Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 19, No.1 (2023), pp. 55–66. doi:10.24198/jmi.v19.n1.45047.55-66

Sifat-sifat Fungsi Terfragmentasi dan Fungsi Terfragmentasi Terhitung Fungsional

Albert Mario Kumanireng[1], Atok Zulijanto[2]

[1]**Mahasiswa PS Magister Matematika, Departemen Matematika**
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada,
albertkumanireng@mail.ugm.ac.id

[2]**Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, atokzulijanto@ugm.ac.id**

Abstrak

Pada artikel ini, diteliti sifat-sifat fungsi terfragmentasi dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional. Dengan menggunakan barisan *transfinite* regular, dibuktikan bahwa himpunan semua fungsi terfragmentasi bernilai real dan himpunan semua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas yang bernilai real merupakan ring. Selain itu, dibuktikan pula sifat fungsi terfragmentasi dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional yang analog dengan Teroema Weierstrass M-Test. Lebih lanjut, diberikan syarat tambahan supaya fungsi terfragmentasi terhitung fungsional juga kontinu.

Kata kunci: fungsi terfragmentasi-ϵ, fungsi terfragmentasi, fungsi terfragmentasi terhitung fungsional, fungsi terfragmentasi terhitung-ϵ fungsional, barisan regular.

Abstract

In this paper, we study some properties of fragmented functions and functionally countably fragmented functions. Using regular transfinite sequences, we prove that the set of all real-valued fragmented functions and the set of all real-valued functionally countably fragmented functions is a ring. We also prove a property of fragmented function (functionally countably fragmented function) which is analogous to Weierstrass M-Test Theorem. Furthermore, we provide an imposed condition such that a functionally countably fragmented function is continuous.

Keywords: ϵ-fragmented funtion, fragmented function, functionally ϵ-countably fragmented function, functionally countably fragmented function, regular sequence.

1. Pendahuluan

Teorema perluasan fungsi merupakan salah satu topik yang sering diselidiki oleh matematikawan. Salah satu teorema yang terkenal adalah Teorema Perluasan Tietze untuk fungsi kontinu. Selain fungsi kontinu, beberapa peniliti juga meneliti perluasan fungsi Baire-1, diantaranya [3], [4], [7], [8], dan [9]. Fungsi $f : X \to Y$ dengan X dan Y ruang topologi disebut fungsi Baire-1 jika terdapat barisan fungsi kontinu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dari X ke Y yang konvergen titik demi titik ke f. Karlova dan Mykhaylyuk [4] yang meneliti perluasan fungsi Baire kelas satu dengan domain ruang Lindelöf memperoleh hasil sebagai berikut.

2000 Mathematics Subject Classification: 26A21
Received: 2023-02-03, Accepted: 2023-05-06, Published: 2023-06-01.

Teorema 1.1. ([4]) *Diberikan ruang Lindelöf X dan fungsi Baire-1 $f : X \to \mathbb{R}$. Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(i.) Fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi Baire-1 $F : Y \to \mathbb{R}$ dengan $Y \supseteq X$ ruang regular lengkap.
(ii.) Fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi Baire-1 $F : cX \to \mathbb{R}$ dengan cX kompaktifikasi X.
(iii.) Fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi Baire-1 $F : \beta X \to \mathbb{R}$.
(iv.) Fungsi f terfragmentasi terhitung fungsional.
(v.) Fungsi f terfragmentasi.

Kalenda dan Spurny [3] memberikan masalah terbuka berikut: jika diberikan ruang regular lengkap X yang menurunkan sifat Baire dan fungsi Baire kelas satu f pada X, apakah fungsi f dapat diperluas pada kompaktifikasi Čech-Stone X? Masalah terbuka tersebut dijawab oleh Karlova dan Mykhaylyuk [5] dengan jawaban negatif, yaitu terdapat ruang regular lengkap yang tersebar X dan fungsi Baire-1 $f : X \to [0, 1]$ yang tidak dapat diperluas pada βX, dengan βX menyatakan kompaktifikasi Čech-Stone X. Meskipun demikian, Karlova dan Mykhaylyuk [5] memberikan syarat tambahan supaya perluasan tersebut dapat dilakukan seperti yang disebutkan dalam teorema berikut.

Teorema 1.2. ([5]) *Diberikan ruang regular lengkap X. Jika $f : X \to \mathbb{R}$ fungsi Baire-1, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(i.) Fungsi f merupakan terfragmentasi terhitung fungsional.
(ii.) Fungsi f dapat diperluas menjadi fungsi Baire-1 pada βX.

Berdasarkan Teorema 1.1 dan Teorema 1.2 terlihat bahwa fungsi terfragmentasi terhitung fungsional memegang peranan penting untuk teorema perluasan fungsi Baire-1. Kelas fungsi terfragmentasi terhitung fungsional merupakan kelas bagian dari kelas fungsi terfragmentasi. Fungsi terfragmentasi diperkenalkan oleh Koumoullis [6]. Di dalam [4], [5], dan [6] belum diberikan sifat linear dan perkalian fungsi terfragmentasi dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional. Di dalam makalah ini, diberikan sifat-sifat fungsi terfragmentasi dan terfragmentasi terhitung fungsional. Sifat-sifat yang diberikan antara lain, kelas semua fungsi terfragmentasi bernilai real dan kelas semua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas bernilai real merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian fungsi. Selain itu, dibuktikan pula sifat fungsi terfragmentasi dan terfragmentasi terhitung fungsional yang analog dengan Teorema Weierstrass M-Test untuk fungsi kontinu. Telah disebutkan dalam Karlova dan Mykhaylyuk [5] bahwa setiap fungsi kontinu merupakan fungsi terfragmentasi, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Dalam makalah ini, diberikan syarat tambahan supaya fungsi terfragmentasi terhitung fungsional juga merupakan fungsi kontinu.

2. Landasan Teori

2.1. Fungsi Terfragmentasi dan Fungsi Terfragmentasi Terhitung Fungsional.

Sebelum diberikan definisi fungsi terfragmetasi, terlebih dahulu diberikan pengertian osilasi fungsi pada suatu himpunan di ruang topologi. Di dalam makalah ini, himpunan semua bilangan real ditulis dengan $\mathbb{R}$.

Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang metrik (Y, d), dan fungsi $f : X \to Y$. Untuk setiap $A \subseteq X$ dengan $A \neq \emptyset$, osilasi fungsi f pada A didefinisikan sebagai

$$\omega_f(A) = \sup_{x,y \in A} d_Y(f(x), f(y)).$$

Fungsi terfragmentasi didefinisikan oleh Koumoullis [6], sebagaimana dituliskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1. ([6]) *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan ruang metrik (Y, d). Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan terfragmentasi-ϵ (ϵ-fragmented) untuk suatu $\epsilon > 0$ jika untuk setiap himpunan* *tertutup $F \subseteq X$, terdapat himpunan terbuka relatif tak kosong $U \subseteq F$ sehingga $\omega_f(U) < \epsilon$. Fungsi f dikatakan terfragmentasi apabila f terfragmentasi-ϵ untuk setiap $\epsilon > 0$.*

Contoh 2.2. *Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang metrik (Y, d), dan fungsi kontinu $f : X \to Y$. Diambil sebarang $\epsilon > 0$, himpunan tertutup $F \subseteq X$, dan sebarang $x \in F$. Karena f kontinu pada X, maka terdapat $V \subseteq X$ persekitaran x sehingga untuk setiap $y \in V$ berlaku $f(y) \in B_d(f(x), \frac{\epsilon}{3})$. Dibentuk $U = V \cap F$. Diperoleh, $\omega_f(U) \leq \omega_f(V) < \epsilon$. Jadi, f terfragmentasi-ϵ. Karena untuk setiap $\epsilon > 0$ fungsi f terfragmentasi-ϵ, maka f terfragmentasi.*

Pada Contoh 2.2 di atas, telah ditunjukkan bahwa setiap fungsi kontinu dari ruang topologi ke ruang metrik merupakan fungsi terfragmentasi. Sebaliknya belum tentu berlaku sebagaimana diberikan pada contoh berikut.

Contoh 2.3. *Diberikan $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, akan ditunjukkan fungsi χ_A terfragmentasi. Diambil sebarang $\epsilon > 0$ dan himpunan tertutup $F \subseteq \mathbb{R}$. Diperhatikan, $F \cap A \neq \emptyset$ atau $F \subseteq (X \setminus A)$. Pertama, akan ditunjukkan untuk kasus $F \cap A \neq \emptyset$. Diambil sebarang $x \in F \cap A$. Dipilih $\delta = \min\{|x|, |1 - x|\}$ dan dinamakan $U = B(x, \frac{\delta}{2}) \cap F$. Diambil sebarang $y \in U$, diperoleh*

$$|\chi_A(x) - \chi_A(y)| = |1 - 1| = 0 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Akibatnya, $\omega_{\chi_A}(U) < \epsilon$. Selanjutnya, akan ditunjukkan untuk kasus $F \subseteq (X \setminus A)$. Diambil sebarang $x \in F$. Karena F tertutup, maka untuk setiap $\delta > 0$ berlaku $B(x, \delta) \cap F \neq \emptyset$. Dinamakan $U = B(x, \delta) \cap F$. Diambil sebarang $y \in U$, diperoleh

$$|\chi_A(x) - \chi_A(y)| = |0 - 0| = 0 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Akibatnya, $\omega_{\chi_A}(U) < \epsilon$.

Fungsi terfragmentasi-ϵ dapat dikarakterisasi dengan menggunakan barisan regular. Pengertian barisan regular dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 2.4. ([4]) *Diberikan $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ barisan transfinite himpunan-himpunan bagian di ruang topologi X. Barisan $\mathcal{U}$ dikatakan regular di X jika*

a. untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$, U_ξ terbuka di X,
b. $\emptyset = U_0 \subset U_1 \subset ..... \subset U_\alpha = X$,
c. $U_\gamma = \bigcup_{\xi < \gamma} U_\xi$ untuk setiap limit ordinal $\gamma \in [0, \alpha)$.

Teorema di bawah ini memberikan karakterisasi fungsi terfragmentasi-ϵ dan barisan regular.

Teorema 2.5. ([5]) *Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang metrik (Y, d) dan $\epsilon > 0$. Untuk suatu fungsi $f : X \to Y$, pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen:*

1. *Fungsi f terfragmentasi-ϵ;*
2. *Ada ordinal α dan barisan regular $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ di X sehingga $\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \epsilon$ untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$.*

Selanjutnya, diberikan definisi barisan himpunan yang berasosiasi-ϵ dengan suatu fungsi.

Definisi 2.6. ([4]) *Diberikan bilangan ordinal α. Keluarga himpunan terbuka $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ dikatakan berasosiasi-ϵ (ϵ-associated) dengan f jika $\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \epsilon$ untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$.*

Diberikan ruang topologi (X, τ). Berdasarkan [2], himpunan $A \subseteq X$ dikatakan tertutup fungsional jika terdapat fungsi kontinu $f : X \to [0, 1]$ sehingga $f^{-1}(\{0\}) = A$. Lebih lanjut, himpunan $B \subseteq X$ dikatakan terbuka fungsional jika $X \setminus B$ tertutup fungsional.

Selanjutnya, Karlova dan Mykhaylyuk [4] mendefinisikan fungsi terfregmentasi fungsional dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional sebagai berikut.

Definisi 2.7. ([4]) *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan ruang metrik (Y, d).*

(1.) Fungsi terfragmentasi-ϵ $f : X \to Y$ dikatakan terfragmentasi-ϵ fungsional (functionally ϵ-fragmented) jika dapat dipilih keluarga $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ yang berasosiasi-ϵ dengan f sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$, himpunan U_ξ merupakan himpunan terbuka fungsional di X.

(2.) Fungsi f dikatakan terfragmentasi terhitung-ϵ fungsional (functionally ϵ-countably fragmented) jika dapat dipilih keluarga terhitung $\mathcal{U}$ yang berasosiasi-ϵ dengan f sehingga setiap anggota $\mathcal{U}$ merupakan himpunan terbuka fungsional.

Fungsi f dikatakan terfragmentasi terhitung fungsional (functionally countably fragmented) apabila f terfragmentasi terhitung-ϵ fungsional untuk setiap $\epsilon > 0$.

Contoh 2.8. *Diberikan $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ dan fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$. Diambil sebarang $\epsilon > 0$, karena f kontinu seragam, maka terdapat $\delta_\epsilon > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$, $\omega_f(B(x, \frac{\delta_\epsilon}{2})) < \epsilon$. Karena X separable, maka terdapat $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ sehingga $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, \frac{\delta_\epsilon}{2}) = X$. Dibentuk $\mathcal{U} = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ dengan $U_k = \bigcup_{i=1}^{k} B(x, \frac{\delta_\epsilon}{2})$. Diperoleh, $\mathcal{U}$ berasosiasi-ϵ dengan f. Lebih lanjut, f terfragmentasi terhitung fungsional.*

Contoh 2.9. *Diberikan $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi karakteristik $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional ([5]).*

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini disajikan sifat-sifat fungsi terfragmentasi dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional.

Teorema 3.1. *Diberikan ruang topologi (X, τ). Jika $f, g : X \to \mathbb{R}$ fungsi terfragmentasi dan $c \in \mathbb{R}$, maka $f + g$, cf, fg, dan $|f|$ terfragmentasi.*

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$ dan himpunan tertutup $V \subseteq X$. Pertama, akan ditunjukkan fungsi $f + g$ terfragmentasi. Karena f terfragmentasi, maka ada himpunan terbuka $U_f \subseteq X$ sehingga

$$\omega_f(U_f \cap V) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Karena g terfragmentasi dan $\overline{U_f \cap V}$ tertutup, maka terdapat himpunan terbuka $U_g \subseteq X$ sehingga

$$\omega_g(U_g \cap (\overline{U_f \cap V}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Akan ditunjukkan $U_g \cap (U_f \cap V) \neq \emptyset$. Diambil sebarang $x \in U_g \cap (\overline{U_f \cap V})$. Karena U_g terbuka, maka ada himpunan terbuka G_x sehingga $x \in G_x \subseteq U_g$. Selanjutnya karena $x \in \overline{U_f \cap V}$, maka $G_x \cap (U_f \cap V) \neq \emptyset$. Dengan kata lain, $U_g \cap (U_f \cap V) \neq \emptyset$. Dipilih $U = U_g \cap U_f \cap V$. Untuk setiap $x, y \in U$ berlaku

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Akibatnya, $\omega_{f+g}(U) < \epsilon$.

Kedua, akan ditunjukkan cf terfragmentasi. Untuk $c = 0$, jelas berlaku. Karena itu, diasumsikan $c \neq 0$. Karena f terfragmentasi, maka ada himpunan terbuka $U_f \subseteq X$ sehingga

$$\omega_f(U_f \cap V) < \frac{\epsilon}{|c| + 1}.$$

Dipilih $U = U_f \cap V$. Untuk setiap $x, y \in U$ berlaku

$$|cf(x) - cf(y)| \leq |c||f(x) - f(y)| < \frac{|c|}{|c| + 1}\epsilon.$$

Diperoleh, $\omega_{cf}(U) < \epsilon$.

Ketiga, akan ditunjukkan fg terfragmentasi. Karena f terfragmentasi, maka ada himpunan terbuka $U_{(f,1)} \subseteq X$ sehingga untuk setiap $x, y \in U_{(f,1)} \cap V$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < 1.$$

Akibatnya, untuk suatu $y \in U_{(f,1)} \cap V$, diperoleh

$$f(y) - 1 < f(x) < f(y) + 1.$$

Dengan kata lain, $f(x)$ terbatas di $U_{(f,1)} \cap V$. Karena g terfragmentasi, maka ada himpunan terbuka $U_{(g,1)} \subseteq X$ sehingga untuk setiap $x, y \in U_{(g,1)} \cap \overline{U_{(f,1)} \cap V}$ berlaku

$$|g(x) - g(y)| < 1.$$

Akibatnya, untuk suatu $y \in U_{(g,1)} \cap \overline{U_{(f,1)} \cap V}$, diperoleh

$$g(y) - 1 < g(x) < g(y) + 1.$$

Dengan kata lain, g terbatas di $U_{(g,1)} \cap \overline{U_{(f,1)} \cap V}$. Akibatnya, terdapat $M_f, M_g > 0$ sehingga untuk setiap $x \in U_{(g,1)} \cap U_{(f,1)} \cap V$ berlaku

$$|f(x)| < M_f \text{ dan } |g(x)| < M_g.$$

Dinamakan $H = U_{(g,1)} \cap U_{(f,1)} \cap V$. Karena f terfragmentasi, maka ada himpunan terbuka $U_f \subseteq X$ sehingga

$$\omega_f(U_f \cap H) < \omega_f(U_f \cap \overline{H}) < \frac{\epsilon}{3M_g}.$$

Karena g terfragmentasi dan $\overline{U_f \cap H}$ tertutup, maka terdapat himpunan terbuka $U_g \subseteq X$ sehingga

$$\omega_g(U_g \cap (U_f \cap H)) < \omega_g(U_g \cap (\overline{U_f \cap H}) < \frac{\epsilon}{3M_f}.$$

Dipilih $U = U_g \cap U_f \cap H$. Untuk setiap $x, y \in U$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq \frac{M_f\epsilon}{3M_f} + \frac{M_g\epsilon}{3M_g} = \frac{2\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Jadi, ada himpunan terbuka relatif

$$U = U_g \cap U_f \cap U_{(g,1)} \cap U_{(f,1)} \cap V$$

terhadap V sehingga $\omega_{fg}(U) < \epsilon$.

Terakhir, akan ditunjukkan $|f|$ terfragmentasi. Karena f terfragmentasi, maka terdapat himpunan terbuka $U_f \subseteq X$ sehingga

$$\omega_f(U_f \cap V) < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Dipilih $U = U_f \cap V$. Untuk setiap $x, y \in U$ berlaku

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Akibatnya, $\omega_{|f|}(U) < \epsilon$.

Dengan menggunakan Teorema 3.1, diperoleh akibat berikut.

Akibat 3.2. *Diberikan ruang topologi (X, τ). Himpunan semua fungsi terfragmentasi bernilai real merupakan ring dengan operasi penjumlahan*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan perkalian

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

BUKTI. Diambil sebarang fungsi terfragmentasi $f, g, h : X \to \mathbb{R}$.

1. Menurut Teorema 3.1, $f + g$ terfragmentasi bernilai real.

2. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f + (g + h) = (f + g) + h$.
3. Karena f dan g bernilai real, maka $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f + g = g + f$.
4. Didefinisikan fungsi $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}(x) = 0$ untuk setiap $x \in X$. Jelas bahwa $\mathbf{0}$ kontinu. Akibatnya, k terfragmentasi. Diperhatikan, $f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$.
5. Menurut Teorema 3.1, $-f$ fungsi terfragmentasi bernilai real. Diperhatikan,
$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}.$$
6. Menurut Teorema 3.1, fg fungsi terfragmentasi bernilai real.
7. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f(gh) = (fg)h$.
8. Didefinisikan fungsi $\mathbf{1}$ dengan $\mathbf{1}(x) = 1$ untuk setiap $x \in X$. Diperhatikan, $f\mathbf{1} = f$ dan $\mathbf{1}f = f$.
9. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f(g + h) = fg + fh$.
10. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $(f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $(f + g)h = fh + gh$.

Berdasarkan sepuluh sifat yang telah dibuktikan, himpunan semua fungsi terfragmentasi bernilai real merupakan Ring.

Teorema 3.3. *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan fungsi $f, g : X \to \mathbb{R}$. Jika f, g terfragmentasi, maka fungsi $\max\{f, g\}$ dan $\min\{f, g\}$ terfragmentasi.*

Bukti. Diperhatikan,
$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ dan } \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$
Menurut Teorema 3.1, fungsi $f + g$ dan $|f - g|$ terfragmentasi. Akibatnya, fungsi $\max\{f, g\}$ dan $\min\{f, g\}$ terfragmentasi.

Sifat-sifat pada Teorema 3.1 juga berlaku untuk fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas. Untuk membuktikan sifat tersebut, terlebih dahulu diberikan pengertian himpunan terurut sempurna.

Definisi 3.4. ([1]) *Diberikan himpunan A. Relasi $\prec$ pada A disebut urutan parsial jika*

(i.) $a \prec a$ *untuk setiap* $a \in A$;
(ii.) *untuk setiap* $a, b, c \in A$, *jika* $a \prec b$ *dan* $b \prec c$, *maka* $a \prec c$;
(iii.) *untuk setiap* $a, b \in A$, *jika* $a \prec b$ *dan* $b \prec a$, *maka* $a = b$.

Himpunan A dilengkapi dengan urutan parsial disebut himpunan terurut parsial dan ditulis dengan $(B, \prec)$. Untuk setiap $B \subseteq A$, elemen $b_0 \in B$ disebut elemen pertama B jika $b_0 \prec b$ untuk setiap $b \in B$. Lebih lanjut, himpunan $(A, \prec)$ disebut himpunan terurut sempurna jika setiap himpunan tak kosong $B \subseteq A$ mempunyai elemen pertama.

Teorema 3.5. *Diberikan ruang topologi (X, τ). Jika $f, g : X \to \mathbb{R}$ fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas dan $c \in \mathbb{R}$, maka $f + g$, cf, fg, dan $|f|$ terfragmentasi terhitung fungsional.*

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Pertama, akan ditunjukkan $f + g$ terfragmentasi terhitung fungsional. Karena f dan g terfragmentasi terhitung fungsional, maka terdapat bilangan ordinal α, β dengan $|\alpha| \leq \aleph_0$ dan $|\beta| \leq \aleph_0$ dan barisan regular
$$\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\} \text{ dan } \mathcal{V} = \{V_\eta : \eta \in [0, \beta]\}$$
dengan U_ξ dan V_η terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ dan $\eta \in [0, \beta]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$ dan $\eta \in [0, \beta)$ berlaku
$$\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \frac{\epsilon}{3} \text{ dan } \omega_g(V_{\eta+1} \setminus V_\eta) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$ didefinisikan

$$B_\xi = \{\eta \in [0, \beta) : (U_{\xi+1} \setminus U_\xi) \cap (V_{\eta+1} \setminus V_\eta) \neq \emptyset\}.$$

Selanjutnya, untuk setiap $\eta \in B_\xi$ dibentuk

$$Q_{\xi,\eta} = U_\xi \cup ((U_{\xi+1} \setminus U_\xi) \cap V_\eta) = U_{\xi+1} \cap (U_\xi \cup V_\eta).$$

Karena U_ξ, $U_{\xi+1}$, dan V_η terbuka fungsional, maka $Q_{\xi,\eta}$ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ dan $\eta \in B_\xi$. Dinamakan

$$C_\xi = \bigcup_{\eta \in B_\xi} Q_{\xi,\eta+1} \setminus Q_{\xi,\eta}.$$

Jelas bahwa $C_\xi \subseteq U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Lebih lanjut, diambil sebarang $x \in U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Akibatnya, terdapat η sehingga $x \in V_{\eta+1} \setminus V_\eta$. Diperoleh, $x \in Q_{\xi,\eta+1} \setminus Q_{\xi,\eta}$. Jadi,

$$C_\xi \subseteq U_{\xi+1} \setminus U_\xi \subseteq C_\xi.$$

Dengan kata lain, $C_\xi = U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Diperhatikan, apabila $\xi < \lambda$, maka berlaku $Q_{\xi,\eta} \subset Q_{\lambda,\mu}$. Lebih lanjut, apabila $\eta < \mu$, maka berlaku $Q_{\xi,\eta} \subset Q_{\xi,\mu}$. Akibatnya, keluarga himpunan terbuka fungsional

$$\mathcal{Q} = \{\emptyset\} \cup \{Q_{\xi,\eta} : \xi \in [0, \alpha],\ \eta \in B_\xi\}$$

terurut sempurna oleh relasi urutan $\subseteq$. Menurut [1], Teorema 6.4, terdapat pemetaan bijektif $J : \mathcal{Q} \to \rho$ untuk suatu bilangan ordinal ρ. Karena α dan β terhitung, maka ρ terhitung. Selanjutnya, dibentuk barisan naik monoton $\mathcal{P} = \{P_\xi : \xi \in [0, \rho]\}$ dengan $P_0 = \emptyset$ dan $P_\xi = Q_{\lambda,\mu}$ dengan $J(Q_{\lambda,\mu}) = \xi$. Diambil sebarang $\xi \in [0, \rho)$ dan $x, y \in P_{\xi+1} \setminus P_\xi$. Akibatnya, terdapat $\delta \in [0, \alpha)$ dan $\pi \in [0, \beta)$ sehingga $x, y \in (U_{\delta+1} \setminus U_\delta) \cap (V_{\pi+1} \setminus V_\pi)$. Diperoleh

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Dengan kata lain, $\omega_{f+g}(P_{\xi+1} \setminus P_\xi) < \epsilon$.

Kedua, akan ditunjukkan cf terfragmentasi. Untuk $c = 0$, jelas berlaku. Karena itu, diasumsikan $c \neq 0$. Karena f terfragmentasi terhitung fungsional, maka terdapat bilangan ordinal α dengan $|\alpha| \leq \aleph_0$ dan barisan regular

$$\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$$

dengan U_ξ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$ berlaku

$$\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \frac{\epsilon}{2|c|}.$$

Diambil sebarang $x, y \in U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Diperoleh

$$|cf(x) - cf(y)| = |c||f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dengan kata lain, $\omega_{cf}(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \epsilon$.

Ketiga, akan ditunjukkan fg terfragmentasi. Karena f dan g terbatas, maka terdapat $M_f, M_g > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $|f(x)| \leq M_f$ dan $|g(x)| \leq M_g$. Karena f dan g terfragmentasi terhitung fungsional, maka terdapat bilangan ordinal α, β dengan $|\alpha| \leq \aleph_0$ dan $|\beta| \leq \aleph_0$ dan barisan regular

$$\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\} \text{ dan } \mathcal{V} = \{V_\eta : \eta \in [0, \beta]\}$$

dengan U_ξ dan V_η terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ dan $\eta \in [0, \beta]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$ dan $\eta \in [0, \beta)$ berlaku

$$\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \frac{\epsilon}{3M_g} \text{ dan } \omega_g(V_{\eta+1} \setminus V_\eta) < \frac{\epsilon}{3M_f}.$$

Dengan cara yang sama seperti pada pembuktian penjumlahan dua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas, diperoleh keluarga himpunan terbuka fungsional $\mathcal{P} = \{P_\xi : \xi \in$

$[0,\rho]\}$ dengan $|\rho| \leq \aleph_0$. Diambil sebarang $\xi \in [0,\rho)$ dan $x, y \in P_{\xi+1} \setminus P_\xi$. Akibatnya, terdapat $\delta \in [0,\alpha)$ dan $\pi \in [0,\beta)$ sehingga $x, y \in (U_{\delta+1} \setminus U_\delta) \cap (V_{\pi+1} \setminus V_\pi)$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
|(f(x)g(x)) - (f(y)g(y))| &= |(f(x)g(x)) - (f(y)g(x)) + (f(y)g(x)) - (f(y)g(y))| \\
&\leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \\
&< M_g \frac{\epsilon}{3M_g} + M_f \frac{\epsilon}{3M_f} \\
&= \frac{2\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Dengan kata lain, $\omega_{fg}(P_{\xi+1} \setminus P_\xi) < \epsilon$.

Terakhir, akan ditunjukkan $|f|$ terfragmentasi. Karena f terfragmentasi terhitung fungsional, maka terdapat bilangan ordinal α dengan $|\alpha| \leq \aleph_0$ dan barisan regular

$$\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0,\alpha]\}$$

dengan U_ξ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0,\alpha]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0,\alpha)$ berlaku

$$\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Diambil sebarang $\xi \in [0,\alpha)$ dan $x, y \in U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Diperoleh

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Akibatnya, $\omega_{|f|}(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \epsilon$.

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh akibat berikut.

Akibat 3.6. *Diberikan ruang topologi (X,τ). Himpunan semua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional terbatas dari X ke $\mathbb{R}$ merupakan ring dengan operasi penjumlahan*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan perkalian

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Bukti. Diambil sebarang fungsi terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas f, g, dan h.

1. Menurut Teorema 3.5, $f + g$ terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas.
2. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f + (g + h) = (f + g) + h$.
3. Karena f dan g bernilai real, maka $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f + g = g + f$.
4. Didefinisikan fungsi $\mathbf{0}$ dengan $\mathbf{0}(x) = 0$ untuk setiap $x \in X$. Jelas bahwa $\mathbf{0}$ kontinu. Akibatnya, $\mathbf{0}$ terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas. Diperhatikan,
$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f.$$
5. Menurut Teorema 3.1, $-f$ fungsi terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas. Diperhatikan,
$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}.$$
6. Menurut Teorema 3.5, fg fungsi terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas.
7. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f(gh) = (fg)h$.
8. Didefinisikan fungsi $\mathbf{1}$ dengan $\mathbf{1}(x) = 1$ untuk setiap $x \in X$. Diperhatikan, $f\mathbf{1} = f$ dan $\mathbf{1}f = f$.
9. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $f(g + h) = fg + fh$.
10. Karena f, g, dan h bernilai real, maka $(f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jadi, $(f + g)h = fh + gh$.

Berdasarkan sepuluh sifat yang telah dibuktikan, himpunan semua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional bernilai real dan terbatas merupakan Ring.

Selanjutnya, akan diberikan sifat fungsi terfragmentasi yang analog dengan Teorema Weierstrass M-Test untuk fungsi kontinu. Untuk itu, diperlukan teorema berikut.

Teorema 3.7. ([4]) *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan ruang metrik (Y, d). Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to Y$ terfragmentasi terhitung fungsional dan barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke $f : X \to Y$, maka f terfragmentasi terhitung fungsional.*

Teorema 3.8. *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan barisan fungsi terfragmentasi $\{f_n\}$ dengan $f_n : X \to \mathbb{R}$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $M_n > 0$ sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk setiap $x \in X$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, maka fungsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ terfragmentasi. Lebih lanjut, jika f_n terfragmentasi terhitung fungsional untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka fungsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ terfragmentasi terhitung fungsional.*

Bukti. Akan dibuktikan untuk kasus f_n terfragmentasi terhitung fungsional. Untuk kasus f_n terfragmentasi, dapat dibuktikan dengan cara yang sama. Diperhatikan, fungsi f terdefinisi sebab

$$|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dibentuk fungsi $g_n : X \to \mathbb{R}$ dengan $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Menurut Teorema 3.1, fungsi g_n terfragmentasi terhitung fungsional. Akan ditunjukkan barisan fungsi $\{g_n\}$ konvergen seragam ke f. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon.$$

Diperhatikan, untuk setiap $x \in X$ dan $n \geq n_0$ berlaku

$$|g_n(x) - f(x)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon.$$

Dengan kata lain, barisan $\{g_n\}$ konvergen seragam ke f. Menurut Teorema 3.7, fungsi f terfragmentasi terhitung fungsional.

Komposisi fungsi terfragmentasi dan fungsi kontinu merupakan fungsi terfragmentasi. Lebih lanjut, komposisi fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan fungsi kontinu merupakan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional. Hal ini dijelaskan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.9. *Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang topologi (Y, ρ), dan ruang metrik (Z, d). Jika fungsi $g : X \to Y$ kontinu dan fungsi $f : Y \to Z$ terfragmentasi, maka fungsi $f \circ g$ terfragmentasi. Lebih lanjut, jika f terfragmentasi terhitung fungsional, maka $f \circ g$ terfragmentasi terhitung fungsional.*

Bukti. Akan dibuktikan untuk kasus f terfragmentasi terhitung fungsional. Untuk kasus f terfragmentasi, dapat dibuktikan dengan cara yang sama. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena fungsi f terfragmentasi terhitung fungsional, maka terdapat bilangan ordinal α dengan $|\alpha| \leq \aleph_0$ dan barisan regular $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ dengan U_ξ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha)$ berlaku

$$\omega_f(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dibentuk barisan regular $\mathcal{V} = \{V_\xi : V_\xi = g^{-1}(U_\xi), \xi \in [0, \alpha]\}$. Karena g kontinu dan untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$ himpunan U_ξ terbuka fungsional, maka himpunan V_ξ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha]$. Diambil sebarang $\xi \in [0, \alpha)$. Untuk setiap $x, y \in V_{\xi+1} \setminus V_\xi$ berlaku $g(x), g(y) \in U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Akibatnya,

$$d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Jadi, fungsi $f \circ g$ terfragmentasi terhitung fungsional.

Selanjutnya, diberikan sifat terkait komposisi fungsi kontinu seragam dengan fungsi terfragmentasi dan komposisi fungsi kontinu seragam dengan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional.

Teorema 3.10. *Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang metrik (Y, ρ), dan ruang metrik (Z, d). Jika fungsi $g : X \to Y$ terfragmentasi dan fungsi $f : Y \to Z$ kontinu seragam, maka fungsi $f \circ g$ terfragmentasi.*

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena f kontinu seragam, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dan $y \in B_\rho(x, \delta)$ berlaku

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Karena g terfragmentasi, maka terdapat barisan regular $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi \in [0, \alpha]\}$ sehingga

$$\omega_g(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \delta.$$

Diambil sebarang $\xi \in [0, \alpha)$ dan $x, y \in U_{\xi+1} \setminus U_\xi$. Karena $\omega_g(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \delta$, maka $\rho(g(x), g(y)) < \delta$. Dengan kata lain, $g(y) \in B_\rho(g(x))$. Akibatnya,

$$d((f \circ g)(x), (f \circ g)(x)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Diperoleh

$$\omega_{f \circ g}(U_{\xi+1} \setminus U_\xi) < \epsilon.$$

Jadi, fungsi $f \circ g$ terfragmentasi.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan teorema berikut.

Teorema 3.11. *Diberikan ruang topologi (X, τ), ruang metrik (Y, ρ), dan ruang metrik (Z, d). Jika fungsi $g : X \to Y$ terfragmentasi terhitung fungsional dan fungsi $f : Y \to Z$ kontinu seragam, maka fungsi $f \circ g$ terfragmentasi terfragmentasi terhitung fungsional.*

Untuk membuktikan sifat selanjutnya, terlebih dahulu diberikan pengertian himpunan G_δ-fungsional dan himpunan F_σ-fungsional. Diberikan ruang topologi (X, τ). Himpunan $A \subseteq X$ disebut himpunan G_δ-fungsional jika terdapat barisan himpunan terbuka fungsional $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sehingga $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Lebih lanjut, himpunan $A \subseteq X$ disebut himpunan F_σ-fungsional jika terdapat barisan himpunan tertutup fungsional $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sehingga $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Menurut Contoh 2.9, fungsi terfragmentasi terhitung fungsional belum tentu kontinu. Dengan menambahkan syarat tertentu pada domain fungsinya, dapat ditunjukkan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional juga kontinu. Untuk itu, diperlukan lemma berikut.

Lemma 3.12. *Diberikan ruang topologi (X, τ) dan ruang metrik (Y, d). Jika fungsi $f : X \to Y$ terfragmentasi terhitung fungsional, maka untuk setiap $x \in X$ dan $\epsilon > 0$, $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ merupakan gabungan terhitung himpunan G_δ-fungsional.*

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena f terfragmentasi terhitung fungsional, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\frac{1}{n} < \epsilon$, terdapat bilangan ordinal α_n dengan $|\alpha_n| \leq \aleph_0$ dan barisan regular $\mathcal{U}^n = \{U^n_\xi : \xi \in [0, \alpha_n]\}$ dengan U^n_ξ terbuka fungsional untuk setiap $\xi \in [0, \alpha_n]$ sehingga untuk setiap $\xi \in [0, \alpha_n)$ berlaku

$$\omega_f(U^n_{\xi+1} \setminus U^n_\xi) < \frac{1}{n}.$$

Dinamakan

$$C_n = \bigcup \{U^n_{\xi+1} \setminus U^n_\xi : U^n_{\xi+1} \setminus U^n_\xi \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))\} \text{ dan } C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < \epsilon} C_n.$$

Akan ditunjukkan $f^{-1}(B(f(x),\epsilon)) = C$. Diambil sebarang $y \in f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$. Karena $B(f(x),\epsilon)$ terbuka, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $B(f(y),\frac{1}{n}) \subseteq (B(f(x),\epsilon)$. Diperhatikan, terdapat $\xi \in [0,\alpha_{3n})$ sehingga $y \in U^{3n}_{\xi+1} \setminus U^{3n}_{\xi}$. Lebih lanjut, $\omega_f(U^{3n}_{\xi+1} \setminus U^{3n}_{\xi}) < \frac{1}{3n}$. Diambil sebarang $z \in U^{3n}_{\xi+1} \setminus U^{3n}_{\xi}$. Diperoleh

$$d(f(z),f(y)) < \frac{1}{3n}.$$

Akibatnya,

$$f(U^{3n}_{\xi+1} \setminus U^{3n}_{\xi}) \subseteq B(f(y),\frac{1}{n}) \subseteq B(f(x),\epsilon).$$

Diperoleh, $f^{-1}(B(f(x),\epsilon)) \subseteq C \subseteq f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$. Karena U^n_ξ terbuka fungsional, maka $U^n_{\xi+1} \setminus U^n_\xi$ himpunan G_δ-fungsional. Karena $|\alpha_n| \leq \aleph_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$ merupakan gabungan terhitung himpunan G_δ-fungsional.

Dengan menggunakan Lemma 3.12, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.13. *Diberikan ruang topologi (X,τ), ruang metrik (Y,d), dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional $f : X \to Y$. Jika setiap irisan terhitung himpunan terbuka di X merupakan himpunan terbuka di X, maka f kontinu di X.*

Bukti. Diambil sebarang $x \in X$ dan $\epsilon > 0$. Menurut Lemma 3.12, $f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$ merupakan gabungan terhitung himpunan G_δ-fungsional. Karena setiap himpunan terbuka fungsional merupakan himpunan terbuka, maka $f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$ terbuka di X. Akibatnya, f kontinu.

4. Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya, diperoleh bahwa himpunan semua fungsi terfragmentasi bernilai real dan himpunan semua fungsi terfragmentasi terhitung fungsional dan terbatas bernilai real merupakan ring. Komposisi fungsi terfragmentasi dan fungsi kontinu merupakan fungsi terfragmentasi. Sifat ini juga berlaku untuk fungsi terfragmentasi terhitung fungsional. Selanjutnya, komposisi fungsi kontinu seragam dan fungsi terfragmentasi merupakan fungsi terfragmentasi dan komposisi fungsi kontinu seragam dan fungsi terfragmentasi terfragmentasi terhitung fungsional merupakan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional. Fungsi terfragmentasi dan fungsi terfragmentasi terhitung fungsional mempunyai sifat yang analog dengan sifat Weierstrass M-Test untuk fungsi kontinu. Fungsi terfragmentasi terhitung fungsional belum tentu kontinu. Dengan memberikan syarat tambahan, yaitu setiap irisan terhitung himpunan terbuka di domain fungsinya terbuka, diperoleh fungsi terfragmentasi terhitung fungsional merupakan fungsi kontinu.

Daftar Pustaka

[1] Dugundji, J., 1967, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston.

[2] Engelking, R., 1989, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin.

[3] Kalenda, O.F.K. and Spurny, J., 2005, Extending Baire-One Function on Topological Space, *Topology and Its Applications*, Volume 149, Pages 195-216.

[4] Karlova, O. and Mykhaylyuk, V., 2019, Extension of Fragmented Baire-One Function on Lindelöf Spaces, *Topology and Its Applications*, Volume 253, Pages 85-94.

[5] Karlova, O. and Mykhaylyuk, V., 2020, Extending Baire-One Function on Compat Spaces, *Topology and Its Applications*, Volume 277, Pages 1-9.

[6] Koumoullis, G., 1993, A Generalization of Functions of The First Class, *Topology and Its Applications*, Volume 50, Pages 217-239.

[7] Kuratowski, K., 1966, *Topology 1*, Academis Press, New York.

[8] Leung. D.H. and Tang. W-K., 2006, Extension of functions with Small Oscillation, *Fund. Math.*, Volume 192, Pages 183-193.

[9] Spurny, J., 2005, Affine Baire-One Functions on Choquet Simplexes, *Bull. Austral. Math. Soc*, Volume 71, Pages 235-258.