

## Model Matematika Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Intervensi

NICOLA CHANDRA DARMAWAN, HENGKI TASMAN\*

Departemen Matematika FMIPA UI, Kampus UI Depok, 16424, Indonesia,  
nicolachandra@sci.ui.ac.id, htasman@sci.ui.ac.id

\* *Corresponding Author.*

### Abstrak

Pneumonia merupakan penyakit infeksi saluran pernapasan yang menyerang paru-paru. Salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengendalikan penyebaran penyakit ini adalah dengan melakukan pengobatan dan vaksinasi. Pada artikel ini dikonstruksi model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan intervensi pengobatan dan vaksinasi. Model matematika tersebut dikaji secara analitik dan dilakukan simulasi numerik. Kajian analitik meliputi keberadaan titik keseimbangan dan kestabilan lokalnya, serta bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$ . Dengan simulasi numerik didapat informasi bahwa intervensi vaksinasi dan pengobatan mampu mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia.

*Kata kunci:* epidemiologi matematika, titik keseimbangan,  $\mathcal{R}_0$ , kestabilan lokal.

### Abstract

*Pneumonia is a respiratory tract infection that attacks the lungs. One of the efforts that can be done to control the spread of this disease is by treatment and vaccination. In this article, a mathematical model of the spread of pneumonia with treatment and vaccination was constructed. The model was analyzed analytically and numerical simulation was carried out. The analysis includes existence of equilibrium points, the local stability of the points, and basic reproduction number  $\mathcal{R}_0$ . By numerical simulation, it was found that the vaccination and treatment interventions were able to control the spread of pneumonia.*

*Key words:* mathematical epidemiology, equilibrium point, basic reproduction number, local stability.

## 1. PENDAHULUAN

Pneumonia atau paru-paru basah merupakan infeksi saluran pernapasan yang menyerang paru-paru. Pneumonia disebabkan oleh infeksi mikroorganisme, antara lain jamur, bakteri, dan virus. Infeksi tersebut menyebabkan peradangan pada alveoli sehingga organ tersebut dapat dipenuhi cairan atau nanah. *Streptococcus pneumoniae* merupakan bakteri penyebab paling umum pneumonia [14].

---

2000 Mathematics Subject Classification: 92D30

Received: 10-10-2022; Revised: 22-11-2021; Accepted: 26-04-2022.

Menurut World Health Organization (WHO), pneumonia adalah penyakit menular yang menyebabkan kematian terbesar pada anak-anak di seluruh dunia. Pada tahun 2017, pneumonia mengakibatkan kematian sekitar 808.694 anak di bawah usia 5 tahun. Menurut *Centers for Disease Control and Prevention*, lebih dari satu juta orang terjangkit penyakit pneumonia setiap tahun di ruang gawat darurat. Sekitar 50.000 orang meninggal karena infeksi penyakit tersebut setiap tahun [2]. Kelompok usia yang sangat rentan terkena penyakit pneumonia adalah anak kecil dan orang dewasa yang berusia di atas 65 tahun.

Menurut WHO, pneumonia dapat menyebar dengan secara langsung dan tidak langsung. Penyebaran pneumonia secara langsung dapat melalui tetesan air liur penderita pneumonia, *droplet* dari batuk atau bersin yang terbawa udara yang kemudian terhirup oleh orang sehat lain. Penyebaran pneumonia secara tidak langsung dapat terjadi jika orang sehat menyentuh benda yang telah terkena percikan air liur penderita pneumonia, lalu menyentuh mulut dan hidung [2].

Proses infeksi pada pneumonia dapat dibagi menjadi dua, yaitu proses infeksi cepat (*fast infection*) dan proses infeksi lambat (*slow infection*) [3]. Pada proses infeksi cepat, gejala penyakit pneumonia muncul dalam waktu 24 - 48 jam. Pada proses infeksi lambat, gejala penyakit pneumonia muncul dengan lambat setelah beberapa hari kemudian [10].

Pneumonia dapat dicegah dengan beberapa cara, yaitu dengan melakukan vaksinasi dan menjaga kebersihan. Salah satu vaksin yang dapat mencegah penularan pneumonia adalah vaksin *pneumokokus*. Vaksin tersebut berguna untuk melindungi manusia terhadap bakteri *Streptococcus pneumoniae*. Vaksinasi umumnya direkomendasikan untuk kelompok usia yang sangat rentan tertular pneumonia, yaitu: anak-anak di bawah lima tahun, orang dewasa yang berusia di atas 65 tahun, dan individu dengan kondisi penyakit tertentu, seperti penyakit jantung dan ginjal. Vaksin tersebut mungkin tidak selalu dapat mencegah pneumonia, tetapi dapat mencegah komplikasi serius. Vaksin *pneumokokus* biasanya diberikan selama jadwal vaksinasi anak-anak di bawah lima tahun [1].

Penderita dengan kasus pneumonia yang kronis, dibutuhkan penanganan medis lebih lanjut dan melakukan rawat inap di rumah sakit [4]. Menurut WHO, penderita pneumonia harus diobati dengan pemberian antibiotik dan rawat inap hanya direkomendasikan untuk kasus pneumonia yang kronis [14].

Penderita pneumonia biasanya membaik setelah tiga sampai lima hari pengobatan dengan pemberian antibiotik, sedangkan penderita yang membutuhkan perawatan di rumah sakit mungkin membutuhkan waktu yang lebih lama untuk proses penyembuhan. Pneumonia merupakan penyakit yang dapat sangat fatal karena angka mortalitas hingga 30% untuk penderita pneumonia kronis yang membutuhkan perawatan intensif oleh tenaga medis. Secara keseluruhan, sekitar 5% - 10% penderita yang dirawat di rumah sakit meninggal karena penyakit tersebut [13].

Penderita pneumonia akan menimbulkan gejala dengan durasi yang bervariasi berdasarkan jenis pneumonia dan status kesehatan penderita tersebut. Individu yang sebelumnya sehat, pneumonia dapat menjadi penyakit ringan, yang sembuh hanya dalam dua hingga tiga minggu. Pada kelompok usia yang memiliki imun yang lemah, kelompok lanjut usia, dan pengidap penyakit kronis atau masalah kesehatan lainnya, pemulihan dapat memakan waktu enam hingga delapan minggu [13].

Model matematika untuk penyakit menular telah diakui sebagai metode yang dapat memberikan pemahaman mengenai dinamika infeksi dalam tubuh, dinamika penularan dalam populasi manusia, dan perumusan atau implementasi program pengendalian penyakit [9]. Penelitian model matematika penyebaran penyakit pneumonia telah banyak dilakukan, antara lain; model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan faktor vaksin [11] dan model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan model *SVEIR* [15].

Pada artikel ini dikonstruksi suatu model matematika dengan tujuan untuk menganalisis penyebaran penyakit pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan. Mengacu pada penelitian-penelitian sebelumnya yang menggunakan intervensi vaksin dan pengobatan, model

yang dikonstruksi pada artikel ini mempertimbangkan efektivitas vaksin yang tidak 100%, proses infeksi lambat dan proses infeksi cepat, serta faktor berkurangnya kekebalan tubuh pada penderita yang telah sembuh yang kemudian dapat menjadi rentan kembali. Kebaruan dari model yang dikonstruksi pada artikel ini adalah model mempertimbangkan proses infeksi lambat dan proses infeksi cepat pada pneumonia.

## 2. MODEL MATEMATIKA

**2.1. Konstruksi Model.** Dalam konstruksi model matematika penyebaran pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan, populasi manusia dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu:

- (1) Subpopulasi rentan  $S$ , yaitu subpopulasi yang rentan terhadap infeksi pneumonia.
- (2) Subpopulasi tervaksin  $V$ , yaitu subpopulasi yang telah mendapat vaksin.
- (3) Subpopulasi terpapar  $E$ , yaitu subpopulasi yang telah terinfeksi penyakit pneumonia, tetapi belum dapat menularkan pneumonia kepada individu lain.
- (4) Subpopulasi menular  $I$ , yaitu subpopulasi yang telah terinfeksi pneumonia dan sudah dapat menularkan pneumonia kepada individu lain.
- (5) Subpopulasi sembuh  $R$ , yaitu subpopulasi yang telah sembuh dari pneumonia.

Pada konstruksi model tersebut, diperlukan beberapa asumsi sebagai berikut:

- (1) Populasi manusia bersifat tertutup dan homogen.
- (2) Semua individu yang lahir masuk ke dalam kelompok rentan.
- (3) Vaksin tidak efektif 100%.
- (4) Individu yang telah sembuh dapat menjadi rentan kembali karena menurunnya antibodi.
- (5) Jika individu yang telah tervaksin pneumonia terinfeksi, maka ia menjalani proses infeksi lambat.
- (6) Penyakit pneumonia hanya dapat disembuhkan dengan melakukan pengobatan.
- (7) Tingkat kelahiran individu dan tingkat kematian alami sama.

Model yang dikonstruksi memperhatikan dua proses infeksi, yaitu proses infeksi cepat dan proses infeksi lambat. Pada proses infeksi cepat, jika individu pada subpopulasi rentan  $S$  terinfeksi, maka diasumsikan ia langsung masuk ke subpopulasi menular  $I$ . Pada proses infeksi lambat, ketika individu pada subpopulasi rentan  $S$  terinfeksi, maka ia masuk ke subpopulasi terpapar  $E$ , lalu setelah waktu tertentu ia pindah ke subpopulasi menular  $I$ .

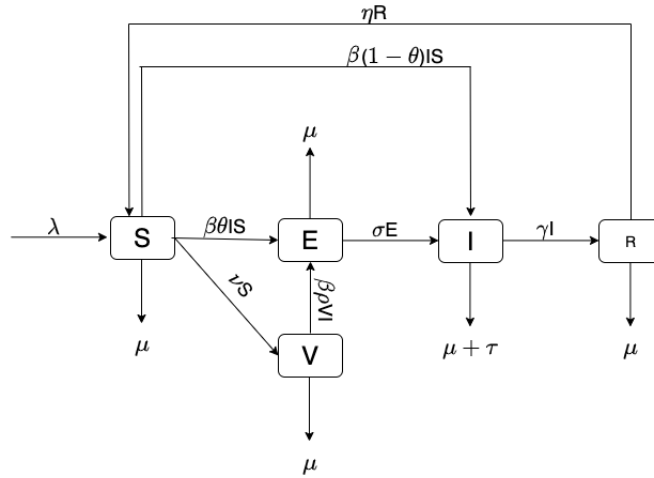
Lebih lanjut, diagram transmisi penyakit pneumonia dapat dilihat pada GAMBAR 1.

Berdasarkan diagram transmisi pada GAMBAR 1, model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \lambda - vS - \beta SI - \mu S + \eta R, \\
 \frac{dV}{dt} &= vS - \beta \rho VI - \mu V, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta \rho VI + \beta \theta SI - \mu E - \sigma E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \sigma E + \beta(1 - \theta)IS - (\mu + \tau)I - \gamma I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \eta R - \mu R.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Deskripsi parameter-parameter pada model (1) dapat dilihat pada TABEL 1. Semua parameter diasumsikan konstan dan positif.

Berdasarkan asumsi, vaksin yang digunakan tidak efektif 100%, sehingga individu yang telah divaksin masih mungkin terinfeksi pneumonia dengan faktor reduksi efektivitas vaksin yang diwakili oleh parameter  $\rho$ . Model (1) juga mempertimbangkan probabilitas infeksi lambat yang diwakili oleh parameter  $\theta$  dan infeksi cepat  $1 - \theta$ . Infeksi lambat terjadi ketika individu



Model 3.png

GAMBAR 1. Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Intervensi Vaksinasi dan Pengobatan.

TABEL 1. Deskripsi Parameter pada Model (1).

Parameter	Deskripsi
$\lambda$	Laju rekrutmen
$\mu$	Laju kematian alami per kapita
$v$	Laju vaksinasi per kapita
$\beta$	Laju sukses infeksi
$\theta$	Probabilitas terjadinya infeksi-lambat
$\eta$	Laju individu pulih kembali menjadi rentan
$\rho$	Faktor reduksi efektivitas vaksin
$\sigma$	Laju peningkatan infeksi
$\tau$	Laju kematian karena infeksi penyakit
$\gamma$	Laju pengobatan infeksi

rentan terinfeksi pneumonia masuk ke dalam kompartemen *exposed* terlebih dahulu, sedangkan infeksi cepat terjadi ketika individu rentan terinfeksi pneumonia langsung masuk ke dalam kompartemen *infectious*. Berdasarkan asumsi bahwa pneumonia hanya dapat disembuhkan dengan pengobatan, kelompok terinfeksi yang menerima pengobatan dan sembuh dimasukkan ke dalam kompartemen *recovered* yang diwakili oleh parameter  $\gamma$ . Individu yang telah pulih dapat menjadi rentan lagi yang diwakili oleh parameter  $\eta$ .

2.2. **Analisis Model.** Model (1) memiliki titik keseimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S, V, E, I, R) = \left( \frac{\lambda}{v + \mu}, \frac{v \lambda}{\mu (v + \mu)}, 0, 0, 0 \right).$$

Jika program vaksinasi tidak dilaksanakan ( $v = 0$ ), maka komponen  $V$  pada titik bebas penyakit  $E_0$  bernilai nol.

Bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$  adalah banyaknya kasus baru infeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa menularnya di dalam populasi yang sepenuhnya rentan [5].

Dengan menggunakan metode *Next-Generation Matrix large domain* didapat *basic reproduction number*

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \lambda [(1 - \theta) \mu^2 + \mu \sigma + \rho \sigma v]}{\mu (\mu + v) (\mu + \sigma) (\mu + \tau + \gamma)}.$$

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit, dilakukan pelinieran model (1) di titik keseimbangan bebas penyakit  $E_0$ . Dari pelinieran tersebut, didapat nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = -\mu - \eta$ ,  $\lambda_3 = -\mu - v$ . Selain itu, nilai eigen  $\lambda_4, \lambda_5$  didapat dari persamaan

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

dengan

$$b = \frac{\beta \Lambda (1 - \theta)}{\mu + v} + (2\mu + \sigma + \tau + \gamma) > 0,$$

$$c = (\mu + \sigma) (\mu + \tau + \gamma) (1 - \mathcal{R}_0).$$

Kedua nilai eigen  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  bernilai negatif jika  $\mathcal{R}_0 < 1$ . Akibatnya, didapat teorema berikut.

**Teorema 2.1.** *Titik keseimbangan bebas penyakit  $E_0$  stabil asimtotik lokal jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $\mathcal{R}_0 > 1$ .*

Lebih lanjut, model (1) mempunyai titik keseimbangan endemik  $E_1 = (S^*, V^*, E^*, I^*, R^*)$ , dengan

$$S^* = \frac{(\mu + \sigma)(\mu + \tau + \gamma)(\beta \rho I^* + \mu)}{\beta [(1 - \theta)\mu^2 + (I^* \beta (1 - \theta)\rho + \sigma)\mu + \rho\sigma(\beta I^* + v)]},$$

$$V^* = \frac{v(\mu + \sigma)(\mu + \tau + \gamma)}{\beta [(1 - \theta)\mu^2 + (I^* \beta (1 - \theta)\rho + \sigma)\mu + \rho\sigma(\beta I^* + v)]},$$

$$E^* = \frac{(\mu\theta + \rho(\beta\theta I^* + v))(\mu + \tau + \gamma)I^*}{(1 - \theta)\mu^2 + (I^* \beta (1 - \theta)\rho + \sigma)\mu + \rho\sigma(\beta I^* + v)},$$

$$R^* = \frac{\gamma I^*}{\eta + \mu},$$
(2)

dan  $I^*$  adalah akar persamaan

$$A I^2 + B I + C = 0, \tag{3}$$

dengan koefisien  $A, B, C$  sebagai berikut

$$A = \rho \beta^2 [\mu^3 + (\eta + \gamma + \sigma + \tau)\mu^2 + ((\eta + \gamma + \tau)\sigma + \eta(\gamma\theta + \tau))\mu + \eta \sigma \tau] > 0,$$

$$B = -\rho \lambda \beta^2 (\mu + \eta) ((1 - \theta)\mu + \sigma) + \beta (\eta \mu (\mu + \sigma) (\mu (1 + \rho) + \tau + \rho(\gamma + \tau)) + \gamma \mu \theta) + \eta \rho v [\gamma \mu + (\mu + \sigma)(\mu + \tau)] + \mu (\mu + \sigma) (\gamma + \mu + \tau) (\mu + \mu \rho + \rho v),$$

$$C = \mu (\eta + \mu) (\mu + \sigma) (\gamma + \mu + \tau) (\mu + v) (1 - \mathcal{R}_0).$$

Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$ , maka koefisien  $C$  bernilai positif, sehingga kedua akar bernilai positif atau keduanya bernilai negatif. Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$ , maka koefisien  $C$  bernilai negatif, sehingga ada satu akar positif dan satu akar negatif. Persamaan (3) memenuhi konsep biologis jika akarnya bernilai positif. Selain itu, komponen  $S^*, V^*, E^*, R^*$  juga bernilai positif jika  $I^*$  bernilai positif. Lebih lanjut, didapat teorema tentang keberadaan titik keseimbangan endemik sebagai berikut.

**Teorema 2.2.** *Model (1) memiliki titik keseimbangan endemik jika  $\mathcal{R}_0 > 1$ .*

Untuk mengetahui jenis kestabilan titik keseimbangan endemik pada model (1) digunakan Teorema Castillo-Chavez dan Song. Dipilih  $\beta$  sebagai parameter bifurkasi. Ambang batas  $\beta$  didapat dari persamaan  $\mathcal{R}_0 = 1$ , yaitu

$$\beta^* = \frac{\mu (\mu + v) (\mu + \sigma) (\mu + \tau + \gamma)}{\lambda \mu^2 (1 - \theta) + \mu \sigma + \rho \sigma v}. \tag{4}$$

Ambang batas  $\beta^*$  pada persamaan (4) disubstitusi ke persamaan (2), kemudian dihitung matriks Jacobiannya. Seluruh nilai eigen pada matriks Jacobian tersebut bernilai negatif dan terdapat nilai eigen sederhana 0. Matriks tersebut juga memiliki vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri yang non negatif dan berkorespondensi dengan nilai eigen sederhana 0. Dengan kondisi tersebut, untuk mencari kestabilan titik keseimbangan endemik dapat menggunakan rumus untuk mencari parameter  $a$  dan  $b$  pada Teorema Castillo-Chavez dan Song [8]

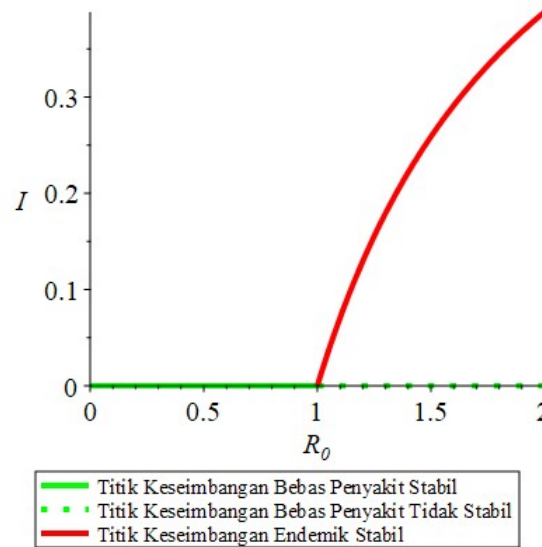
$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (0, 0),$$

$$b = \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi} (0, 0),$$

didapat  $a < 0$  dan  $b > 0$ . Jadi didapat teorema berikut.

**Teorema 2.3.** Model (1) mengalami fenomena bifurkasi maju di  $\mathcal{R}_0 = 1$ , sehingga mengakibatkan titik keseimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

**2.3. Diagram Bifurkasi.** Bifurkasi adalah perubahan perilaku sistem akibat parameter melewati titik kritis (parameter bifurkasi). Pada Teorema 2.3. telah diketahui bahwa model (1) mengalami bifurkasi maju saat  $\mathcal{R}_0 = 1$  [6]. Teorema 2.2 dan Teorema 2.3 dapat diilustrasikan pada GAMBAR 2.



GAMBAR 2. Ilustrasi Diagram Bifurkasi Model (1).

Titik keseimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0 < 1$ , dan berubah menjadi tidak stabil ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Pada saat  $\mathcal{R}_0 < 1$  tidak terdapat titik keseimbangan endemik, sedangkan pada saat  $\mathcal{R}_0 > 1$  muncul titik keseimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

**3.1. Analisis bilangan reproduksi dasar.** Analisis elastisitas bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$  terhadap suatu parameter memberikan informasi persentase perubahan  $\mathcal{R}_0$  terhadap persentase perubahan nilai parameter tersebut. Elastisitas bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$  terhadap

parameter  $p$  dihitung dengan menggunakan rumus [8]

$$\varepsilon_{\mathcal{R}_0}^p = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} \cdot \frac{p}{\mathcal{R}_0} \approx \frac{\% \Delta \mathcal{R}_0}{\% \Delta p}. \tag{5}$$

Untuk simulasi numerik, nilai-nilai parameter yang digunakan pada model (1) adalah sebagai berikut.

TABEL 2. Nilai Parameter Model (1).

No.	parameter	Nilai	Sumber
1.	$\lambda$	$\frac{1000}{70 \times 365}$	asumsi
2.	$\mu$	$\frac{1}{70 \times 365}$	Asumsi
3.	$v$	0,0621	[7]
4.	$\beta$	$\beta > 0$	asumsi
5.	$\theta$	0,7	[12]
6.	$\eta$	0,0241	[7]
7.	$\rho$	0,3	[15]
8.	$\sigma$	0,01096	[15]
9.	$\tau$	0,05	[13]
10.	$\gamma$	0,0714	[15]

Dengan mensubstitusi data pada TABEL 2 pada rumus elastisitas (5), didapat elastisitas bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$  terhadap parameter seperti pada TABEL 3.

TABEL 3. Elastisitas  $\mathcal{R}_0$  terhadap Parameter.

	Nilai Elastisitas
$\varepsilon_{\mathcal{R}_0}^v$	-0,001
$\varepsilon_{\mathcal{R}_0}^\rho$	0,998
$\varepsilon_{\mathcal{R}_0}^\gamma$	-0,588

Berdasarkan TABEL 3, jika laju pengobatan  $\gamma$  diperbesar 1%, maka  $\mathcal{R}_0$  menurun sebesar 0,588%. Jika faktor reduksi efektivitas vaksin  $\rho$  diperbesar 1%, maka  $\mathcal{R}_0$  meningkat 0,998%. Lebih lanjut, berdasarkan TABEL 3 urutan parameter yang memiliki pengaruh dari terbesar sampai terkecil pada model (1) adalah faktor reduksi efektivitas vaksin  $\rho$ , laju pengobatan  $\gamma$ , dan laju vaksinasi  $v$ .

Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$  terhadap laju vaksinasi  $v$ , faktor reduksi efektivitas vaksin  $\rho$ , dan laju pengobatan  $\gamma$ . Sensitivitas  $\mathcal{R}_0$  terhadap parameter  $p$  dihitung dengan menggunakan rumus [8]

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}_0}^p = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p}. \tag{6}$$

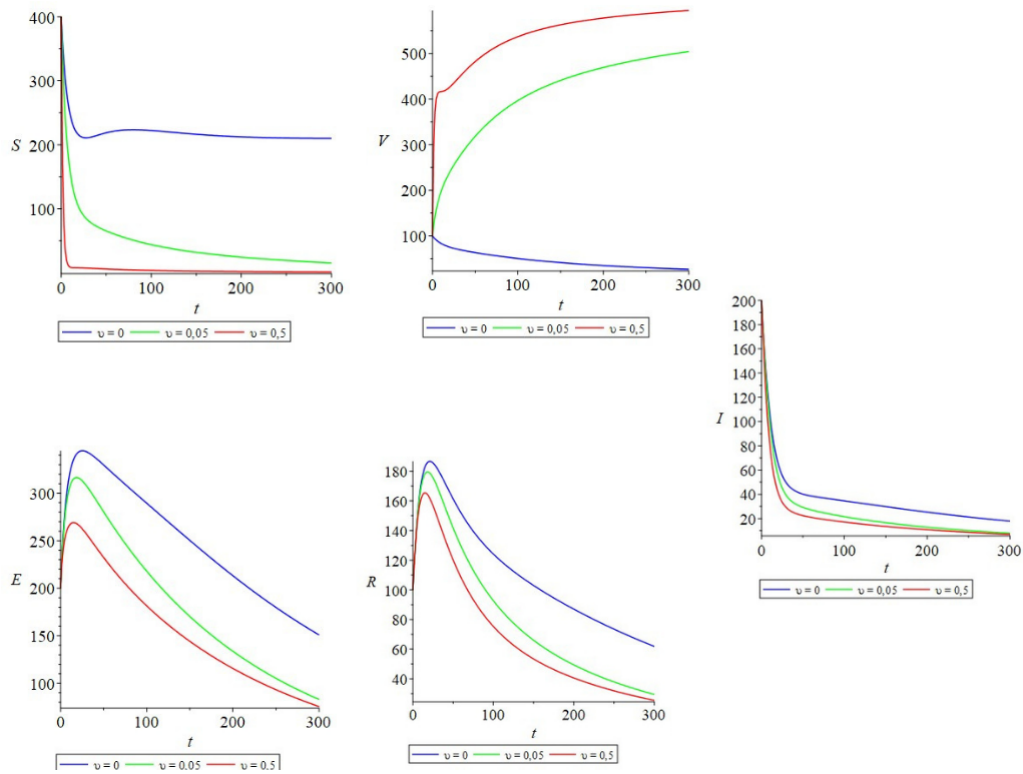
Pertama-tama substitusi nilai parameter pada TABEL 2 selain nilai parameter  $v$ ,  $\rho$ , dan  $\gamma$  ke persamaan  $\mathcal{R}_0$ , kemudian turunkan terhadap masing-masing parameter tersebut, sesuai

dengan rumus (6). Akibatnya didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial v} &\approx \frac{-59.620,151 - 0,1 v}{(1 + 25.550 v)^2} < 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \rho} &\approx 3,326 > 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \gamma} &\approx -\frac{0,121}{(0,050 + \gamma)^2} < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Pada persamaan (7) terlihat bahwa, hubungan  $\gamma$  dan  $v$  dengan  $\mathcal{R}_0$  berbanding terbalik, sedangkan  $\rho$  dan  $\mathcal{R}_0$  berbanding lurus. Dari analisis tersebut terlihat bahwa semakin besar nilai  $\rho$ , maka semakin besar juga nilai  $\mathcal{R}_0$ , sedangkan semakin besar nilai  $\gamma$  dan  $v$ , maka semakin kecil nilai  $\mathcal{R}_0$ .

**3.2. Simulasi numerik.** Nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik ini mengacu pada TABEL 2 dan nilai  $\beta = 0,000405$ . Sementara itu, nilai awal yang digunakan adalah  $(S_0, V_0, E_0, I_0, R_0) = (400, 100, 200, 200, 100)$ .



GAMBAR 3. Dinamika Populasi dengan Variasi Laju Vaksinasi  $v$  untuk 300 hari.

Hasil simulasi dari 3 variasi laju vaksinasi  $v$  untuk model (1) dapat dilihat pada GAMBAR 3. Kurva merah adalah dinamik subpopulasi ketika  $v = 0,5$ , kurva hijau ketika  $v = 0,05$ , dan kurva biru ketika  $v = 0$ .

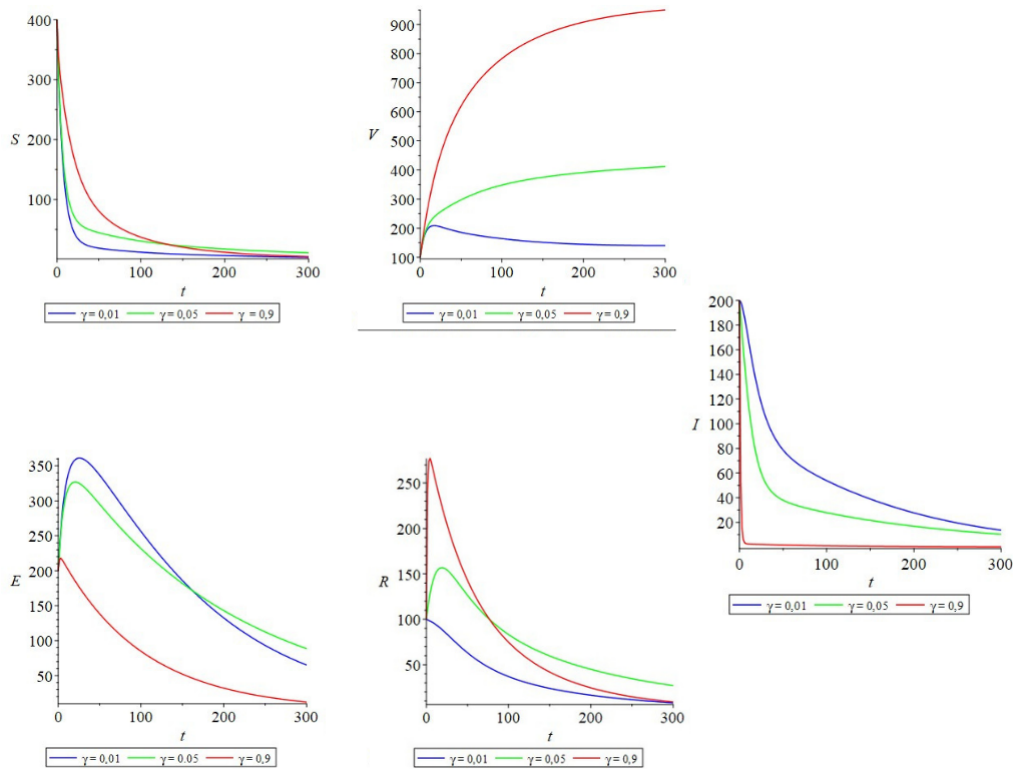
Pada kasus laju vaksinasi  $v = 0$ , subpopulasi individu rentan  $S$  cenderung stabil dan lebih banyak daripada kedua kasus lainnya. Selain itu, pada kasus ini subpopulasi individu yang telah melakukan vaksinasi  $V$  turun menuju nol.

Pada kasus laju vaksinasi  $v = 0,05$  dan  $v = 0,5$ , subpopulasi individu rentan  $S$  mengalami penurunan dan subpopulasi individu yang telah melakukan vaksinasi  $V$  meningkat. Hal tersebut mengindikasikan bahwa individu rentan  $S$  berpindah ke kompartemen vaksinasi  $V$ .



Di samping itu, semakin tinggi nilai  $v$ , maka subpopulasi individu terinfeksi  $I$  lebih cepat menurun. Jadi peningkatan laju vaksinasi  $v$  dapat memperkecil jumlah individu yang terinfeksi  $I$ , sehingga dapat mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia.

Semakin besar laju vaksinasi  $v$ , semakin kecil subpopulasi sembuh  $R$ . Hal ini dikarenakan ketika nilai parameter  $v$  makin besar, maka makin banyak individu rentan yang mendapatkan vaksin. Akibatnya, banyaknya individu rentan yang terinfeksi pneumonia  $I$  berkurang, sehingga individu yang sembuh  $I$  juga berkurang.



GAMBAR 4. Dinamika Populasi dengan Variasi Nilai  $\gamma$  untuk 300 hari.

Hasil simulasi 3 variasi laju pengobatan  $\gamma$  dari model (1) dapat dilihat pada GAMBAR 4. Kurva merah adalah dinamik subpopulasi ketika  $\gamma = 0,9$ , kurva hijau ketika  $\gamma = 0,05$ , dan kurva biru ketika  $\gamma = 0,01$ .

Pada kasus laju vaksinasi  $\gamma = 0,01$ , terlihat bahwa subpopulasi individu terinfeksi  $I$  cenderung menurun, berbeda dengan kasus  $\gamma = 0,05$  dan kasus  $\gamma = 0,9$  subpopulasi individu terinfeksi  $I$  cenderung meningkat. Semakin besar laju pengobatan  $\gamma$ , maka semakin besar subpopulasi individu terinfeksi  $I$ .

Pada jumlah individu yang terinfeksi, terlihat bahwa peningkatan nilai  $\gamma$  mengakibatkan penurunan yang cukup signifikan. Semakin besar nilai  $\gamma$  maka penurunan jumlah individu yang terinfeksi semakin besar. Informasi yang dapat diambil adalah laju pengobatan dapat mengurangi jumlah individu yang terinfeksi, sehingga dapat mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia.

#### 4. SIMPULAN

Pada artikel ini model penyebaran pneumonia dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan telah dikonstruksi. Kajian analitik yang dilakukan adalah analisis titik keseimbangan

bebas penyakit dan endemik, penentuan bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0$ , dan analisis diagram bifurkasi.

Titik keseimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan tidak stabil ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Titik keseimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Fenomena bifurkasi dari model yang dikonstruksi dianalisis dengan menggunakan Teorema Castillo-Chavez dan Song dan didapat bahwa model tersebut mengalami fenomena bifurkasi maju saat  $\mathcal{R}_0 = 1$ . Simulasi numerik memberikan informasi bahwa semakin besar laju vaksinasi  $v$  dan laju pengobatan  $\gamma$ , maka banyaknya individu yang terinfeksi pneumonia semakin berkurang. Akibatnya, dapat disimpulkan bahwa intervensi vaksinasi dan pengobatan dapat mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] CDC, 2020, *Pneumococcal Vaccination: What Everyone Should Know*, <https://www.cdc.gov/vaccines/vpd/pneumo/public/>, tanggal pembaruan informasi: 7 Agustus 2020.
- [2] CDC, 2021, *Pneumonia Can Be Prevented Vaccines Can Help*, <https://www.cdc.gov/pneumonia/prevention.html>, tanggal pembaruan informasi: 14 Oktober 2021.
- [3] Dahlan, Z., 2014, Pneumonia, dalam: *Buku Ajar Ilmu Penyakit Dalam, Jilid 1*, editor: Siti Setiati, InternaPublishing, Jakarta.
- [4] Dallas, M.E., 2021, *What Is Pneumonia? Symptoms, Causes, Diagnosis, Treatment, and Prevention*, <https://www.everydayhealth.com/pneumonia/guide/>, ditelaah terakhir: 5 November 2021.
- [5] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., & Roberts, M.G., 2009, The construction of Next-generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *J. R. Soc. Interface*, 7, 873-885.
- [6] Gumel, A.B, 2012, Causes of backward bifurcations in some epidemiological models. *J. Math. Anal. Appl.* 395 (2012) 355365.
- [7] Kozito.M., & Julius, T., 2018, A Mathematical Model of Treatment and Vaccination Interventions of Pneumococcal Pneumonia Infection Dynamics. *Journal of Applied Mathematics*.
- [8] Martcheva, M., 2015, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York: Springer.
- [9] Moghadas, S.M., 2006, Gaining insights into human viral diseases through mathematics. *European Journal of Epidemiology*, 21, 5, 337342.
- [10] NHS, 2019, Symptoms of pneumonia, <https://www.nhs.uk/conditions/pneumonia/>, last reviewed: June 30, 2019.
- [11] Otoo, D., Opoku, P., Charles, S., & Kingsley, A.P. (2020). Deterministic epidemic model for ( $SVC_{SY}C_{ASY}IR$ ) pneumonia dynamics, with vaccination and temporal immunity. *Infectious Disease Modelling*, 5, 4260.
- [12] Rusniwati, S.I, dkk., 2021, Model Matematika SEIPR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Faktor Imunisasi dan Pengobatan. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi* Vol. 17, No. 2, 202-218.
- [13] Stoppler, M.C., 2019, *Pneumonia*, [https://www.medicinenet.com/pneumonia\\_facts/article.htm](https://www.medicinenet.com/pneumonia_facts/article.htm), tanggal pembaruan informasi: 22 Februari 2021.
- [14] WHO, 2019, Pneumonia.
- [15] Zephaniah, O. C., Nwaugonma, U.R, Chioma, I.S , & Adrew, O., 2020, A Mathematical Model and Analysis of an *SVEIR* Model for Streptococcus Pneumonia with Saturated Incidence Force of Infection. *Mathematical Modelling and Applications*, Vol. 5, No. 1, 2020, pp. 16-38.