

Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Populasi Perokok

RAFIKA POMALINGO¹, RESMAWAN², NURWAN³

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gorontalo, rafikapomalingo22@gmail.com

Abstrak

Dalam artikel ini dipelajari model matematika pada populasi penyebaran perokok. Model ini melibatkan empat sub populasi saling berinteraksi yaitu *Susceptible* (S) individu sehat tapi rentan menjadi perokok, *Exposed* (E) individu perokok pemula, *Infected* (I) individu perokok aktif, dan *Recovered* (R) individu yang berhenti menjadi perokok. Model yang dikonstruksi, memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas perokok dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai nilai ambang batas terjadinya penyebaran perokok ditentukan menggunakan pendekatan matriks *Next Generation*. Titik kesetimbangan yang dianalisis dengan kriteria Routh Hurwitz menunjukkan sifat stabil, dengan $R_0 < 1$ untuk titik kesetimbangan bebas perokok dan $R_0 > 1$ untuk titik kesetimbangan endemik. Hal ini didukung dengan simulasi yang menunjukkan populasi stabil disekit titik kesetimbangan bebas perokok dengan $R_0 < 1$ dan stabil disekitar titik kesetimbangan endemik dengan $R_0 > 1$.

Kata kunci: Analisis Kestabilan, Model Matematika, Perokok, Bilangan Reproduksi Dasar.

Abstract

The study intends to analyze the mathematic model on the distribution of cigarette smoker population. The model involved four interconnected sub-population, i.e. Subceptible [S] (healthy individuals prone to smoking behavior), Exposed [E] (individuals sttaring to smoker), Infected [I] (active smokers), and Recovered [R] (individual that stop smoking). The constructed model possessed two equilibrium points, i.e. smoker-free point and endemic point. Moreover, the basic reproduction number (R_0) as the treshold value of distribution of smoking behavior was determined by employing Next Generation matrix approach. The result of equilibrium point analysis by employing Routh Hurwitz criteria shows stable behavior, with $R_0 < 1$ for the smoker-free point and $R_0 > 1$ for the endemic point. The statement is supported by the simulation conducted that shows stable population around both equilibrium points as described

Keywords: Stability Analysis, Mathematical Model, Cigarette Smoker, Basic Reproduction numbers.

1. PENDAHULUAN

Rokok adalah salah satu zat kimia yang berdampak buruk bagi kesehatan dan lingkungan. Bahan kimia yang terdapat pada rokok, dapat mengakibatkan penyakit jantung, hipertensi,

kanker dan beberapa penyakit [2]. Berdasarkan WHO, prevalensi data perokok 2013 di Indonesia sebesar 36,3 %, perokok laki-laki 66,0 %, perokok wanita 6,7 %, anak-anak 1,4 % dan remaja 18,3 % [9]. Masalah ini menguatkirkan pemerintah, masyarakat dan lingkungan. Salah satu cara untuk meminimalisir permasalahan penyebaran perokok yaitu dengan merumuskan model matematika.

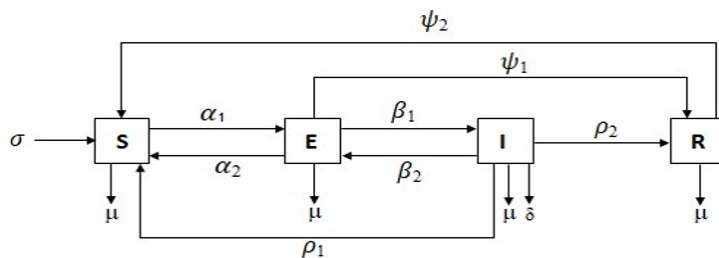
Beberapa penelitian telah membahas model matematika yang berkaitan dengan peningkatan jumlah perokok, seperti Zeb et al., [12] strategi pengendalian rokok yang optimal dengan dinamika akar kuadrat. Selanjutnya Osman dan Adu, [7] tentang model SPT_cR dengan asumsi terdapat empat sub populasi yaitu populasi rentan (S), perokok (P), perokok dalam perawatan (T_c) dan perokok berhenti (R). Penyebaran individu perokok model SPT_cR yaitu S dapat ke P , P dapat ke T_c dan T_c bisa kembali ke P dan ke R .

Perokok pemula memiliki kondisi memilih untuk berhenti atau menjadi perokok aktif disebabkan ketergantungan. Menurut Dr Nancy, perokok yang telah berhenti dapat kembali lagi menjadi perokok disebabkan pengaruh dari adiksi nikotin pada rokok dan pengaruh dari lingkungan [6]. Hal ini mengakibatkan semakin sering berinteraksi dengan perokok maka semakin meningkat populasi perokok.

Untuk itu, penelitian ini mengkaji model matematika tipe SEIRS pada penyebaran perokok. Model ini terdapat empat sub populasi saling berinteraksi yaitu *Susceptible* (S) individu sehat tapi rentan menjadi perokok, *Exposed* (E) perokok pemula, *Infected* (I) perokok aktif, dan *Recovered* (R) individu yang berhenti menjadi perokok. Mengasumsi laju perubahan individu (S) ke individu (E) dipengaruhi oleh besar interaksi S dan E ditambah besar interaksi S dan I dapat ditulis $aE + bIS$, dimana a dan b adalah bobot bilangan positif dengan $a < b$. Berdasarkan asumsi yang digunakan maka akan terbentuk sistem persamaan diferensial, selanjutnya dilihat perilaku solusi dari titik kesetimbangan agar dapat dianalisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut. Penentuan ambang batas penyebaran populasi perokok yang merupakan nilai bilangan reproduksi dasar dicari menggunakan matriks Next Generation. Tujuan dari penelitian ini yaitu menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika penyebaran populasi perokok.

2. MODEL MATEMATIKA

Secara skematik, pola penyebaran populasi perokok dinyatakan dalam diagram kompartemen pada Gambar ??.



GAMBAR 1. Diagram Skematik Penyebaran Populasi Perokok

Berdasarkan skema pada Gambar ?? maka diperoleh model matematika tipe SEIRS pada persamaan (??)

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \sigma + \alpha_2 E + \rho_1 I + \psi_2 R - aES - bIS - \mu S \\
 \frac{dE}{dt} &= aES + bIS + \beta_2 I - \omega_1 E \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta_1 E - \omega_2 I \\
 \frac{dR}{dt} &= \psi_1 E + \rho_2 I - \omega_3 R
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= aES + bIS \\ \omega_1 &= \alpha_2 + \beta_1 + \psi_1 + \mu \\ \omega_2 &= \beta_2 + \rho_1 + \rho_2 + \mu + \delta \\ \omega_3 &= \psi_2 + \mu \end{aligned}$$

Definisi variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel ??.

TABEL 1. Variabel dan Parameter

Simbol	Definisi
σ_1	Laju rekrutmen untuk menjadi individu rentan
α_1	laju perpindahan individu rentan menjadi perokok pemula
α_2	laju perpindahan perokok pemula kembali menjadi individu rentan
β_1	laju perpindahan perokok pemula menjadi perokok aktif
β_2	laju perpindahan perokok aktif kembali menjadi perokok pemula
ρ_1	laju perpindahan perokok aktif kembali menjadi individu rentan
ρ_2	laju perpindahan perokok aktif menjadi berhenti merokok
ψ_1	laju perpindahan perokok pemula menjadi individu berhenti perokok
ψ_2	laju perpindahan individu berhenti merokok kembali menjadi individu rentan
δ	laju kematian penyakit yang disebabkan rokok
σ_2	laju kematian alami pada setiap populasi

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Titik Kesetimbangan. Titik kesetimbangan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (??) mengacu pada [11], dengan kondisi pada saat $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Berdasarkan persamaan (??) diperoleh titik kesetimbangan bebas perokok $(E_0^*) = (S_0, E_0, I_0, R_0)$ dan endemik $(E_1^*) = (S_1, E_1, I_1, R_1)$ yaitu

$$\begin{aligned} E_0^* &= \left(\frac{\sigma}{\mu}, 0, 0, 0 \right), \\ E_1^* &= \left(\frac{\omega_1\omega_2 - \beta_1\beta_2}{a\omega_2 + b\beta_1}, \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_3\gamma_4}, \frac{\beta_1(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)}, \frac{(\psi_1 + \omega_2 + \beta_1\rho_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2\omega_3(\gamma_3 - \gamma_4)} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya eksistensi titik kesetimbangan E_1^* diperoleh dengan ketentuan E_1^* eksis jika $\omega_1\omega_2 > \beta_1\beta_2$ dan

- $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ atau
- $\gamma_1 < \gamma_2$ dan $\gamma_3 < \gamma_4$

3.2. Bilangan Reproduksi Dasar. Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0 merupakan nilai harapan banyaknya infeksi tiap satuan waktu. Bilangan reproduksi dasar dicari menggunakan metode matriks *Next Generation* [3]. Penggunaan metode ini secara spesifik dapat dilihat pada [8]. Berdasarkan sistem persamaan (??), diambil sistem persamaan yang memuat sub populasi terinfeksi, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= aES + bIS + \beta_2I - \omega_1E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_1E - \omega_2I \end{aligned} \tag{3}$$

Berdasarkan persamaan (??) diperoleh matriks F dan V sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} aES + bIS + \beta_2I \\ \beta_1E \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1E \\ \omega_2I \end{bmatrix} \tag{4}$$

Matriks Jacobian dari persamaan (4) dinyatakan dengan matriks $F = J(f)$ dan $V = J(V)$, diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} aS & bS + \beta_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Selanjutnya substitusi titik kesetimbangan bebas perokok pada persamaan (2) ke persamaan (5), diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \frac{a\sigma}{\mu} & \frac{b\sigma}{\mu} + \beta_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matriks *Next Generation* (K) didefinisikan berdasarkan persamaan (6) dengan $K = FV^{-1}$, yaitu

$$K = \begin{bmatrix} \frac{a\sigma}{\mu\omega_1} & \frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \\ \frac{\beta_1}{\omega_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan nilai eigen positif terbesar dari matriks K yaitu $R_0 = \rho(K)$, dengan ρ nilai eigen dominan. Untuk menentukan nilai eigen dari K , maka akan dicari persamaan karakteristik dari matriks K , yaitu $\det(KI) = 0$ diperoleh

$$\lambda^2 - \frac{a\sigma}{\mu\omega_1}\lambda - \frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right) \tag{8}$$

Berdasarkan persamaan (8), nilai eigen diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sigma}{\mu\omega_1} \pm \sqrt{\frac{a^2\sigma^2}{\mu^2\omega_1^2} + 4\frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right)} \right) \tag{9}$$

Dengan demikian, dapat ditentukan nilai eigen terbesar matriks K , yaitu

$$R_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sigma}{\mu\omega_1} \pm \sqrt{\frac{a^2\sigma^2}{\mu^2\omega_1^2} + 4\frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right)} \right) \tag{10}$$

Persamaan (10) adalah nilai ambang batas yang menjadi tolak ukur tingkat penyebaran populasi perokok. Kondisi yang memungkinkan berdasarkan [3] terdapat pada Definisi (3.1) sebagai berikut

Definisi 3.1. *Jika $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas perokok stabil asimtotik lokal, sehingga tidak terjadi penyebaran populasi perokok. Selanjutnya jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal, sehingga terjadi penyebaran populasi perokok.*

3.3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan. Berdasarkan persamaan (1) dengan mengacu pada [10], diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} aE - bI - \mu & -aS + \alpha_2 & -bS + \rho_1 & \psi_2 \\ aE + bI & aS - \omega_1 & bS + \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\omega_2 & 0 \\ 0 & \psi_1 & \rho_2 & -\omega_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Substitusi titik kesetimbangan bebas perokok pada persamaan (2) ke persamaan (11), dengan persamaan karakteristik diperoleh dari $\det(\lambda I - J(E_0^*))$ yang mengacu pada [1] menghasilkan

$$\begin{bmatrix} \lambda + \mu & \frac{a\sigma}{\mu} - \alpha_2 & \frac{b\sigma}{\mu} - \rho_1 & -\psi_2 \\ 0 & \lambda - \frac{a\sigma}{\mu} + \omega_1 & \frac{-b\sigma}{\mu} - \beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \lambda + \omega_2 & 0 \\ 0 & -\psi_1 & -\rho_2 & \lambda + \omega_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dengan menggunakan aturan kofaktor, persamaan karakteristik pada sistem (12) yaitu

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \omega_3) \left(\lambda^2 + \left(\omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu} \right) \lambda + \left(\omega_1\omega_2 - \frac{b\sigma\beta_1}{\mu} - \beta_1\beta_2 \right) \right) \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (13), diperoleh empat nilai eigen yang didefinisikan yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -\omega_3 \end{aligned}$$

Karena setiap nilai parameter adalah positif, maka λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Sementara untuk melihat kestabilan nilai eigen lainnya digunakan kriteria Routh Hurwitz

$$\lambda^2 + \left(\omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu} \lambda \right) + \left(\omega_1 \omega_2 - \frac{b\sigma\beta_1}{\mu} - \beta_1\beta_2 \right) = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (15)$$

dengan:

$$a_0 = 1, a_1 = \omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu}, a_2 = \omega_1\omega_2 - \left(\frac{b\sigma\beta_1}{\mu} + \beta_1\beta_2 \right)$$

Karena setiap nilai parameter positif, maka dapat dipastikan a_0, a_1 , dan a_2 merupakan bilangan positif. Dengan demikian $a_1a_2a_0a_3 > 0$, sehingga memenuhi kriteria kestabilan Routh Hurwitz. Selanjutnya substitusi titik kesetimbangan endemik pada persamaan (2) ke persamaan (11), dengan persamaan karakteristik diperoleh dari $\det(\lambda I - J(E_1^*))$ yang mengacu pada [1] menghasilkan

$$\begin{bmatrix} \lambda - j_{11} & -j_{12} & -j_{13} & -\psi_2 \\ -j_{21} & \lambda - j_{22} & -j_{23} & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \lambda + \omega_2 + 0 & \\ 0 & -\psi_1 & -\rho_2 & \lambda + \omega_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

dengan

$$\begin{aligned} j_{11} &= \frac{a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2 - (a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\ j_{12} &= \frac{a\beta_1\beta_2 - (a\omega_1\omega_2 + a\alpha_2\omega_2 + b\alpha_2\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{13} &= \frac{b\beta_1\beta_2 - (b\omega_1\omega_2 + a\rho_1\omega_2 + b\rho_1\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{21} &= \frac{(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\ j_{22} &= \frac{a\beta_1\beta_2 - (2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{23} &= \frac{b\omega_1\omega_2 - (2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan kofaktor, persamaan karakteristik pada sistem (16) yaitu

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (17)$$

dengan:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \omega_2 + \omega_3 + k_1 - k_2 \\ a_2 &= \pi_1 - \pi_2 \\ a_3 &= \pi_3 - \pi_4 \\ a_4 &= \pi_5 - \pi_6 \end{aligned}$$

dimana:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= \omega_2\omega_3 + k_3 + k_1\omega_2 + k_1\omega_3 + k_6 \\
 \pi_2 &= k_4 + k_2\omega_2 + k_2\omega_3 + k_5 \\
 \pi_3 &= \omega_2k_3 + \omega_3k_3 + \omega_2\omega_3k_1 + \omega_2k_6 + \omega_3k_6 + k_7 \\
 \pi_4 &= \omega_2k_4 + \omega_3k_4 + \omega_2\omega_3k_2 + \omega_2k_5 + \omega_3k_5 + k_8 \\
 \pi_5 &= \omega_2\omega_3k_3 + \omega_2\omega_3k_6 + k_{10} \\
 \pi_6 &= \omega_2\omega_3k_4 + \omega_2\omega_3k_5 + k_9b\gamma\beta b\omega\beta \\
 k_1 &= \frac{a\gamma_2\omega_2 + \gamma_1\mu\omega_2}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
 k_2 &= \frac{a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4) + \frac{a\beta_1\beta_2}{a\omega_2 + b\beta_1}} \\
 k_3 &= \frac{a\beta_1\beta_2(a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2) + (a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)(2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
 k_4 &= \frac{(a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2)(2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1) + a\beta_1\beta_2(a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
 k_5 &= \frac{a\beta_1\beta_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
 k_6 &= \frac{(a\omega_1\omega_2 + a\alpha_2\omega_2 + b\alpha_2\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
 k_7 &= \frac{\beta_1(2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{\beta_1(b\omega_1\omega_2 + a\rho_1 + \omega_2 + b\rho_1\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{(a\omega_2 + b\beta_1)\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
 k_8 &= \frac{b\beta_1\omega_1\omega_2}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} + \frac{\psi_1(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
 k_9 &= \frac{\beta_1\omega_3(2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2\omega_3(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} + \frac{\beta_1\omega_2(b\omega_1\omega_2 + a\rho_1\omega_2 + b\rho_1\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
 k_{10} &= \frac{b\beta_1\omega_1\omega_2\omega_3}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2\omega_3(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} + \frac{\psi_1\omega_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)}
 \end{aligned}$$

Akar-akar karakteristik dari persamaan (17) akan dicari menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik kesetimbangan endemik akan stabil jika semua koefisien persamaan karakteristik bernilai positif dan semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif [4]. Koefisien-koefisien pada persamaan (17) positif jika memenuhi $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ maka

$$\begin{aligned}
 a_0 &> 0 \\
 a_1 &> 0 \text{ jika } \omega_2 + \omega_3 + k_1 > k_2 \\
 a_2 &> 0 \text{ jika } \pi_1 > \pi_2 \\
 a_3 &> 0 \text{ jika } \pi_3 > \pi_4 \\
 a_4 &> 0 \text{ jika } \pi_5 > \pi_6
 \end{aligned}$$

Dengan mengacu pada [4] diperoleh matriks Hurwitz untuk persamaan (17) sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

untuk menentukan kriteria kestabilan, dibuktikan untuk setiap $\det(D) > 0$. Kriteria kestabilan dari persamaan (17) dipenuhi jika $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ maka

$$\begin{aligned}
 a_1 &> 0 \text{ jika } \omega_2 + \omega_3 + k_1 > k_2 \\
 a_1 - a_2 - a_0a_3 &> 0 \text{ jika } \eta_1 > \eta_2 \\
 (a_1a_2a_3 + a_0a_1a_5) - (a_0a_3^2 + a_1^2a_4) &> 0 \text{ jika } \eta_3 > \eta_4 \\
 (a_1a_2a_3a_4 + a_0a_1a_2a_7) - (a_0a_2a_3a_5 + a_0a_1a_3a_6) &> 0 \text{ jika } \eta_5 > \eta_6
 \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2 + \pi_4 \\ \eta_2 &= \omega_2\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1 + \pi_3 \\ \eta_3 &= \pi_3(\omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2) + \pi_4(\omega_2\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1) + \pi_5(\omega_{22} + \omega_{32} + k_{21} + \\ &+ k_{22} + 2\omega_2\omega_3 + 2\omega_2k_1 + 2\omega_3k_1) + \pi_{32} + \pi_{42} + \pi_6(2\omega_2k_2 + 2\omega_3k_2 + 2k_1k_2) \\ \eta_4 &= \pi_3(\omega_3\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1) + \pi_4(\omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2) + 2\pi_3\pi_4 + \pi_5(2\omega_2k_2 + \\ &+ 2\omega_3k_2 + 2k_1k_2) + \pi_6(\omega_{22} + \omega_{32} + k_{21} + k_{22} + 2\omega_2\omega_3 + 2\omega_2k_1 + 2\omega_3k_1) \\ \eta_5 &= \pi_5(\pi_3(\omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1) + \pi_4(\omega_2\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_1 + k_2\pi_1)) + \pi_6(\pi_3(\omega_2\pi_2 + \\ &+ \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1) + \pi_4(\omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2)) \\ \eta_6 &= \pi_5(\pi_3(\omega_2\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1) + \pi_4(\omega_2\pi_1 + \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2)) + \pi_6(\pi_3(\omega_2\pi_1 + \\ &+ \omega_3\pi_1 + k_1\pi_1 + k_2\pi_2) + \pi_4(\omega_2\pi_2 + \omega_3\pi_2 + k_1\pi_2 + k_2\pi_1)) \end{aligned}$$

3.4. Simulasi Numerik. Pada bagian ini, diamati dinamika pada penyebaran populasi perokok dengan menggunakan nilai awal yaitu $S(0) = 50$, $E(0) = 3$, $I(0) = 1$ dan $R(0) = 1$ dan nilai parameter pada Tabel 2.

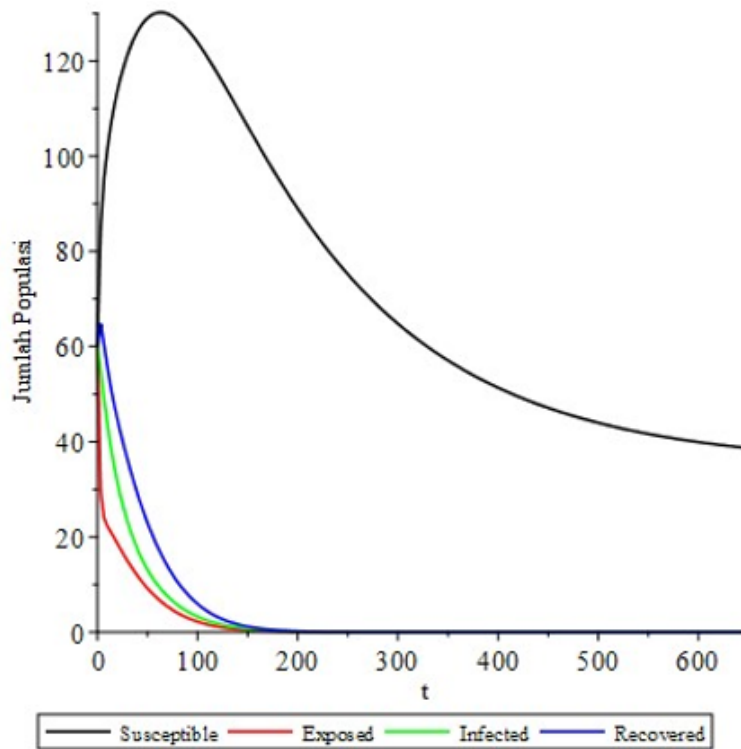
TABEL 2. Nilai Parameter Komputasi

Parameter	Nilai $R_0 < 1$	Nilai $R_0 > 1$
σ	0,210	0,06
a	0,001	1,00
b	0,002	2,00
α_2	0,300	0,050
β_1	0,030	0,050
β_2	0,010	0,003
ρ_1	0,020	0,002
ρ_2	0,003	0,003
ψ_1	0,200	0,300
ψ_2	0,100	0,500
μ	0,006	0,060
δ	0,010	0,010

(1) Simulasi Nilai $R_0 < 1$

Untuk $R_0 < 1$ dengan nilai awal dan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh simulasi yang disajikan pada Gambar 2 dengan nilai $R_0 = 0,3366982783 < 1$ dan $(E_0^* = 35, 0, 0, 0)$.

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa populasi stabil disekitar titik kesetimbangan, proporsi individu *Susceptible* (S) mengalami kenaikan pada awal waktu dari jumlah populasi awal $S = 50$ namun seiring berjalannya waktu populasi ini mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $S = 35$, proporsi individu *Exposed* dengan nilai awal $E = 3$ pada awal waktu mengalami kenaikan, namun pada saat t tertentu mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $E = 0$, artinya tidak terdapat lagi populasi *Exposed* pada penyebaran populasi perokok, proporsi individu *Infected* mengalami penurunan dari jumlah populasi awal $I = 1$ hingga mencapai titik setimbang yaitu $I = 0$, artinya tidak terdapat populasi *Infected* pada penyebaran populasi perokok, dan proporsi individu *Recovered* dengan populasi awal $R = 1$ pada awal waktu mengalami kenaikan, namun pada waktu t tertentu populasi *Recovered* mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbanga yaitu $R = 0$, sehingga untuk titik kesetimbangan bebas perokok dengan kondisi $R_0 < 1$ bersifat stabil, artinya tidak terdapat penyebaran populasi perokok. Hal ini dikarenakan populasi *Susceptible* tidak memilih untuk menjadi perokok dengan begitu tidak terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* terhadap *Exposed* dan interaksi *Susceptible* terhadap *Infected*.



GAMBAR 2. Dinamika penyebaran perokok ketika $R_0 < 1$

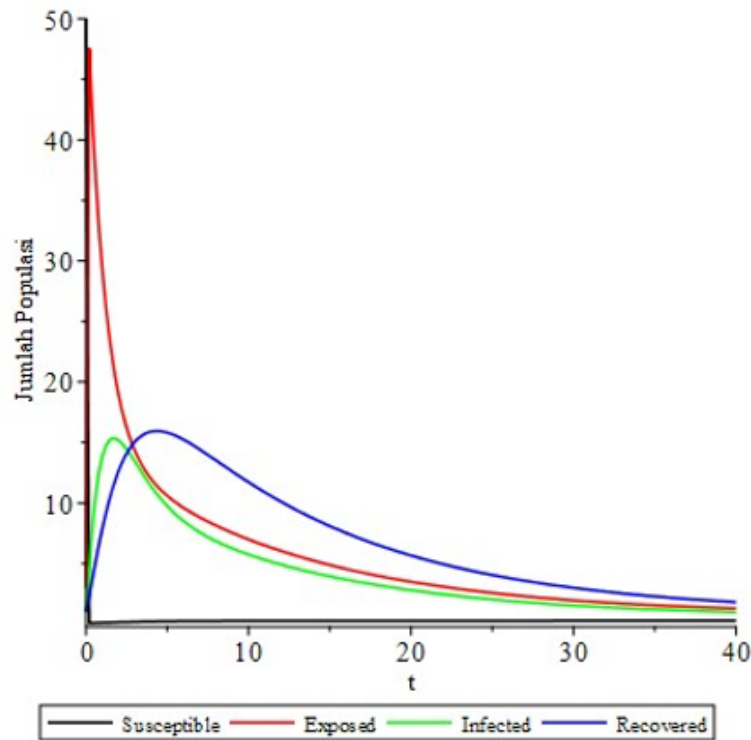
(2) Simulasi Nilai $R_0 > 1$

Untuk $R_0 > 1$ dengan nilai awal dan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh simulasi yang disajikan pada Gambar 3 dengan nilai $R_0 = 5,767456357 > 1$ dan $E_1^* = (0,3014201183;0,7768256415;0,5629171315;0,9206418893)$.

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa populasi stabil disekitar titik kesetimbangan. Proporsi individu *Susceptible* (S) mengalami penurunan dari jumlah populasi awal $S = 50$ hingga mencapai titik setimbang 0,3, hal ini dikarenakan terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* terhadap individu perokok, dengan begitu proporsi individu *Exposed* mengalami kenaikan dari jumlah populasi awal $E = 3$ diawal waktu, namun pada saat t tertentu populasi *Exposed* mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $E = 0,78$. Penurunan ini dikarenakan terjadi perpindahan populasi *Exposed* menjadi populasi *Infected*, sehingga populasi *Infected* mengalami kenaikan pada awal waktu dari jumlah populasi awal $I = 1$, namun pada t tertentu mengalami penurunan hingga menuju titik setimbang yaitu $I = 0,56$, hal ini dikarenakan sebagian populasi *Infected* memilih untuk berhenti merokok, sehingga populasi *Recovered* mengalami kenaikan dari jumlah populasi awal $R = 1$ pada awal waktu, namun pada t tertentu populasi *Recovered* mengalami penurunan hingga menuju titik setimbang yaitu $R = 0,9$. Hal ini menunjukkan setiap populasi menuju titik setimbang dan stabil, artinya pada kondisi ini terjadi penyebaran populasi perokok.

4. SIMPULAN

Model matematika penyebaran populasi perokok menghasilkan titik kesetimbangan bebas perokok yang stabil ketika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik yang stabil ketika $R_0 > 1$.



GAMBAR 3. Dinamika penyebaran perokok ketika $R_0 > 1$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H., 1991, Aljabar Linear Elementer, Jakarta, Erlangga.
- [2] [DINKES] Dinas Kesehatan, 2017, Pengertian Merokok dan Akibat dari Merokok , 18 Maret 2019, [http : //dinkes.bantenprov.go.id](http://dinkes.bantenprov.go.id). <https://dibi.bnppb.go.id/data-bencana/lihat-data/>
- [3] Driessche, P.V.D. dan Watmough, J. 2002. Reproduction Number and Subthreshold Endemic Equilibrium for Compartmental of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180:29-48.
- [4] Edelstein-Keshet, L., 1998, *Mathematical Models in Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).
- [5] Govan, Ratiangsih, R, dan Puspitah, J., 2016, Membangun Model Penyebaran Perilaku Merokok Berdasarkan Faktor Biologis dan Faktor Lingkungan Sosial, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, Vol.13, No.2, 35-47.
- [6] Hutabarak, T., Nancy, 2012, yang bikin orang merokok lagi setelah berhenti, *detikHealth*, 14 Juli 2019, <https://m.detik.com>.
- [7] Osman, M dan Adu, I., 2017, Modelling the Dynamics of Smoking Epidemic, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, ISSN: 2456-9968, 1-19.
- [8] Resmawan dan Nurwan, 2017, Kostruksi Bilangan Reproduksi pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan, *Jurnal Matematika Integratif*, Vol.13, No.2, 105-114.
- [9] Sulastri, Herman, D, Darwin E., 2018, Keinginan Berhenti Merokok Pada Pelajar Perokok Berdasarkan Global Youth Tobacco Survey di SMK Negeri Kota Padang, *Jurnal Kesehatan Andalas*, Vol. 2, No. 2.
- [10] Tu PNV, 1994, *Dynamical System, An Introduction with Application in Economics and Biology*, Heidelberg, Germany, Springer-Verlag. Verhulst, F., 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [11] Wiggins, S., 2003, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Second Edition, New York: Springer-Verlag.
- [12] Zeb, A., Bibi, F., dan Zaman, G., 2015, Optimal Control Strategies in Square Root Dynamic of Smoking Model, *International Journal of Scientific World*, Vol. 1, No. 3.