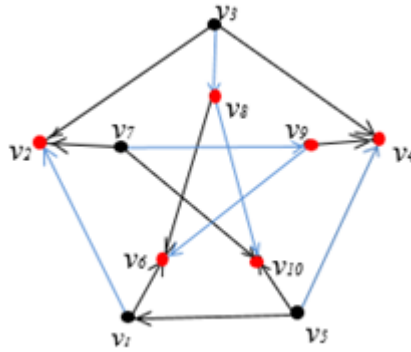
Kasus 6. Kombinasi $(v_1, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10})$.



4-8.png

GAMBAR 8. *Matching* maksimum kasus 6.

Kasus 7. Kombinasi $(v_2, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10})$.

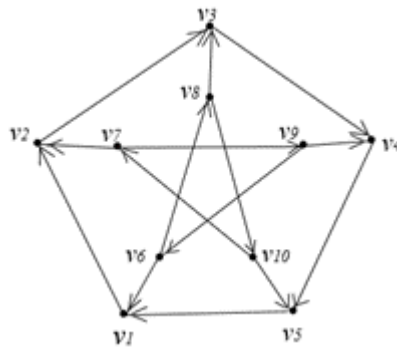


4-9.png

GAMBAR 9. Matching maksimum kasus 7.

Proposisi 4.3. Graf Petersen berarah dengan 2 siklus faktor mempunyai perfect matching.

Contoh 4.4. Diberikan graf Petersen berarah G_2 dengan siklus faktor v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan $v_6, v_8, v_{10}, v_7, v_9$ seperti tampak pada Gambar 10.



4-10.png

GAMBAR 10. Graf Petersen berarah G_2 dengan 2 siklus faktor.

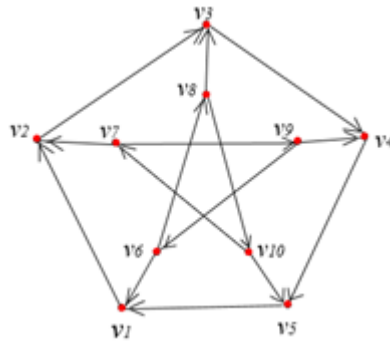
Representasi matriks ketetanggaan dari graf Petersen berarah G_2 adalah:

$$A = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simpul *matching* pada graf Petersen dengan 2 siklus faktor dicari dengan cara menentukan bentuk kanonik dari matriks A . Apabila dilakukan operasi baris elementer pada matriks A , maka akan diperoleh bentuk matriks kanonik sebagai berikut:

$$B = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa kolom-kolom $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ pada matriks B merupakan kolom-kolom yang bebas linier. Elemen-elemen tak nol pada matriks B adalah elemen-elemen yang bersesuaian dengan simpul-simpul *matching*. Apabila digambarkan ke dalam graf diperoleh simpul-simpul *matching* seperti pada Gambar 11.



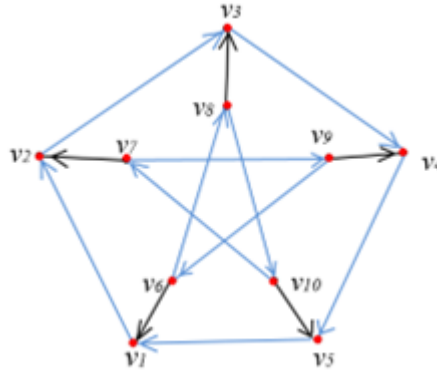
4-11.png

GAMBAR 11. Simpul-Simpul *Matching* Petersen Berarah G_2 .

Analog dengan Contoh 4.2, penentuan sisi-sisi *matching* dilakukan dengan membangun matriks $C_{10 \times 10}$ kemudian dilanjutkan dengan pemilihan kolom-kolom a_i hingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$C1 = \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elemen-elemen tak nol pada matriks $C1$ bersesuaian dengan sisi-sisi *matching*. Apabila ke dalam graf diperoleh sisi-sisi *matching* seperti pada Gambar 12.



4-12.png

GAMBAR 12. *Perfect Matching* pada Graf Petersen G_2 .

Perhatikan bahwa graf Petersen berarah G_2 pada Gambar 12 mempunyai *perfect matching* $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10})$.

5. SIMPULAN

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa *matching* maksimum pada graf Petersen berarah dengan nilai eigen $\lambda = 0$ dapat ditentukan dengan menggunakan algoritma simpul *matching* sedangkan untuk graf Petersen berarah yang memuat 2 siklus faktor penentuan *matching* maksimum dapat dilakukan dengan membentuk matriks kanonik kolom dari matriks ketetanggaan graf berarah. Penentuan *matching* pada penelitian ini, hanya berlaku untuk graf Petersen berarah dengan dan tanpa siklus faktor. Sedangkan penelitian *matching* untuk graf Petersen yang diperumum dan graf jenis lain belum dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Jensen, J. B. and Gutin, G., 2007, *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Munir, R., 2010, *Matematika Diskrit Edisi 3*, Informatika, Bandung.
- [3] Read, R. C., 2014, *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York, USA.
- [4] Xiong, Z. B. and J. F. Zhu, 2014, Forward maximum matching algorithm based on improved trie tree structure, *Computer Applications and Software, Volume 5, Issue 71*.
- [5] Yang, Y. and Xie, G., 2016, Maximum Matching of a Digraph Based on the Largest Geometric Multiplicity, *Mathematical Problems in Engineering*.
- [6] Anton, H., 2013, *Elementary Linear Algebra Applications Version*, Wiley.
- [7] Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P., 2016, *Graphs and Digraphs Sixth Edition*, Western Michigan University, Kalamazoo.
- [8] Asmiati, A., Aldino, A. A., Notiragayu, N., Zakaria, L., and Muslim Ansori, M., 2019, Dimensi Metrik Hasil Operasi Tertentu pada Graf Petersen Diperumum, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications, Volume 16, Issue 2, Pages 87-93*.
- [9] Larson, R., 2015, *Elementary Linear Algebra*, Cengage Learning, USA.

