

Aplikasi Himpunan Kritis Pada Pelabelan Graf *Caterpillar* Teratur C_{4n}

Triyani, Siti Rahmah Nurshiami, Mutia Nur Estri

Program Studi Matematika, Jurusan MIPA

Fakultas Sains dan Teknik

Universitas Jenderal Soedirman

Jl. Dr. Soeparno Karangwangkal Purwokerto

trianisr@yahoo.com.au, nurshiami@yahoo.co.id, mutia_ne_yusuf@yahoo.com

ABSTRAK

Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan Total Super Sisi Ajaib (TSSA) disebut graf super sisi ajaib. Graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} merupakan graf super sisi ajaib. Label titik dan label sisi pada Graf Super Sisi Ajaib dapat digunakan untuk menentukan himpunan kritis pada pelabelan graf. Himpunan kritis ini dapat diimplementasikan ke dalam *Secret Sharing Scheme* (SSS). Penelitian ini membahas aplikasi himpunan kritis pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} untuk $n = 2$ dalam sistem informasi akademik.

Kata Kunci : pelabelan total super sisi ajaib, himpunan kritis.

ABSTRACT

A super edge magic graph is a graph that can be labeled with edge magic total (EMT) labeling. Caterpillar Regular graph C_{4n} is a super edge magic graph. Label for vertices and edge on super edge magic graph can be used to determine critical set of labelling graph. The critical set can be implemented to Secret Sharing Scheme (SSS). The results of this study show that the critical set of Caterpillar Regular graph C_{4n} for $n = 2$ can be applied to academic information system.

Keywords: super edge magic labeling, critical set.

1. Pendahuluan

Pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan n titik dan m sisi adalah fungsi bijektif yang memetakan setiap titik dan sisi dari graf G ke bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, n + m\}$ sedemikian sehingga jumlah label titik dan label sisi yang bersisian dengan kedua titik tersebut adalah konstanta k . Nilai k ini selanjutnya disebut konstanta ajaib untuk graf G . Pelabelan graf dikatakan pelabelan total super sisi ajaib apabila label untuk titik-titik pada graf G adalah bilangan terurut dari $1, 2, \dots, n$. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan Total Super Sisi Ajaib (TSSA) disebut graf super sisi ajaib. Sebuah himpunan kritis pada pelabelan graf G adalah subhimpunan label dan posisi label tersebut yang apabila dilengkapi akan menghasilkan pelabelan tersebut secara tunggal (Imron, dkk. [4]).

Masalah menentukan himpunan kritis dari suatu pelabelan graf merupakan masalah yang tidak mudah. Hal ini dikarenakan kemungkinan dari subhimpunan label pada graf sangat banyak. Kemudian dari masing-masing

subhimpunan tersebut dicari subhimpunan label yang membangun satu-satunya pelabelan dari graf (Baskoro, dkk. [1]). Gambar 1(a) merupakan gambar graf lintasan (P_n) dengan 3 buah titik atau P_3 , dan Gambar 1(b) merupakan salah satu posisi label pada graf lintasan P_3 . Misalkan f dan g fungsi yang memetakan titik dan sisi pada graf lintasan P_3 ke bilangan bulat $\{1,2,\dots,5\}$ seperti pada Gambar 2. Dalam hal ini $f = \{(1,1), (2,5), (3,3), (4,4), (5,2)\}$ dan $g = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,4), (5,1)\}$, bilangan bulat pertama menyatakan posisi label pada graf P_3 , sedangkan bilangan bulat kedua menyatakan label titik atau label sisi pada graf P_3 . Graf lintasan P_3 pada Gambar 2(a) merupakan graf total super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 1+5+3 = 3+4+2 = 9$, sedangkan graf lintasan P_3 pada Gambar 2(b) merupakan graf total sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 2+3+5 = 5+4+1 = 10$.



Gambar 1 Graf lintasan P_3 dan posisi label untuk graf lintasan P_3



Gambar 2 Pelabelan total sisi ajaib pada Graf P_3



Gambar 3 Himpunan Kritis dan bukan himpunan kritis pada Graf P_3

Himpunan $\{(1,1), (4,4)\}$ pada Gambar 3(a) merupakan subhimpunan dari f . Supaya himpunan tersebut menjadi pelabelan total sisi ajaib, titik dan sisi pada graf tersebut yang belum diberi label harus dilengkapi. Label yang belum digunakan adalah label 2, label 3, dan label 5. Apabila label 2 ditempatkan pada posisi label ke-2, label 3 ditempatkan pada posisi label ke-3, dan label 5 ditempatkan pada posisi label ke-5 sehingga tidak diperoleh konstanta ajaib k , karena $1+2+3 \neq 3+4+5$. Namun, apabila label 2 ditempatkan pada posisi label ke-5, label 3 ditempatkan pada posisi label ke-3, dan label 5 ditempatkan pada posisi label ke-2 sehingga diperoleh konstanta ajaib k , karena $1+5+3 = 9 = 3+4+2$. Hal ini berarti apabila himpunan $\{(1,1), (4,4)\}$ dilengkapi dengan memberikan label titik dan label sisi yang belum diberi label pada Gambar 3(a), sehingga membentuk satu-satunya pelabelan total sisi ajaib dengan himpunan $\{(1,1), (2,5), (3,3), (4,4), (5,2)\} = f$. Akibatnya, himpunan $\{(1,1), (4,4)\}$ merupakan

salah satu himpunan kritis pada pelabelan total sisi ajaib graf P_3 dengan fungsi f . Himpunan $\{(3,3), (4,4)\}$ pada Gambar 3(b) merupakan subhimpunan dari f , tetapi bukan himpunan kritis pada pelabelan total sisi ajaib graf P_3 . Hal ini dikarenakan apabila label 5 ditempatkan pada posisi label ke-1, label 1 ditempatkan pada posisi label ke-2, dan label 2 ditempatkan pada posisi label ke-5, sehingga diperoleh konstanta ajaib $k = 5+1+3 = 9 = 3+4+2$. Dengan kata lain terdapat pelabelan total sisi ajaib lain selain f yaitu $h = \{(1,5), (2,1), (3,3), (4,4), (5,2)\}$ yang memuat himpunan $\{(3,3), (4,4)\}$.

Himpunan kritis pada pelabelan graf dapat diaplikasikan ke dalam masalah *Secret Sharing Scheme*(SSS). SSS merupakan suatu metode untuk membagi (*share*) rahasia S kepada sejumlah partisipan $R = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$ sedemikian sehingga hanya partisipan dalam himpunan A yang diberi wewenang saja ($A \subseteq R$) yang dapat merekonstruksi rahasia S dengan cara mengumpulkan semua informasi parsial dari masing-masing anggota di A . Dengan demikian, untuk setiap $B \subseteq R$ yang tidak punya wewenang, mereka tidak akan dapat merekonstruksi S . Kunci rahasia S dipilih oleh Dealer D , dan diasumsikan $D \notin R$ (Baskoro dkk., [1]).

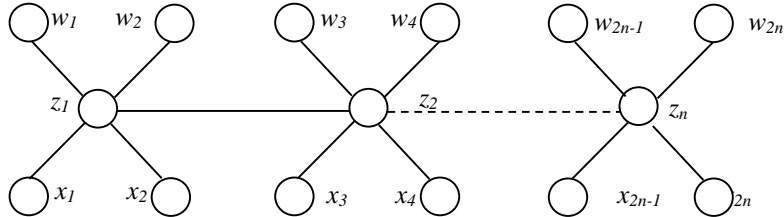
Kajian tentang himpunan kritis pada pelabelan total sisi ajaib yang telah dilakukan antara lain : himpunan kritis pada pelabelan graf khususnya graf bintang dan graf bintang ganda (Baskoro [2]), himpunan kritis pada pelabelan graf *Caterpillar* (Imron dkk., [4]), himpunan kritis pada pelabelan graf *Banana Tree* (Hussain dkk.,[3]). Penelitian ini membahas himpunan kritis pada pelabelan graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} untuk $n = 2$, dan mengimplementasikan ke dalam skema pembagian rahasia khususnya dalam sistem pengamanan informasi akademik.

2. Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini adalah ekperimental dengan tahapan sebagai berikut. Tahap pertama adalah kajian literatur, yaitu penelusuran pustaka tentang himpunan kritis dari pelabelan TSSA pada beberapa kelas graf. Tahap kedua mengidentifikasi dan merumuskan masalah. Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini adalah menggali masalah riil dan mencoba menyelesaikannya dengan topik yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pelabelan TSSA. Tahap ketiga adalah penentuan himpunan kritis dari pelabelan TSSA pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} . Pada tahapan ini dilakukan investigasi himpunan kritis dari hasil formula pelabelan dengan cara mengenumerasi semua kemungkinan pelabelan TSSA pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} . Tahap selanjutnya yaitu tahap keempat adalah mengimplementasikan himpunan kritis ke dalam masalah SSS. Pada tahapan ini hasil yang telah diperoleh pada tahap ke-3 diimplementasikan ke dalam masalah *Secret Sharing Scheme*, khususnya dalam sistem pengamanan informasi akademik di dunia pendidikan.

3. Hasil dan Pembahasan

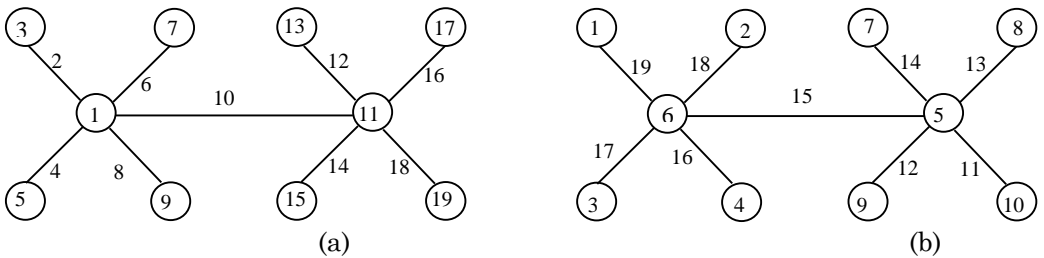
Graf *Caterpillar* Teratur C_{4n} seperti pada Gambar 4 mempunyai titik sebanyak $5n$ yaitu titik $w_1, w_2, \dots, w_{2n}, x_1, x_2, \dots, x_{2n}, z_1, z_2, \dots, z_n$ dan mempunyai sisi sebanyak $5n - 1$, yaitu $w_i z_j, x_i z_j, z_k z_{k+1}$ dengan $1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n-1$. Graf *Caterpillar* Teratur merupakan graf Super Sisi Ajaib, yaitu graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan TSSA.



Gambar 4 Graf *Caterpillar* Teratur C_{4n}

Himpunan Kritis pada Pelabelan Graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} .

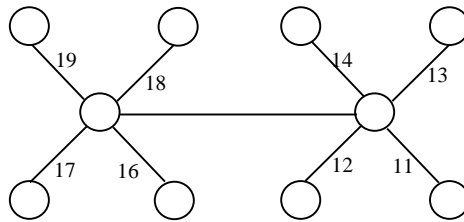
Graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} mempunyai 10 buah titik dan 9 buah sisi. Graf pada Gambar 5(a) merupakan posisi pemberian label pada graf C_{4_2} , sedangkan graf pada Gambar 5(b) merupakan contoh pelabelan TSSA pada graf C_{4_2} . Himpunan λ berikut menyatakan pelabelan TSSA pada C_{4_2} seperti Gambar 5(b), $\lambda(C_{4_2}) = \{(1,6), (2,19), (3,1), (4,17), (5,3), (6,18), (7,2), (8,16), (9,4), (10,15), (11,5), (12,14), (13,7), (14,12), (15,9), (16,13), (17,8), (18,11), (19,10)\}$ dengan konstanta ajaib $k = 1+19+6 = 6+18+2 = \dots = 5+11+10 = 26$.



Gambar 5 Posisi label dan pelabelan TSSA pada graf C_{4_2}

Himpunan kritis pada pelabelan TSSA λ dari graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} didefinisikan sebagai, $Q_\lambda(C_{4_2}) = \{(a,b) | a, b \in \{1,2,\dots,19\}\}$ dengan (a,b) adalah pasangan terurut yang menyatakan label b pada posisi a , sedemikian sehingga $Q_\lambda(C_{4_2})$ harus memenuhi :

- 1) λ adalah satu-satunya pelabelan pada C_{4_2} dengan label b pada posisi a yang dapat direkonstruksi dari $Q_\lambda(C_{4_2})$.
- 2) Setiap sub himpunan dari $Q_\lambda(C_{4_2})$ tidak memenuhi sifat (1).



Gambar 6 Bukan himpunan kritis dari C_{4_2}

Himpunan $Q_\lambda(C_{4_2}) = \{(2,19), (4,17), (6,18), (8,16), (12,14), (14,12), (16,13), (18,11)\}$ pada Gambar 6 bukan merupakan himpunan kritis dalam pelabelan TSSA pada graf C_{4_2} , karena himpunan tersebut tidak memenuhi syarat (1).

Pelabelan TSSA lain yang dapat direkonstruksi adalah

$$\lambda_1(C_{4_2}) = \{(1,1), (2,19), (3,6), (4,17), (5,8), (6,18), (7,7), (8,16), (9,9), (10,15), (11,10), (12,14), (13,2), (14,12), (15,4), (16,13), (17,3), (18,11), (19,5)\}.$$

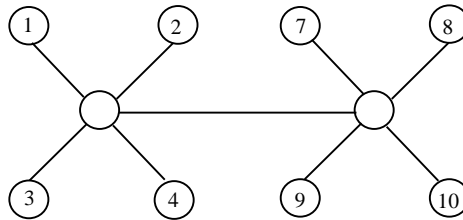
Beberapa himpunan kritis pelabelan λ pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} adalah

$$Q_{1_\lambda}(C_{4_2}) = \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8), (5,3), (9,4), (15,9), (19,10)\}$$

$$Q_{2_\lambda}(C_{4_2}) = \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8), (4,17), (8,16), (14,12), (18,11)\}$$

$$Q_{3_\lambda}(C_{4_2}) = \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8), (4,17), (8,16), (14,2), (19,10)\}.$$

Tanpa mengurangi keumuman, dapat ditunjukkan bahwa himpunan $Q_{1_\lambda}(C_{4_2})$ dapat digambarkan seperti Gambar 7 memenuhi syarat (1) dan (2).



Gambar 7 Himpunan kritis $Q_{1_\lambda}(C_{4_2})$

Label untuk titik dan sisi yang belum digunakan adalah label 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, dan 19. Untuk memudahkan melengkapi menjadi pelabelan total sisi, posisi label ke-1 dan ke-11 harus diberi label terlebih dahulu. Gunakan label terkecil yaitu label 5 dan 6 masing-masing di posisi label ke-1 dan ke-11, sehingga jumlah label untuk dua buah titik yang bertetangga

berturut-turut adalah 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, dan 16. Akibatnya apabila label 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, dan 19 ditempatkan pada setiap sisi dari graf C_{4_2} maka tidak terdapat konstanta k , sehingga pelabelannya tidak ajaib. Namun, apabila label 6 dan 5 masing-masing di posisi label ke-1 dan ke-11, sehingga jumlah label untuk dua buah titik yang bertetangga berturut-turut menjadi 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, dan 15. Selanjutnya label yang belum digunakan diurutkan dari yang terbesar yaitu 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11 dan ditempatkan berturut-turut pada sisi yang berinsiden dengan dua buah titik yang mempunyai jumlah label terkecil sampai jumlah label terbesar. Akibatnya terdapat konstanta ajaib $k = 7+19 = 8+18 = \dots = 15+11 = 26$. Hal ini berarti apabila himpunan $Q_{1_k}(C_{4_2})$ dilengkapi dengan memberikan label titik dan label sisi yang belum diberi label, sehingga membentuk satu-satunya pelabelan total sisi ajaib pada C_{4_2} yaitu pelabelan $\lambda(C_{4_2})$. Jadi memenuhi syarat (1).

Ambil $P = \{(3,1), (7,2), (13,7), (9,4), (15,9), (19,10)\}$ yang merupakan sub himpunan dari $Q_{1_k}(C_{4_2})$. Apabila himpunan P dilengkapi label titik dan sisinya sehingga terdapat pelabelan

$$\lambda_2(C_{4_2}) = \{(1,6), (2,19), (3,1), (4,3), (5,17), (6,18), (7,2), (8,16), (9,4), (10,15), (11,5), (12,14), (13,7), (14,12), (15,9), (16,13), (17,8), (18,11), (19,10)\}.$$

$$\lambda_3(C_{4_2}) = \{(1,6), (2,19), (3,1), (4,3), (5,17), (6,18), (7,2), (8,16), (9,4), (10,15), (11,5), (12,14), (13,7), (14,12), (15,9), (16,8), (17,13), (18,11), (19,10)\}.$$

$$\lambda_4(C_{4_2}) = \{(1,6), (2,19), (3,1), (4,17), (5,3), (6,18), (7,2), (8,16), (9,4), (10,15), (11,5), (12,14), (13,7), (14,12), (15,9), (16,13), (17,8), (18,11), (19,10)\}.$$

Hal ini berarti sub himpunan dari $Q_{1_k}(C_{4_2})$ tidak merekonstruksi satu-satunya pelabelan, sehingga memenuhi syarat (2).

Implementasi Himpunan Kritis Pelabelan TSSA pada Graf C_{4_2} dalam Secret Sharing Scheme

Masalah SSS pada pelabelan graf telah dilakukan oleh Imron dkk., [4]. Himpunan kritis pada graf *Caterpillar* diimplementasikan ke dalam bentuk pembagian *password* antara *supervisor* dengan kasir di suatu supermarket. Pada penelitian ini himpunan kritis dari pelabelan graf diimplementasikan ke dalam sistem pengamanan informasi akademik di dunia pendidikan.

Fakultas Sains dan Teknik UNSOED terdiri dari tiga jurusan, yaitu Jurusan MIPA, Jurusan Teknik, dan Jurusan Perikanan dan Kelautan. Masing-masing jurusan mempunyai bagian administrasi kependidikan, yang salah satu tugasnya adalah mengolah transkrip akademik mahasiswa melalui Sistem Informasi Akademik (SIA). Tiap jurusan menugaskan salah satu staf administrasinya untuk menjalankan tugas tersebut. Staf administrasi tersebut mendapatkan akses khusus untuk menambah atau mengubah nilai. Untuk

dapat mengakses sistem, staf tersebut diberi *password*. Kebenaran transkrip nilai menjadi tanggung jawab Pembantu Dekan I yang juga mempunyai akses khusus ke SIA.

Selama ini penambahan dan perubahan nilai dapat dilakukan oleh staf administrasi tanpa sepengetahuan Pembantu Dekan I, karena staf administrasi dapat mengakses dengan menggunakan *password* sendiri tanpa ada kaitannya dengan *password* Pembantu Dekan I. Hal tersebut bisa menyebabkan adanya kesalahan yang mungkin tidak terdeteksi oleh Pembantu Dekan I. Untuk memperkecil kesalahan tersebut dapat menggunakan *Secret Sharing Scheme* (SSS), dimana staf administrasi tidak akan bisa langsung mengakses sistem sebelum Pembantu Dekan I memasukkan *password* ke dalam sistem. Pada SSS, barisan *password* dibagi menjadi bagian-bagian tertentu dan memberikannya kepada sekelompok orang yang berhak.

Himpunan Kritis dari pelabelan TSSA pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} dapat diimplementasikan dalam *Secret Sharing Scheme* di Bidang pendidikan. Jika seorang staf ingin mengubah suatu nilai dari mata kuliah tertentu, maka perubahan nilai ini harus diketahui oleh Pembantu Dekan I. Pembantu Dekan I akan memasukan *password*nya dan staf akademik melengkapi dengan memasukkan *password*nya. Hal ini menunjukkan bahwa Pembantu Dekan I lebih berkuasa dari pada staf dan Pembantu Dekan I bertanggung jawab dalam perubahan nilai suatu mata kuliah. Irisan dari himpunan kritis $Q_{1_\lambda}(C_{4_2})$, $Q_{2_\lambda}(C_{4_2})$ dan $Q_{3_\lambda}(C_{4_2})$, yaitu

$$S = \bigcap_{i=1}^3 Q_{i_\lambda}(C_{4_2}) = \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8)\}$$

merupakan *password* untuk Pembantu Dekan I. Sedangkan *password* untuk staf akademik Jurusan MIPA, Teknik, dan Perikanan Kelautan berturut-turut adalah

$$P_1 = \{(5,3), (9,4), (15,9), (19,10)\}$$

$$P_2 = \{(4,17), (8,16), (14,12), (18,11)\}$$

$$P_3 = \{(4,17), (8,16), (14,2), (19,10)\}.$$

Apabila seorang staf administrasi dari jurusan MIPA dan Pembantu Dekan I ingin mengetahui apakah pembagian *secret* tersebut benar atau tidak, maka staf dan Pembantu Dekan I harus memasukkan *password* tersebut secara bersama-sama. Sebagai contoh, *password* untuk staf administrasi jurusan MIPA adalah $P_1 = \{(5,3), (9,4), (15,9), (19,10)\}$, sedangkan *password* untuk Pembantu Dekan I adalah $S = \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8)\}$. Apabila *password*nya digabungkan maka akan menjadi

$$\begin{aligned}
 P_1 \cup S &= \{(5,3), (9,4), (15,9), (19,10)\} \cup \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8)\} \\
 &= \{(3,1), (7,2), (13,7), (17,8), (5,3), (9,4), (15,9), (19,10)\} \\
 &= Q_{1_x}.
 \end{aligned}$$

Jadi himpunan kritis $Q_{1_x} (C_{4_2})$ merupakan *secret* untuk jurusan MIPA.

4. Simpulan

Kesimpulan yang dapat diperoleh dari penelitian ini yaitu himpunan kritis dari pelabelan TSSA pada graf *Caterpillar* Teratur C_{4_2} dapat diimplementasikan ke dalam masalah SSS. Khususnya masalah sistem pengamanan informasi akademik.

5. Daftar Pustaka

1. Baskoro, E. T., Rinovia S., dan Mariskha T. A. 2004. *Secret Sharing Scheme Based On Magic Labeling*. Department of Mathematics. ITB Bandung.
2. Baskoro, E. T., 2005. *Critical sets in Edge-Magic Total Labellings*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 55, pp 33 - 42.
3. Hussain, M., Baskoro, E. T., Slamun. 2009. *On Super Edge-Magic Total Labeling Of Banana Trees*. Utilitas Math. 79, pp 243-251. .
4. Imron C, Setiyono B, Simanjutak R, Baskoto E. T., 2008. *Critical Set of Caterpillar Graph for Secret Sharing Scheme*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 65, pp 121-126.