Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 13, No. 2 (2017), pp. 95–104. doi:10.24198/jmi.v13.n2.11986.95-104

Ruang Norm-n Berdimensi Hingga

Moh. Januar Ismail Burhan

Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Program studi Matematika, Institut Teknologi Kalimantan

januarismail@itk.ac.id

Abstrak

Norm-n adalah bentuk perumuman dari norm yang dapat didefinisikan di suatu ruang vektor real. Konsep ini sangat menarik karena mewariskan beberapa sifat norm, yang mana pada $n = 2$ dapat mewakili sebagai luas dari jajar genjang yang direntang oleh dua vektor yang berbeda. Pada makalah ini, akan dibahas mengenai ruang norm-n berdimensi hingga. Diawali dengan mempelajari norm yang diturunkan dari norm-n, sehingga diperoleh hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm dan di ruang norm-n. Hasil ini merupakan metode yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema Titik tetap yang telah diperbaiki pada bagian premisnya di ruang norm-n berdimensi hingga.

Kata kunci: Ruang Norm-n Berdimensi Hingga, Norm, Teorema Titik Tetap.

Abstract

The n-normed is a form of generalization of the normed that can be defined in a real vector space. This concept is very interesting because it inherit some the normed properties, which at $n = 2$ can represent as the area of a parallelogram spanned by two distinct vectors. In this paper, we will discuss about the finite dimensional n-normed spaces. Beginning by studying the normed which is derived from the n-normed, thus it will be obtained the relation between the convergence of sequence in the normed space and in the n-normed spaces. This result is a method that will be used to prove The Fixed Point Theorem has been fixed in the premise on finite dimensional n-normed spaces.

Key words: Finite Dimesional n-Normed Spaces, Normed, Fixed Point Theorem.

1. Pendahuluan

Konsep tentang ruang norm-2 pertama kali dikembangkan oleh Gähler pada pertengahan dekade 1960an dan ruang hasil kali dalam-2 pertama kali diperkenalkan oleh Diminnie, Gähler dan White pada tahun 1970. Sementara itu konsep ruang norm-n dimana $n \geq 2$ dikembangkan oleh Gähler pada akhir dekade 1960-an dan ruang hasil kali dalam-n dikembangkan oleh Misiak pada tahun 1989.

Pada tahun 2001, Gunawan dan Mashadi di [4] mempelajari bahwa setiap norm-n ekuivalen dengan dengan norm-$n-1$ yang mereka defenisikan sendiri. Dari sinilah mereka membuktikan mengenai Teorema Titik Tetap untuk suatu ruang Banach-n dengan sembarang vektor

2000 Mathematics Subject Classification: 46B99
Received: 2017-04-27, accepted: 2017-09-26

$x_1, x_2, ..., x_n$ dalam ruang norm-n berdimensi hingga. Ekariani dan Gunawan di [1] membahas ruang norm-n standar dengan menunjukkan ekuivalensi antara norm yang diperoleh dari norm-n standar dengan norm biasa. Berbeda dengan yang telah dibahas oleh Ekariani dan Gunawan di [1], pada makalah ini akan menggunakan suatu norm yang didefinisikan dari norm-n untuk mencari hubungan antara ruang norm dan ruang norm-n dengan batasan ruang berdimensi hingga . Lebih lanjut, fakta ini akan digunakan pula untuk membuktikan Teorema Titik Tetap dalam ruang norm-n berdimensi hingga dengan menggunakan sembarang vektor $a_1, a_2, ..., a_n$ yang bebas linear, untuk memperbaiki Teorema Titik Tetap di [4] yang disajikan dalam teorema yang diformulasikan oleh Gunawan sebagai berikut:

Teorema 1.1. *Misalkan pemetaan $T : X \to X$, sedemikan sehingga*

$$\|Tx_1 - Tx, x_2, ..., x_n\| \leq C \|x_1 - x, x_2, ..., x_n\|,$$

untuk setiap $x, x_1, x_2, ..., x_n \in X$ dan $C \in (0, 1)$. Maka T mempunyai titik tetap yang tunggal, yaitu terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $Tx = x$.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan penelitian dari buku – buku dan jurnal – jurnal yang membahas konsep ruang norm dan konsep ruang norm-n, dan selanjutnya melakukan kajian terhadap konsep – konsep tersebut untuk mengkonstruksi norm yang diperoleh dari norm-n. Selanjutnya norm yang diperoleh menjadi alat untuk membuktikan teorema titik tetap di ruang norm-n berdimensi hingga sebagai perbaikan teorema titik tetap yang dibahas H. Gunawan di [4].

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas suatu konsep norm-n. Secara geometris, norm-n dapat dipandang sebagai suatu metode untuk menghitung volume *parallelepiped* yang direntang oleh n buah vektor. Lebih lanjut, akan dibahas hasil yang diperoleh mengenai Teorema Titik Tetap di ruang norm-n berdimensi hingga. Adapun pembahasan norm-n pada tulisan ini hanya pada ruang vektor real berdimensi hingga ($d \geq n$).

3.1. Ruang Norm-n.

Pada subbab ini akan dibahas konsep norm-n dan contoh dari norm-n pada ruang vektor berdimensi hingga.

Definisi 3.1. Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan X adalah ruang vektor real berdimensi $d \geq n$. *Norm-n* adalah fungsi $\|\cdot, ..., \cdot\| : X^n \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $x_1, ..., x_n, x, y \in X$ memenuhi empat kondisi di bawah ini

(1) $\|x_1, ..., x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, ..., x_n$ bergantung linear;
(2) $\|x_1, ..., x_n\|$ invarian atas permutasi;
(3) $\|x_1, ..., x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\|$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$;
(4) $\|x_1, ..., x_{n-1}, x + y\| \leq \|x_1, ..., x_{n-1}, x\| + \|x_1, ..., x_{n-1}, y\|$.

Pasangan $(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ disebut suatu *ruang norm-n*.

Contoh trivial norm-n dalam ruang berdimensi hingga adalah sebagai berikut:

Contoh 3.2. *$X = \mathbb{R}^d$ dengan $d = n$ yang dilengkapi dengan norm-n :*

$$\|x_1, ..., x_n\|_E = abs \left(\begin{vmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

dimana $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in}) \in \mathbb{R}^d$ untuk setiap $i = 1, ..., n$ (huruf E adalah untuk Euclid).

Selanjutnya diberikan beberapa fakta atau sifat yang dimiliki suatu norm-n seperti halnya beberapa sifat yg dimiliki norm.

Proposisi 3.3. *Misalkan* $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ *adalah ruang norm-n berdimensi* $d \geq n$*, maka*

(1) $\|x_1, ..., x_n\| \geq 0$ *untuk setiap* $x_1, ..., x_n \in X$;

(2) $\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\| = \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\|$ *untuk setiap* $x_1, ..., x_n \in X$ *dan* $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Proof. Ambil sembarang $x_1, ..., x_n \in X$ dan $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

(1) Akan ditunjukkan $\|x_1, ..., x_n\| \geq 0$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 0 &= \|x_1 - x_1, ..., x_n\| \\ &\leq \|x_1, ..., x_n\| + \|-x_1, ..., x_n\| \\ &= \|x_1, ..., x_n\| + |-1| \|x_1, ..., x_n\| \\ &= 2 \|x_1, ..., x_n\| . \end{aligned}$$

Maka diperoleh $\|x_1, ..., x_n\| \geq 0$.

(2) Akan ditunjukkan bahwa

$$\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\| = \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| .$$

Perhatikan

$$\begin{aligned} \left\| x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right\| &\leq \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|x_1, ..., x_{n-1}, \alpha_i x_i\| \\ &= \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| + \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| \|x_1, ..., x_{n-1}, x_i\| . \end{aligned}$$

Menurut definisi norm-n Sifat 1, maka $|\alpha_i| \|x_1, ..., x_{n-1}, x_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1, ..., n-1$. Maka diperoleh

$$\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\| \leq \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| . \tag{1}$$

Selanjutnya perhatikan,

$$\begin{aligned} \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| &= \left\| x_1, ..., x_{n-1}, \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| x_1, ..., x_{n-1}, \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right) \right\| + \left\| x_1, ..., x_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right\| \\ &= \left\| x_1, ..., x_{n-1}, \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \right) \right\| + \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| \|x_1, ..., x_{n-1}, x_i\| . \end{aligned}$$

Karena $|\alpha_i| \|x_1, ..., x_{n-1}, x_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1, ..., n-1$, maka diperoleh

$$\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| \leq \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\| . \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$\|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\| = \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n\| .$$

Dengan demikian proposisi terbukti. □

3.2. **Kekonvergenan dan Kelengkapan.** Pada ruang norm-n definisi mengenai kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy tidak jauh berbeda dengan definisi pada ruang norm-2 yang telah dibahas Gunawan di [2] dan di [3].

Definisi 3.4. Barisan $(x(k))$ di ruang norm-n $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ berdimensi hingga $(d \geq n)$ dikatakan *konvergen* ke x di dalam $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ apabila, untuk setiap $x_2, ..., x_n \in X$ berlaku :

$$\lim_{k \to \infty} \|x(k) - x, x_2, ..., x_n\| = 0,$$

yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq n_0$ berlaku $\|x(k) - x, x_2, ..., x_n\| < \varepsilon$, dimana x disebut limit barisan $(x(k))$.

Teorema 3.5. *Limit dari suatu barisan yang konvergen di ruang norm-n $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ berdimensi hingga $(d \geq n)$ senantiasa tunggal.*

Proof. Misalkan x dan x' adalah limit dari barisan $(x(k))$, menurut definisi untuk setiap $x_2, ..., x_n \in X$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\|x(k) - x, x_2, ..., x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq n_0$, dan terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x(k) - x', x_2, ..., x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq n_1$. Pilih $n' = maks(n_0, n_1)$ sehingga untuk $k \geq n'$, maka

$$\begin{aligned} ||x - x', z|| &= \|x - x(k) + x(k) - x', x_2, ..., x_n\| \\ &\leq \|x - x(k), x_2, ..., x_n\| + \|x(k) - x', x_2, ..., x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka diperoleh $x - x' = 0$. □

Selanjutnya dibahas mengenai kriteria Cauchy untuk kelengkapan suatu ruang norm-n.

Definisi 3.6. Barisan $(x(k))$ di ruang norm-n $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ disebut barisan *Cauchy* apabila,

untuk setiap $x_2, ..., x_n \in X$. *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k, l \geq n_0$ berlaku $\|x(k) - x(l), x_2, ..., x_n\| < \varepsilon$.

Teorema 3.7. *Jika barisan $(x(k))$ konvergen, maka $(x(k))$ merupakan barisan Cauchy.*

Proof. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, barisan $(x(k))$ konvergen ke $x \in X$ artinya untuk setiap $z \in X$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq n_0$ berlaku $\|x(k) - x, x_2, ..., x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Maka,

$$\begin{aligned} \|x(k) - x(l), x_2, ..., x_n\| &= \|x(k) - x + x - x(l), x_2, ..., x_n\| \\ &\leq \|x(k) - x, x_2, ..., x_n\| + \|x - x(l), x_2, ..., x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ untuk setiap } k, l \geq n_0. \end{aligned}$$

Jadi $(x(k))$ merupakan barisan Cauchy di ruang norm-n. □

Lebih lanjut, dapat didefinisikan kelengkapan suatu ruang norm-n.

Definisi 3.8. Ruang norm-n $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ dikatakan lengkap, jika setiap barisan Cauchy $(x(k))$ konvergen ke x di $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$. Ruang norm-$n$ yang lengkap disebut *ruang Banach-n*.

3.3. **Norm yang diturunkan dari norm-n dan basis bagi X.** Pada bagian ini akan dibahas mengenai pendefinisian norm yang diturunkan dari norm-n dan himpunan basis bagi X. Misalkan $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ adalah ruang norm-n dan misalkan $\{b_1, b_2, ..., b_d\}$ adalah basis bagi X, maka diberikan beberapa fakta antara lain:

Lemma 3.9. *Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X jika dan hanya jika*

$$\lim_{k \to \infty} \|x(k) - x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$.

Proof. Ambil sembarang $y_2, y_3, ..., y_n \in X$. $(\Longrightarrow)$ Misalkan Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X,

maka perdefinisi dapat ditunjukkan bahwa

$$\lim_{k \to \infty} \|x(k) - x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan diketahui $\lim_{k\to\infty} \|x(k)-x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$ untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\|x(k)-x, y_2, ..., y_n\| &= \left\| x(k)-x, \sum_{i_2=1}^{d} (\alpha_2)_{i_2} b_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{d} (\alpha_n)_{i_n} b_{i_n} \right\| \\
&\leq \sum_{i_2=1}^{d} \left|(\alpha_2)_{i_2}\right| \left\| x(k)-x, b_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{d} (\alpha_n)_{i_n} b_{i_n} \right\| \\
&\leq \sum_{i_2=1}^{d} \left|(\alpha_2)_{i_2}\right| \left[\sum_{i_3=1}^{d} \left|(\alpha_3)_{i_3}\right| \left\| x(k)-x, b_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{d} (\alpha_n)_{i_n} b_{i_n} \right\| \right] \\
&\leq \sum_{i_2=1}^{d} \left|(\alpha_2)_{i_2}\right| \left[... \left[\sum_{i_n=1}^{d} \left|(\alpha_n)_{i_n}\right| \|x(k)-x, b_{i_2}, b_{i_3}, ..., b_{i_n}\| \right] ... \right].
\end{aligned}$$

Akibatnya untuk $k \longrightarrow \infty$ ruas kanan bernilai akan bernilai nol, sehingga ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k)-x, y_2, y_3, ..., y_n\| = 0.$$

Dengan demikian barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X. □

Hal yang sama untuk barisan Cauchy,

Lemma 3.10. *Barisan $(x(k))$ Cauchy di X jika dan hanya jika*

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x(k)-x(l), b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$.

Proof. Dapat dibuktikan dengan cara membuktikan lemma 3.10 □

Akibatnya diperoleh bahwa,

Akibat 3.11. *Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X jika dan hanya jika*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|x(k)-x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0,$$

dan barisan $(x(k))$ Cauchy di X jika dan hanya jika

$$\lim_{k,l\to\infty} \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|x(k)-x(l), b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0.$$

Proof. Tanpa mengurangi keumuman, hanya akan ditunjukkan arah $(\Longleftarrow)$. Menurut Lemma 3.9 dan Lemma 3.10, serta fakta bahwa untuk setiap $y_2, y_3, ..., y_n \in X$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
||x(k)-x, y_2, y_3, ..., y_n|| \leq &\sum_{i_2=1}^{d} \left|(\alpha_2)_{i_2}\right| \cdot \\
&\left[... \left[\sum_{i_n=1}^{d} \left|(\alpha_n)_{i_n}\right| \|x(k)-x, b_{i_2}, b_{i_3}, ..., b_{i_n}\| \right] ... \right].
\end{aligned}$$

Jika $k \to \infty$, maka diperoleh ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian $(x(k))$ konvergen ke x di X. Selanjutnya perhatikan pula bahwa,

$$\begin{aligned}
||x(k)-x(l), y_2, y_3, ..., y_n|| \leq &\sum_{i_2=1}^{d} \left|(\alpha_2)_{i_2}\right| \cdot \\
&\left[... \left[\sum_{i_n=1}^{d} \left|(\alpha_n)_{i_n}\right| \|x(k)-x(l), b_{i_2}, b_{i_3}, ..., b_{i_n}\| \right] ... \right].
\end{aligned}$$

Jika $k, l \to \infty$, diperoleh ruas kanan bernilai nol mengakibatkan ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian $(x(k))$ Cauchy di X. □

Selanjutnya diperoleh fakta bahwa dapat didefinsikan norm yang diturunkan dari norm-n yang berhubungan dengan basis $\{b_1, b_2, ..., b_d\}$.

Proposisi 3.12. *Misalkan* $\{b_1, b_2, ..., b_d\}$ *adalah basis bagi* X, *maka*

$$\|x\|_1^n = \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\|$$

adalah norm di X.

Proof. Tanpa mengurangi keumuman, cukup ditunjukkan Sifat 1 dari definisi norm. Ambil sembarang $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\|x\|_1^n = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$. ($\Longleftarrow$) Diketahui $x = 0$, perhatikan

$$\|0\|_1^n = \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|0, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\|.$$

Karena 0 bergantung linear terhadap setiap $b_1, b_2, ..., b_d$, maka $\|0, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$ untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$. Maka $\|0\|_1^n = 0$.

($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa $\|x\|_1^n = 0$, maka $\sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0$. Akibatnya hanya dipenuhi oleh

$$\|x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = 0 \text{ untuk setiap } \{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}.$$

Yakni x dan $b_{i_2}, ..., b_{i_n}$ bergantung linear untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$. Maka dapat ditulis sebagai kombinasi linear

$$x = \alpha_{i_2} b_{i_2} + ... + \alpha_{i_n} b_{i_n}$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_3 b_3 + ... + \alpha_n b_n$, apabila kita substitusikan kepada

$$0 = \|x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\| = \|\alpha_1 b_1 + \alpha_3 b_3 + ... + \alpha_n b_n, b_2, b_3, ..., b_n\|.$$

Maka menurut sifat norm-n diperoleh

$$\|\alpha_1 b_1, b_2, b_3, ..., b_n\| = |\alpha_1| \|b_1, b_2, b_3, ..., b_n\| = 0.$$

Karena $\|b_1, b_2, b_3, ..., b_n\| \neq 0$, maka $|\alpha_1| = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$. Dengan cara yang sama dapat diperoleh bahwa $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_d = 0$, sehingga $x = \alpha_{i_2} b_{i_2} + ... + \alpha_{i_n} b_{i_n} = 0$ untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., d\}$. Selanjutnya dengan membuktikan sifat - sifat norm yang lain dapat ditunjukkan bahwa $\|x\|_1^n$ adalah norm di X. □

Apabila kita memilih basis yang lain, hal tersebut tidak terlalu berpengaruh terhadap norm yang dibentuk, karena di X yang berdimensi hingga ($d \geq n$) sembarang norm ekuivalen dengan norm yang lain. Perhatikan bahwa secara umum untuk $1 \leq p < \infty$, Dapat didefinisikan fungsi $\|\cdot\|_p$ di X dengan bentuk

$$\|x\|_p^n = \left[\sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|x, b_{i_2}, ..., b_{i_n}\|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dapat diperiksa pula bahwa $\|\cdot\|_p^n$ merupakan norm di X.

Akhirnya diperoleh penulisan yang berbeda dari Akibat 3.11 dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1^n$.

Akibat 3.13. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *jika dan hanya jika*

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\|_1^n = 0,$$

dan barisan $(x(k))$ *Cauchy di* X *jika dan hanya jika*

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x(k) - x(l)\|_1^n = 0.$$

Proof. Gunakan definisi $||\cdot||_1^n$ dan Akibat 3.11. $\square$

3.4. **Norm yang diturunkan dari norm-n dan n buah vektor bebas linear.** Bagian ini membahas mengenai pendefinisian norm yang diturunkan dari norm-n dan n buah vektor bebas linear di X. Sebelumnya akan dibahas mengenai beberapa fakta yang diperoleh berkenaan dengan himpunan bebas linear.

Lemma 3.14. *Jika barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X maka*

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., n\}$, dimana $\{a_1, ..., a_n\}$ bebas linear.

Proof. Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X, untuk setiap $y_2, y_3, ..., y_n \in X$, berlaku

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, y_2, y_3, ..., y_n\| = 0.$$

Akibatnya karena $a_1, ..., a_n \in X$, maka diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., n\}$. $\square$

Lemma 3.15. *Jika barisan $(x(k))$ Cauchy di X maka*

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x(k) - x(l), a_{i_2}, ..., a_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., n\}$, dimana $\{a_1, ..., a_n\}$ bebas linear.

Proof. Misalkan $(x(k))$ Cauchy di X, maka untuk setiap $y_2, y_3, ..., y_n \in X$, berlaku

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x(k) - x(l), y_2, y_3, ..., y_n\| = 0.$$

Akibatnya karena $a_1, ..., a_n \in X$, maka diperoleh

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x(k) - x(l), a_{i_2}, ..., a_{i_n}\| = 0$$

untuk setiap $\{i_2, ..., i_n\} \subset \{1, ..., n\}$. $\square$

Lebih lanjut, akibat kedua lemma sebelumnya maka dapat didefinisikan norm baru yang diturunkan dari norm-n dan himpunan bebas linear $\{a_1, ..., a_n\}$ di X.

Proposisi 3.16. *Misalkan $\{a_1, ..., a_n\} \subset X$ bebas linear, maka*

$$\|x\|_1^{*n} = \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \|x, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\|$$

adalah norm di X.

Proof. Tanpa mengurangi keumuman, hanya akan ditunjukkan pembuktian sifat 3 (Ketaksamaan Segitiga). Pembuktian sifat ke-1 dari norm dan ke-2 dapat digunakan cara seperti pembuktian norm $\|\cdot\|_1^n$. Ambil sembarang $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukan bahwa $\|\cdot\|_1^{*n}$ memenuhi sifat-sifat dari definisi norm.

Akan ditunjukkan bahwa $\|x + y\|_1^{*n} \leq \|x\|_1^{*n} + \|y\|_1^{*n}$.

(1) Karena norm-n mempunyai sifat ketaksamaan segitiga, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1^{*n} &= \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \|x+y,a_{i_2},...,a_{i_n}\| \\ &\leq \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \{\|x,a_{i_2},...,a_{i_n}\| + \|y,a_{i_2},...,a_{i_n}\|\} \\ &= \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \|x,a_{i_2},...,a_{i_n}\| + \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,d\}} \|y,a_{i_2},...,a_{i_n}\| \\ &= \|x\|_1^{*n} + \|y\|_1^{*n}.\end{aligned}$$

Jadi $\|x\|_1^{*n}$ adalah norm di X. □

Dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1^{*n}$, maka Lemma 3.14 dan Lemma 3.15 dapat ditulis sebagai berikut,

Akibat 3.17. *Jika barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X maka $\lim_{k\to\infty} \|x(k)-x\|_1^{*n} = 0$ dan jika barisan $(x(k))$ Cauchy di X maka $\lim_{k,l\to\infty} \|x(k)-x(l)\|_1^{*n} = 0$.*

Proof. Gunakan definisi $||\cdot||_1^{*n}$ dan akibat dari Lemma 3.14 dan Lemma 3.15. □

Teorema 3.18. *Setiap ruang norm $(X,\|\cdot\|)$ berdimensi hingga merupakan ruang Banach.*

Proof. Lihat [5]. □

3.5. **Hubungan ruang norm-n dan ruang norm berdimensi hingga.** Seperti halnya dengan pembahasan pada Bab 3 bahwa semua norm pada X yang berdimensi hingga $(d \geq n)$ adalah ekuivalen. Kita peroleh bahwa norm $\|x\|_1^n$ ekuivalen dengan norm $\|x\|_1^{*n}$ di X.

Proposisi 3.19. *Norm $\|\cdot\|_1^n$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot\|_1^{*n}$ di X.*

Proof. Lihat Teorema mengenai ekivalensi norm pada ruang berdimensi hingga di [5]. □

Berdasarkan hasil di atas dan hubungan yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya dapat diperoleh beberapa fakta, antara lain.

Lemma 3.20. *Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$, maka*

(1) Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot\|_1^n)$.
(2) Barisan $(x(k))$ Cauchy di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ Cauchy di $(X,\|\cdot\|_1^n)$.

Proof. Gunakan Akibat 3.13. □

Lemma 3.21. *Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$, maka*

(1) Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot\|_1^n)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$.
(2) Barisan $(x(k))$ Cauchy di $(X,\|\cdot\|_1^n)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ Cauchy di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$.

Proof. Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$,

(1) $(\Longrightarrow)$ Misalkan Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot\|_1^n)$. Karena norm $\|\cdot\|_1^n$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot\|_1^{*n}$ di X, maka untuk setiap $y \in X$ terdapat $a,b>0$ sehingga

$$a\|y\|_1^n \leq \|y\|_1^{*n} \leq b\|y\|_1^n.$$

Perhatikan bahwa $\|x(k)-x\|_1^{*n} \leq b\|x(k)-x\|_1^n$.

Jika $k\to\infty$, maka ruas kanan bernilai nol mengakibatkan $\|x(k)-x\|_1^{*n} = 0$. Dengan demikian $(x(k))$ konvergen ke x di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$.

($\Longleftarrow$) Dibuktikan dengan cara yang serupa dan fakta bahwa

$$\|x(k)-x\|_1^n \leq \frac{1}{a}\|x(k)-x\|_1^{*n}$$

untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

(2) Pembuktian dapat dilakukan dengan langkah seperti pembuktian barisan konvergen di atas.

Berdasarkan kedua hal di atas disimpulkan lemma pun terbukti. □

Akibat 3.22. *Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$, maka*

(1) Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$.

(2) Barisan $(x(k))$ Cauchy di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ jika dan hanya jika barisan $(x(k))$ Cauchy di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$.

Proof. Gunakan Lemma 3.20 dan Lemma 3.21. □

Lebih lanjut, berdasarkan Lemma 3.20, Lemma 3.21, dan Akibat 3.22 maka hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm dan di ruang norm-n berdimensi hingga digambarkan dalam diagram berikut,

$$\begin{array}{ccc} & (X,\|\cdot,\dots,\cdot\|) & \\ \Nearrow & & \Searrow \\ (X,\|\cdot\|_1^n) & \Leftarrow & \left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right) \end{array}$$

Gambar 1. Diagram hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm dan di ruang norm-n.

3.6. **Teorema Titik Tetap.** Pada bagian ini akan dibahas hasil utama yang diperoleh, yaitu Teorema Titik Tetap di ruang norm-n berdimensi hingga, dimulai dengan Lemma di bawah ini.

Lemma 3.23. *Ruang $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ berdimensi hingga ($d \geq n$) adalah ruang Banach-n.*

Proof. Untuk membuktikan lema tersebut, dapat digunakan Akibat 3.22. Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$. Ambil $(x(k))$ barisan Cauchy di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ menurut Akibat 3.22, maka $(x(k))$ barisan Cauchy di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$. Karena $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$ adalah ruang Banach (akibat Teorema 3.18), maka $(x(k))$ konvergen di $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$. Sebut $x(k) \to x \in \left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$, sehingga menurut Akibat 3.22 pula $(x(k))$ konvergen ke x di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$. Karena $(x(k))$ Cauchy dan konvergen ke x di $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$, dengan demikian kita simpulkan $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ ruang Banach-n. □

Teorema 3.24. ***(Teorema Titik Tetap)*** *Misalkan $\{a_1,...,a_n\} \subset X$ himpunan bebas linear dan T adalah pemetaan kontraktif pada X sehingga*

$$\|Tx-Ty,a_{i_2},...,a_{i_n}\| \leq C\|x-y,a_{i_2},...,a_{i_n}\|$$

untuk setiap $x,y \in X$ dan $\{i_2,...,i_n\} \subset \{1,...,n\}$, dimana $C \in (0,1)$. Maka T memiliki titik tetap yang tunggal di X.

Proof. Menurut Teorema 3.18 $\left(X,\|\cdot\|_1^{*n}\right)$ adalah ruang Banach. Selanjutnya dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1^{*n}$ yang diturunkan dari norm-n dan himpunan bebas linear $\{a_1,...,a_n\}$, pemetaan T memenuhi

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|_1^{*n} &= \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \|Tx-Ty, a_{i_2},...,a_{i_n}\| \\ &\leq \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} C\,\|x-y, a_{i_2},...,a_{i_n}\| \\ &= C \sum_{\{i_2,...,i_n\}\subset\{1,...,n\}} \|x-y, a_{i_2},...,a_{i_n}\| \\ &= C\,\|x-y\|_1^{*n} \text{ untuk setiap } x,y\in X.\end{aligned}$$

Jadi T kontraktif terhadap norm $\|\cdot\|_1^{*n}$. Karena $\left(X, \|\cdot\|_1^{*n}\right)$ adalah ruang Banach, sehingga menurut Teorema Titik Tetap untuk ruang Banach T mempunyai titik tetap yang tunggal di X. □

4. Simpulan

Ruang norm-n secara umum memiliki sifat-sifat yang tak berbeda jauh dengan ruang norm. Kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, dan kelengkapan dapat didefinisikan di dalamnya. Pada makalah ini telah dibuktikan bahwa ruang norm-n $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ berdimensi hingga adalah ruang Banach-n dengan memanfaatkan hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm-n $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ dan di ruang norm $\left(X, \|\cdot\|_1^{*n}\right)$. Lebih lanjut, dengan metode yang sama telah dibuktikan pula Teorema Titik Tetap di ruang norm-n $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ berdimensi hingga yang merupakan perbaikan dari Teorema Titik Tetap versi Gunawan dan Mashadi [4]. Dengan merubah hipotesis teorema yang pada awalnya menggunakan untuk setiap $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ menjadi himpunan sembarang himpunan bebas linear $\{a_1, ..., a_n\}$.

Ucapan Terimakasih.

Isi makalah ini dapat diselesaikan atas bimbingan Prof. Hendra Gunawan pada saat Moh. Januar Ismail menyelesaikan master di ITB dan dapat dipublikasikan setelah berada di Institut Teknologi Kalimantan.

Daftar Pustaka

[1] Ekariani., S. dan Gunawan., H., 2012, Teorema titik tetap pada ruang norm-n standar, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)*. Vol. 4 No. 1, Juni 2012, hal. 69 - 77.
[2] Gunawan., H., 2001, The space of p-summable sequences and its natural n-norm, *Bull. Austral. Math. Soc.* 64, 137-147.
[3] Gunawan., H. and Mashadi., M., 2001, On finite-dimensional 2-normed space, *Soochow J. Math.* 27, 321-329.
[4] Gunawan., H. and Mashadi., M., 2001, On n-normed spaces, *Int. J. Math. Sci.* 27, 631-639.
[5] Kreyszig., E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons Inc, New York.