Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 17, No. 1 (2021), pp. 1–4. doi:10.24198/jmi.v17.1.33077.1-4

# Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan kecil dan Graf Bintang

Anggun Saputri Zain, Narwen, Effendi, dan Syafrizal Sy *

**Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Padang - 25163, INDONESIA**

**Abstrak**

Diberikan dua graf $G_1$ and $G_2$, bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(G_1, G_2) = t$ adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga setiap faktorisasi graf $K_{t\times j} := F_1 \oplus F_2$ senantiasa memenuhi kondisi berikut: $F_1$ memuat $G_1$ sebagai subgraf atau $F_2$ memuat $G_2$ sebagai subgraf. Pada paper ini, akan ditentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey multipartit himupnan $M_3(P_n, K_{1,t})$ dengan $P_n$ adalah lintasan untuk $n = 2, 3$ titik dan $K_{1,t}$ merupakan graf bintang dengan $t + 1$ titik dan $t \geq 2$.

*Kata kunci*: Bilangan Ramsey multipartit himpunan, graf bintang, graf lintasan

**Abstract**

*Given two graphs $G_1$ and $G_2$, the set multipartite Ramsey number $M_j(G_1, G_2) = t$ is the smallest integer such that every factorization of graph $K_{t\times j} := F_1 \oplus F_2$ satisfies the following condition: either $F_1$ contains $G_1$ as a subgraph or $F_2$ contains $G_2$ as a subgraph. In this paper, we establish exact value of the set multipartite Ramsey number $M_3(P_n, K_{1,t})$ where $P_n$ is a path on $n$ vertices, $2 \leq n \leq 3$, and $K_{1,t}$ is a star of order $t + 1$ vertices.*

*Keywords*: Bilangan Ramsey multipartit himpunan, star, path

## 1. Pendahuluan

Pada [1], Burger dan van Vuuren mengkaji satu dari perluasan perumuman bilangan Ramsey Klasik sebagai berikut. Graf $K_{n\times l}$ adalah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari $n$ himpunan partit dan terdapat $l$ titik pada setiap himpunan partit, yang mana setiap dua titik bertetangga jika terletak pada partit yang berbeda. Misalkan $j, l, n, s$, dan $t$ adalah bilangan asli dengan $n, s \geq 2$. *Bilangan Ramsey multipartit himpunan* $M_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil $\zeta$ sedemikian sehingga untuk sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{\zeta\times j}$ akan memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai suatu subgraf dari graf $K_{\zeta\times j}$.

Pada paper ini, penentuan bilangan Ramsey multipartit himpunan merupakan perumuman konsep dari graf yang diberikan yaitu untuk graf yang tidak harus graf lengkap. Jika diberikan dua graf $G_1$ dan $G_2$, maka bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(G_1, G_2) = t$,

---

*2000 Mathematics Subject Classification*: 05C55, 05D10.

*Key words and Phrases*: Bilangan Ramsey multipartit himpunan, graf bintang, graf lintasan
Received 2021-04-14, Revise 2021-05-05, Accepted 2021-05-29

* *Korespondensi Penulis: syafrizalsy@sci.unand.ac.id*

$(j, t \geq 2)$, adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi dari graf $K_{t\times j} := F_1 \oplus F_2$ memenuhi kondisi berikut: $F_1$ memuat $G_1$ sebagai subgraf atau $F_2$ memuat $G_2$ sebagai subgraf dari graf $K_{t\times j}$.

Misalkan $P_n$ adalah suatu graf lintasan dengan $n$ titik. Suatu graf *bintang* $K_{1,t}$, $t \geq 2$, adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $t$ yang disebut *titik pusat* dan $t$ titik berderajat satu yang disebut *daun*. Definisikan $V_u$ untuk himpunan partit dari graf $G$ yang memuat titik $u$. Himpunan titik yang bertetangga dengan titik $x$, ditulis $N(x) = \{y|xy \in E(G)\}$. Derajat suatu titik $x$, ditulis $d(x) = |N(x)|$. Derajat minimum dari suatu graf $G$, ditulis $\delta(G)$, dan derajat maksimum dari suatu graf $G$, ditulis $\Delta(G)$. *Matching* dari suatu graf $G$ adalah himpunan sisi-sisi yang saling lepas dari suatu graf $G$. $M$ dikatakan *Matching maksimum* dari suatu graf $G$ jika untuk setiap *matching* $M^*$ di $G$ berlaku $|M^*| \leq |M|$. $M$ dikatakan *Matching sempurna* dari suatu graf $G$ jika $|M| = \frac{|E(G)|}{2}$.

Berikut adalah beberapa bilangan Ramsey multipartit himpunan ini yang telah ditemukan. Bilangan $M_1(K_{2\times2}, K_{3\times3}) = 7$ ditemukan oleh Chartrand dan Schuster [2], $M_1(K_{2\times2}, K_{4\times1}) = 10$ diperoleh Chvátal dan Harary [3], $M_2(K_{2\times2}, K_{3\times1}) = 4$ dan $M_2(K_{2\times2}, K_{4\times1}) = 7$ didapat oleh Harborth dan Mengersen [7, 8], $M_1(K_{2\times2}, K_{5\times1}) = 14$ ditemukan oleh Greenwood dan Gleason [5], $M_1(K_{2\times2}, K_{6\times1}) = 18$ diperoleh [4], $M_1(K_{2\times3}, K_{2\times3}) = 18$ didapat oleh Harborth dan Mengersen [6]. Hasil utama pada paper ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi Graf Lintasan $P_n$ dan graf bintang $K_{1,t}$.

## 2. Hasil dan Pembahasan

Teorema-teorema berikut merupakan hasil utama dalam paper ini.

**Teorema 2.1.** *Untuk bilangan bulat $j, t \geq 2$, berlaku $M_j(P_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t}{j} \rceil + 1$.*

Bukti. Misalkan $r = \lceil \frac{t}{j} \rceil + 1$. Pertama-tama ditunjukkan batas bawah yaitu $M_j(P_2, K_{1,t}) \geq r$. Perhatikan faktorisasi $F = K_{(r-1)\times j} \cong F_1 \oplus F_2$ dengan $F_1$ tidak memuat $P_2$. Karena $t < (r-1)j = ((\lceil \frac{t}{j} \rceil + 1) - 1)j = \lceil \frac{t}{j} \rceil j$, maka $F_2$ tidak memuat $K_{1,t}$. Oleh karena itu $M_j(P_2, K_{1,t}) \geq r$.

Selanjutnya, ditentukan batas atas $M_j(P_2, K_{1,t}) \leq r$. Perhatikan faktorisasi $G = K_{r\times j} \cong G_1 \oplus G_2$ sedemikian sehingga $G_1$ tidak memuat $P_2$. Akan ditunjukkan $G_2 \supseteq K_{1,t}$. Karena $G_1 \not\supseteq P_2$, maka $G_1$ adalah titik-titik yang saling bebas. Jadi $\Delta(G_1) = 0$. Akibatnya $\delta(G_2) = (r-1)j$. Ini mengakibatkan, $G_2$ memuat graf bintang $K_{1,t}$. Oleh karena itu $M_j(P_2, K_{1,t}) \leq r$. □

**Contoh 2.2.** *Bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk $M_5(P_2, K_{1,11})$ adalah $\lceil \frac{11}{5} \rceil + 1 = 4$. Menurut definisi, banyaknya titik pada setiap partit adalah 5. Perhatikan faktorisasi $K_{4\times5} \cong G_1 \oplus G_2$. Jika graf $G_1$ tidak memuat $P_2$, maka jelas $G_2 \backslash V$ untuk sebarang partit $V$, memuat graf $K_{1,t}$ dengan $11 \leq t \leq 15$.*

Teorema berikut menentukan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi grah lintasan dengan tiga titik dan graf bintang umum.

**Teorema 2.3.** *Untuk bilangan bulat $r \geq 3$, $M_3(P_3, K_{1,t}) = r$ jika $r$ ganjil dan $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$, atau jika $r$ genap dan $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$.*

Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.
**Kasus 1.** Untuk $r \geq 3$ ganjil dan $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$.
Pertama-tama ditentukan batas bawah $M_3(P_3, K_{1,t}) \geq r$. Perhatikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $FK_{(r-1)\times3}$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., (r-1)$ adalah himpunan-himpunan partit di $F$. Beri 2-pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $F$ sebagai berikut: warnai semua sisi $F_1$ dengan warna merah adalah sebanyak $\frac{|V(F)|}{2} \times |P_2|$. Asumsikan $F_1$ adalah suatu *matching* sempurna, tanpa mengurangi perumuman, maka $F_1 \not\supseteq P_3$ dan $\Delta(F_1) = 1$. Karena $\Delta(F) = 3(r-2)$, maka $\Delta(F_2) = 3(r-2) - 1$. Perhatikan pertidaksamaan

$(3(r-2)-1) < 3(r-2)$, jelas bahwa tidak terdapat titik pusat untuk membentuk $K_{1,t}$ biru dengan $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$ di $F_2$, ini mengakibatkan $F_2 \not\supseteq K_{1,t}$ biru untuk $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$. Oleh karena itu, $M_3(P_3, K_{1,t}) \leq r$ untuk $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$.

Selanjutnya, ditunjukkan batas atasnya yaitu $M_3(P_3, K_{1,t}) \leq r$. Warnai semua sisi dari graf $G = K_{r\times 3} \cong G_1 \oplus G_2$ sedemikian sehingga $G_1 \not\supseteq P_3$ berwarna merah. Akan ditunjukkan bahwa $G_2 \supseteq K_{1,t}$ berwarna biru untuk $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., r$ adalah himpunan-himpunan partit di $G$. Perhatikan $G_1 \not\supseteq P_3$ berwarna merah, maka asumsikan $G_1$ membentuk *matching* maksimal berwarna merah di $G_1$, dengan $G_1$ adalah $\frac{|V(G)|-1}{2} \times |P_2|$. Tanpa mengurangi perumuman, karena jumlah titik adalah $r \times 3$ ganjil, maka terdapat satu titik $x$ yang tidak bertetangga merah dengan semua titik lainnya. Misalkan titik $x \in V_{i,j}$, akibatnya titik $x$ bertetangga ke semua sisi biru dengan semua titik di $V_i$ dengan $i = 1, 2, ..., r-1$ yang jumlah derajatnya adalah $\Delta(G_2) \leq \Delta(G) = 3(r-1)$. Jadi, $G \supseteq K_{1,t}$ berwarna biru untuk $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$. Oleh karena itu, $M_3(P_3, K_{1,t}) \leq r$ untuk $3(r-2) \leq t \leq 3(r-1)$.

**Kasus 2.** Untuk $r \geq 4$ genap dan $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$.
Pertama ditentukan batas bawahnya yaitu $M_3(P_3, K_{1,t}) \geq r$. Misalkan semua sisi dari graf $F = K_{(r-1)\times 3} \cong F_1 \oplus F_2$ diberi pewarnaan merah-biru. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., r-1$ adalah himpunan-himpunan partit di $F$. Beri 2-pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari $F$ sebagai berikut: warna merah pada semua sisi dari $F_1$ adalah sebanyak $\frac{|V(F)|-1}{2} \times |P_2|$. Perhatikan $G_1 \not\supseteq P_3$ berwarna merah, maka asumsikan $G_1$ membentuk *matching* maksimal berwarna merah di $F_1$. Tanpa mengurangi perumuman, karena jumlah titik $F$ adalah $(r-1) \times 3$ ganjil, maka terdapat satu titik $x$ yang tidak bertetangga ke semua sisi merah dengan ke titik lainnya. Misalkan titik $x \in V_i$ dengan $i = r-1$, akibatnya titik $x$ bertetangga biru dengan semua titik di $V_i$ dengan $i = 1, 2, ..., r-2$. Karena $\Delta(F) = 3(r-2)$ dan $\Delta(F_1) \leq 1$ , maka $\Delta(F_2) \geq 3(r-2)-1$. Kemudian, asumsikan titik $x \in V_i$ sebagai titik pusat di $F_2$, maka titik $x$ membentuk $K_{1,3(r-2)}$ berwarna biru. Ini mengakibatkan $F_2 \not\supseteq K_{1,t}$ biru untuk $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$. Oleh karena itu, $M_3(P_3, K_{1,t}) \geq r$ untuk $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$.

Selanjutnya, ditentukan batas atasnya yaitu $M_3(P_3, K_{1,t}) \leq r$. Beri pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf $G = K_{r\times 3} \cong G_1 \oplus G_2$ sedemikian sehingga $G_1 \not\supseteq P_3$ merah. Akan ditunjukkan bahwa $G_2 \supseteq K_{1,t}$ biru untuk $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., r$ adalah himpunan-himpunan partit di $G$. Perhatikan $G_1 \not\supseteq P_3$ merah, maka asumsikan $G_1$ membentuk *matching* sempurna berwarna merah dengan $G_1$ adalah $\frac{|V(G)|}{2} \times |P_2|$. Karena $G_1 \not\supseteq P_3$ dan $\Delta(G_1) = 1$. Karena $\Delta(G) = 3(r-1)$ dan $\Delta(G_2) \geq 3(r-1)-1$. Misalkan titik $x \in V_i$ adalah titik pusat di $G_2$, maka $\Delta(x \in V_i) = 3(r-1)-1$ yang dapat membentuk $K_{1,t}$ di $G_2$. Ini mengakibatkan $G_2 \supseteq K_{1,t}$ biru untuk $t \leq 3(r-1)-1$. Oleh karena itu $M_3(P_3, K_{1,t}) \leq r$ untuk $3(r-2)+1 \leq t \leq 3(r-1)-1$. □

## 3. Simpulan

Paper ini memberikan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf bintang umum dan graf lintasan kecil $n = 2$ dengan $j \geq 1$, dan $n = 3$ dengan $j = 3$.

## Daftar Pustaka

[1] Burger A.P. dan van Vuuren j. H., 2004, Ramsey numbers in Complete Balanced Multipartite Graphs. Part I: Set Numbers, Discrete Math., 283, pp 37–43.

[2] G. Chartrand dan S. Schuster, 1971, On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bull. AMS.*, 77, pp 995–998.

[3] Chv*á*tal V. dan Harary, 1972, Generalised Ramsey theory for graphs, II: small diagonal numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32, pp 389–394.

[4] Exoo G., 1987, Constructing Ramsey graphs with a computer, *Congr. Numer.*, 59, pp 31-36.

[5] Greenwood R.E., dan Gleason A. M., 1955, Cobinatorial relations and chromatic graphs, *canad. J. Math.*, 7, pp 1-7.

[6] Harborth H. dan Mengersen I., 1991, The Ramsey number of $K_{3,3}$ in: Y. Alavi, *et al.* (Eds.), *Combinatorics, Graph Theory and Applications*, 2, Wiley, New York, pp 639-644.

[7] Harborth H. dan Mengersen I., 1996, Some Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *Australas. J. Combin.*, 13, pp 119–128.

[8] Harborth H. dan Mengersen I., 2001, Ramsey numbers in octahedron graphs, *Discrete Math.*, 231, pp 241-246.