

# Model Matematika Penyebaran Polusi Udara untuk Menentukan Jarak Aman Pemukiman dari Cerobong Asap Industri

Adinda Laili Febriyanti<sup>1</sup>, Sigit Pancahayani<sup>2</sup>, Muliady Faisal<sup>3</sup>

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika dan Teknologi Infromasi, Institut Teknologi Kalimantan<sup>1</sup>

Program Studi Statistika, Jurusan Matematika dan Teknologi Infromasi, Institut Teknologi Kalimantan<sup>2</sup>

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika dan Teknologi Infromasi, Institut Teknologi Kalimantan<sup>3</sup>

02161001@student.itk.ac.id<sup>1</sup>, spancahayani@lecturer.itk.ac.id<sup>2</sup>, muliadyfaisal@lecturer.itk.ac.id<sup>3</sup>

---

## Article Info

### Article history:

Submitted September 2021

Revised October 2021

Accepted April 2022

Published April 2022

---

### Keyword:

Spread of Air Pollution

Gaussian Plume

Safe Distance

---

## ABSTRACT

Air pollution that comes out and spreads from industrial chimneys can cause various kinds of diseases for the community. The range of spread of air pollution that varies and depends on various factors such as wind speed and direction, chimney height, and pollutant concentration needs attention to prevent some negative impacts on the community in a settlement. Therefore, in this study the Gaussian plume model is used to determine the distribution pattern of air pollution and its concentration. The pollutants observed were SO<sub>2</sub>, NO<sub>2</sub>, and CO<sub>2</sub> with different concentrations and took into account the two values of wind speed and the intensity of sunlight. By following the solution of the Gaussian Plume model obtained by the Laplace transformation, it can be determined the safe distance of the settlement from the industrial chimney. Furthermore, atmospheric stability conditions also affect the maximum concentration value of the pollutants. The more stable the atmospheric conditions, the maximum concentration of each pollutant decreases and the further the pollutant reaches the maximum point from the chimney

---

## Kata Kunci:

Penyebaran Polusi Udara

Gaussian Plume

Jarak Aman

---

## ABSTRAK

Polusi udara yang keluar dan menyebar dari cerobong asap industri dapat menimbulkan berbagai macam penyakit bagi masyarakat. Jangkauan penyebaran polusi udara yang bervariasi dan bergantung pada berbagai faktor seperti kecepatan dan arah angin, ketinggian cerobong, dan konsentrasi polutan perlu mendapat perhatian agar tidak menimbulkan dampak negatif pada masyarakat di suatu pemukiman. Oleh karena itu, dalam penelitian ini model *Gaussian plume* digunakan untuk menentukan pola penyebaran polusi udara dan konsentrasinya. Polutan yang diamati adalah SO<sub>2</sub>, NO<sub>2</sub>, dan CO<sub>2</sub> dengan konsentrasi yang berbeda dan memperhatikan dua nilai kecepatan angin serta intensitas cahaya matahari. Dengan mengikuti solusi model *Gaussian Plume* yang diperoleh dengan transformasi Laplace dapat ditentukan jarak aman pemukiman dari cerobong asap industri. Lebih lanjut, kondisi stabilitas atmosfer juga mempengaruhi besarnya nilai konsentrasi maksimum. Semakin stabil kondisi atmosfer mengakibatkan konsentrasi maksimal pada masing-masing polutan menurun dan semakin jauh polutan mencapai titik maksimum dari cerobong asap.

## 1. PENDAHULUAN

Perkembangan industri yang pesat menimbulkan berbagai macam dampak positif dan negatif. Dampak positif dari perkembangan industri, yaitu ketersediaan kesempatan bekerja pada masyarakat, peningkatan pendapatan pada masyarakat sekitar dan peluang usaha di sekitar industri tersebut. Pada daerah industri memiliki dampak negatif, yaitu pemanasan global dan kandungan udara tidak baik untuk kesehatan masyarakat yang pemukimannya terletak di sekitar industri. Kandungan asap yang dikeluarkan akan menyebar menjauhi cerobong asap sesuai dengan arah angin dan menyebar ke pemukiman masyarakat sekitar. Kandungan asap tersebut akan menimbulkan berbagai macam penyakit pernapasan seperti asma, penyempitan saluran pernapasan, dan ISPA (Infeksi Saluran Pernapasan Atas) [1].

Jangkauan penyebaran polusi udara sangat luas dan kandungan polusi pada area yang terkena pencemaran tersebut bervariasi, tergantung pada laju pembuangan asap, bentuk cerobong dan cuaca daerah tersebut. Cuaca merupakan salah satu faktor yang menyebabkan pencemaran udara semakin meluas. Cuaca terdiri dari sinar matahari, angin, hujan, dan kondisi udara lainnya. Penyebaran polusi di udara akibat emisi asap pabrik dapat dikaji secara fisis dengan asumsi bahwa penyebaran materi dalam suatu media berlangsung selama belum tercapainya kesetimbangan mekanik. Proses ini dikenal dengan nama proses difusi. Penyebaran polutan di udara juga dipengaruhi faktor meteorologi, yakni angin dan kestabilan udara. Angin menyebabkan terjadinya proses adveksi, sedangkan kestabilan udara (gradien suhu secara vertikal) mengakibatkan perbedaan pola keputulan asap yang bergerak meninggalkan cerobong [2].

Model yang digunakan untuk mengetahui pola penyebaran polusi udara adalah model Gaussian plume. Istilah plume menggambarkan hal-hal seperti asap yang keluar dari cerobong asap atau uap air dari cerobong asap di pembangkit listrik [3]. Model Gaussian plume digunakan pula untuk menggambarkan pola dari penyebaran pencemaran udara sumber majemuk industri semen dan jarak jangkauan penyebaran pencemaran udara dari tempat industri tersebut pada musim kemarau dan hujan [4]. Jarak jangkauan pada area di dekat industri yang terkena pencemaran udara dapat dikatakan aman ketika udara di sekitar industri tidak mengalami kenaikan kandungan kimia dan memiliki kandungan kimia yang rendah. Semakin rendahnya kandungan kimia pada udara di sekitar industri, maka semakin baik untuk dijadikan tempat pemukiman masyarakat.

Informasi yang tersedia dari model pencemaran udara dapat membantu dalam hal antisipasi terhadap akibat yang akan ditimbulkan dari cerobong asap industri. Hal tersebut juga membantu masyarakat untuk mengetahui kondisi udara yang dihirup dan dapat mengetahui jarak aman baik untuk digunakan sebagai tempat pemukiman. Oleh karena itu, penting dilakukan pemodelan matematika untuk mengetahui Penyebaran Polusi Udara sehingga dapat diketahui jarak aman pemukiman dari cerobong asap industri.

## 2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur mengenai pencemaran udara dan reaksi polusi udara, kemudian dilakukan pemodelan matematika menggunakan Gaussian Plume yang di dalamnya memanfaatkan Transformasi Laplace. Selanjutnya, dilakukan perhitungan konsentrasi polutan dan simulasi jarak aman untuk pemukiman

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas reaksi polusi udara, kestabilan atmosfer, rekonstruksi model matematika *Gaussian Plume* dan hasil simulasi dari model *Gaussian Plume*.

### 3.1. Reaksi Polusi Udara Dan Kestabilan Atmosfer

Penyebaran polusi udara di atmosfer dari cerobong asap mengalami perpindahan dari sumber menyebar ke lingkungan. Perpindahan yang disebabkan oleh angin disebut adveksi. Dalam perpindahannya, polutan mengalami penyebaran (dispersi) ke arah vertikal dan horizontal.

Pencampuran polutan dengan udara menyebabkan reaksi pengenceran terhadap senyawa lain. Reaksi kimia di atmosfer terjadi karena adanya beragam senyawa dan sumber energi utama, yaitu radiasi sinar matahari.

Menurut Knobel (2000) yang dikutip Apsari dkk (2018), persamaan fluks adveksi adalah salah satu persamaan diferensial parsial yang memodelkan pergerakan suatu konsentrasi dalam cairan yang mengalir, dengan asumsi konsentrasi tersebut tidak mengalami proses difusi di dalam cairan. Bentuk fluks adveksi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_A = Cu \quad (1)$$

dengan,

- $J_A$  = fluks adveksi ( $kg/m^2s$ ),
- $C$  = konsentrasi massa ( $kg/m^3$ ),
- $u$  = kecepatan angin ( $m/s$ ).

Difusi adalah peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Difusi dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika, dengan menggunakan Hukum Fick yang menyatakan bahwa fluks dari suatu bahan terlarut per satuan luas berbanding lurus dengan gradient suhu. Bentuk matematis dari difusi dalam satu arah ( $x$ ) adalah sebagai berikut,

$$J_D = -D \frac{dC}{dx} \quad (2)$$

dengan,

- $J_D$  = tingkat laju perpindahan massa / fluks difusi ( $kg/m^2s$ ),
- $D$  = koefisien difusi ( $m^2/s$ ),
- $C$  = konsentrasi massa ( $kg/m^3$ ),
- $x$  = jarak ( $m$ ).

Tanda negatif menunjukkan arah difusi menuruni gradien konsentrasi, dari bagian konsentrasi tinggi ke bagian berkonsentrasi rendah hingga berhenti saat proses difusi dalam keadaan setimbang. Fenomena dalam fluida atau zat alir dapat terjadi kombinasi antara proses fluks difusi dan fluks adveksi menjadi fluks total sebagai berikut

$$J = J_D + J_A \quad (3)$$

Di sisi lain, kestabilan atmosfer dibagi ke dalam 6 kelas sebagaimana dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

**Tabel 1.** Klasifikasi Kelas Stabilitas Atmosfer [6]

Kecepatan Angin (m/s)	Siang			Malam	
	Pancaran Sinar Matahari			Tertutup Awan	
	Kuat	Sedang	Lemah	Berawan (>4/8)	Cerah (<3/8)
< 2	A	A-B	B	-	-
2 – 3	A-B	B	C	E	F
3 – 5	B	B-C	C	D	E
5 – 6	C	C-D	D	D	D
> 6	C	D	D	D	D

dengan:

- A = sangat tidak stabil,
- B = tidak stabil,
- C = sedikit tidak stabil,
- D = netral,

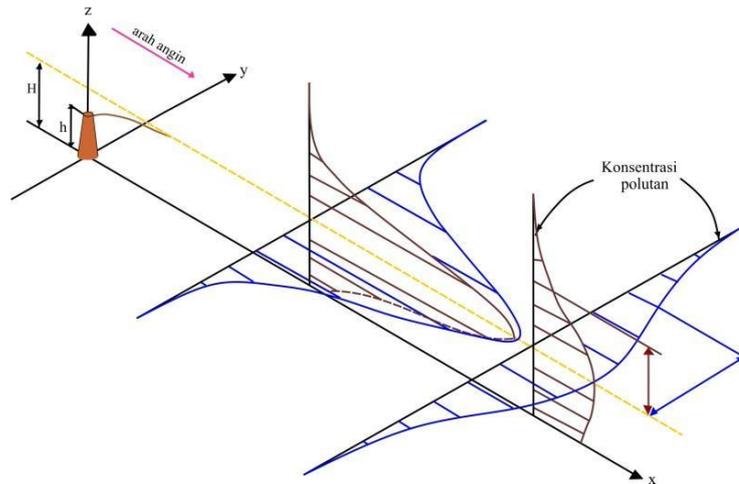
E = agak sedikit stabil,

F = stabil,

A-B, B-C dan C-D merupakan rata-rata kondisi dari keduanya.

### 3.2. Rekonstruksi Model Gaussian Plume

Model penyebaran polutan di udara dibatasi oleh perpindahan polutan yang keluar dari satu sumber titik. Konsentrasi massa polutan terjadi pada posisi di  $\vec{x} = (x, y, z) \in R^3$  waktu  $t \geq 0$  dinyatakan oleh  $C(\vec{x}, t)$  dengan satuan dari masing-masing  $\vec{x}$ ,  $t$  dan  $C$  adalah meter ( $m$ ), detik ( $s$ ) dan  $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ . Gambar 1 adalah ilustrasi penyebaran polusi dari cerobong asap.



**Gambar 1.** Sebaran Polusi dari Cerobong Asap di Permukaan Tanah

Berdasarkan hukum konservasi massa, konsentrasi massa  $C$  dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = S \quad (4)$$

Dalam hal ini,  $S(\vec{x}, t)$  merupakan sumber polutan dengan satuan  $kg/m^3s$ ,  $\nabla$  merupakan fungsi turunan atau gradient total fluks  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  dan  $\vec{J}$  merupakan massa fluks dari polutan karena adanya kombinasi dari difusi dan adveksi. Kecepatan angin dinotasikan  $\vec{u} = (u, v, w) \in R^3$  dalam satuan  $m/s$  dan  $K \in R$  merupakan koefisien difusi. Menurut (Stockie, 2011), model *Gaussian Plume* memiliki tujuh asumsi sebagai berikut:

1. Polutan dipancarkan pada kondisi laju konstan  $Q$  dengan satuan  $kg/s$  dari satu sumber titik  $\vec{x} = (0,0,H)$  dengan  $H$  adalah ketinggian di atas permukaan tanah. Sumber polutan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S(\vec{x}) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - H)$$

dengan  $\delta(x)$ ,  $\delta(y)$  dan  $\delta(z - H)$  merupakan fungsi delta dirac ( $m^{-1}$ ).

2. Kecepatan angin bersifat konstan dan searah dengan sumbu  $x$  positif yaitu  $\vec{u} = (u, 0, 0)$  untuk  $u \geq 0$ .
3. Solusi keadaan bersifat *steady state* yaitu jika kecepatan angin dan semua parameter lainnya tidak bergantung pada waktu, maka  $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ .
4. Koefisien difusi efektif merupakan suatu aliran difusi yang konstan dan bersifat isotropik, sehingga  $K_x(x) = K_y(x) = K_z(x) := K(x)$ .
5. Kecepatan angin cukup besar di arah  $x$  sehingga difusi dalam arah  $x$  jauh lebih kecil dari pada adveksi, maka suku  $K_x \partial_x^2 C$  dapat diabaikan.

6. Variasi dalam topografi dapat diabaikan, sehingga permukaan tanah dapat dianggap sebagai permukaan datar.
7. Polutan tidak dapat menembus tanah atau tidak diserap tanah, sehingga fluks vertikal akan lenyap di batas akhir yaitu ketika  $z = 0$ .

Dari asumsi 1-7 diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H) \quad (5)$$

dengan syarat batas

$$C(0, y, z) = 0; \quad C(\infty, y, z) = 0; \quad C(x, \pm \infty, z) = 0; \quad C(x, y, \infty) = 0 \quad (6)$$

$$K \frac{\partial C}{\partial z}(x, y, 0) = 0 \quad (7)$$

Setiap batas pada persamaan (6) dan (7) menandakan bahwa semakin jauh polutan menjauhi cerobong maka dianggap nol. Selanjutnya, karena jenis polutan tidak reaktif, maka sumber polutan  $S$  dapat dihilangkan dari persamaan (5), sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial x} u = K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$C(0, y, z) = \frac{Q}{u} \delta(y) \delta(z - H), \quad C(\infty, y, z) = 0; \quad C(x, \pm \infty, z) = 0 \quad (9)$$

$$C(x, y, \infty) = 0 \quad (10)$$

$$K \frac{\partial C}{\partial z}(x, y, 0) = 0 \quad (11)$$

Koefisien difusi efektif dapat bervariasi sesuai dengan kondisi cuaca dan waktu, sehingga koefisien difusi sangat sulit ditentukan dalam praktik. Selanjutnya, substitusi  $x$  dengan variabel independen baru menghasilkan

$$r = \frac{1}{u} \int_0^x K(\xi) d\xi = \frac{1}{u} K(x) \quad (12)$$

Persamaan (12) memiliki satuan ( $m^2$ ). Perubahan variabel ini dapat menghapus koefisien  $K$  dalam persamaan (8) menjadi koefisien konstan untuk  $c(r(x), y, z) := C(x, y, z)$ , sehingga diperoleh persamaan (13) sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (13)$$

Dengan metode variabel terpisah, diperoleh solusi untuk variable  $y$  dan variable  $z$  sebagai berikut:

$$c(r, y, z) = \frac{Q}{u} a(r, y) \cdot b(r, z) \quad (14)$$

Selanjutnya diterapkan transformasi Laplace secara terpisah antara  $a(r, y) = \frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$  dan  $b(r, z) = \frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}$  untuk mendapatkan solusinya.

- a.  $\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$ ,  $0 \leq r < \infty$  dan  $-\infty < y < \infty$  dengan syarat batas  $a(0, y) = \delta(y)$ ;  $a(\infty, y) = 0$ ; dan  $a(r, \pm \infty) = 0$ . Menggunakan metode Transformasi Laplace hal pertama yang dilakukan, adalah mentransformasikan persamaan diferensial yang berada dalam variabel  $r$  diubah ke operator  $\rho$  yang merupakan variabel Laplace

$$L\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) - \rho \hat{a}(\rho, y) = -a(0, y) \quad (15)$$

Dengan  $\hat{a}(\rho, y) := L_r\{a(r, y)\} = \int_0^\infty e^{-\rho r} a(r, y) dr$ . Kemudian, lakukan Transformasi Laplace dalam  $y$  diperoleh

$$\left(\eta^2 \hat{\hat{a}}(\rho, \eta) - \eta \hat{\hat{a}}(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial y} \hat{\hat{a}}(\rho, 0)\right) - \rho \hat{\hat{a}}(\rho, \eta) = -1 \quad (16)$$

Dengan  $\hat{\hat{a}}(\rho, \eta) := L_y\{\hat{a}(\rho, y)\} = \int_0^\infty e^{-\eta y} \hat{a}(\rho, y) dy$ . Persamaan (16) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\hat{a}} = \frac{C_2 + \eta C_1}{(\eta^2 - \rho)} \quad (17)$$

Dengan  $C_1 = \hat{a}(\rho, 0)$  dan  $C_2 = 1 - \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}(\rho, 0)$ .

Langkah berikutnya menggunakan Invers Transformasi Laplace terhadap variable  $\eta$ , maka diperoleh sebagai berikut:

$$L^{-1}(\hat{\hat{a}}(\rho, \eta)) = L^{-1}\left(\frac{C_2 + \eta C_1}{(\eta^2 - \rho)}\right)$$

$$\hat{a}(\rho, y) = -\frac{C_2}{2\sqrt{\rho}}(e^{\sqrt{\rho}y} - e^{-\sqrt{\rho}y}) + \frac{C_1}{2}(e^{\sqrt{\rho}y} + e^{-\sqrt{\rho}y}) \quad (18)$$

Perhatikan bahwa jika  $y \rightarrow \infty$ , maka  $\hat{a} \rightarrow 0$ , sehingga diperoleh nilai  $C_1 = \frac{C_2}{\sqrt{\rho}}$  dan dapat disubstitusikan ke persamaan (17) untuk mendapatkan solusi dari Transformasi Laplace pertama sebagai berikut:

$$\hat{\hat{a}}(\rho, y) = \frac{C_2}{\sqrt{\rho}} e^{-\sqrt{\rho}y} \quad (19)$$

Asumsikan bahwa  $C_2$  tidak bergantung pada  $\rho$ , maka dengan menggunakan invers Transformasi Laplace diperoleh

$$L_\rho^{-1}(\hat{\hat{a}}(\rho, \eta)) = L_\rho^{-1}\left(\frac{C_2}{\sqrt{\rho}} e^{-\sqrt{\rho}y}\right)$$

$$a(r, y) = \left(\frac{C_2}{\sqrt{\pi r}}\right) \exp \exp\left(\frac{-y^2}{4r}\right) \quad (20)$$

- b.  $\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}$ , dengan syarat batas  $b(0, z) = \delta(z - H)$ ,  $b(0, z) = 0$ ,  $b(r, \infty) = 0$ ,  $\frac{\partial b}{\partial r}(r, 0) = 0$ . Dengan cara yang sama seperti pada bagian a diperoleh solusi untuk variabel terhadap  $z$  sebagai berikut:

$$b(r, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \left( e^{-\frac{(z-H)^2}{4r}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{4r}} \right) \quad (21)$$

Dengan demikian diperoleh solusi umum untuk konsentrasi polutan dengan mensubstitusi persamaan (20) dan persamaan (21) ke persamaan (14)

$$c(r, y, z) = \frac{Q}{4\pi ur} \exp \exp \left( -\frac{y^2}{4r} \right) \left[ \exp \exp \left( \frac{(z-H)^2}{4r} \right) + \exp \exp \left( -\frac{(z+H)^2}{4r} \right) \right] \quad (22)$$

Persamaan (22) masih dalam variabel  $r$  sehingga harus diubah dalam bentuk variabel  $x$  dengan didefinisikan nilai seperti Persamaan (12) dan asumsikan bahwa polutan berdistribusi normal dengan konsentrasi maksimum adalah rata-ratanya. Sehingga  $\delta_y$  dan  $\delta_z$  didefinisikan sebagai standar deviasi konsentrasi kepulan asap pada arah horizontal dan vertikal. Dua variabel digunakan untuk mengidentifikasi variasi penyebaran polutan. Variabel tersebut dapat didefinisikan sebagai  $\sigma^2(x) = \frac{2}{u} \int_0^x K(\xi) d\xi = 2r$ . Substitusikan variabel  $r$  pada persamaan (22) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi u \sigma_y^2 \sigma_z^2} \exp \exp \left( -\frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \left[ \exp \exp \left( \frac{(z-H)^2}{\sigma_z^2} \right) + \exp \exp \left( -\frac{(z+H)^2}{\sigma_z^2} \right) \right] \quad (23)$$

Persamaan (23) disebut sebagai model *Gaussian Plume*, dengan:

$c(x, y, z)$  = konsentrasi polutan pada titik  $x, y, z$  ( $\frac{g}{m^3}$ );

$Q$  = laju emisi polutas ( $g/s$ )

$u$  = kecepatan angin rata-rata pada tinggi cerobong ( $m/s$ )

$\sigma_y$  = tetapan disperse secara horizontal terhadap sumbu  $x$  ( $m$ )

$\sigma_z$  = tetapan disperse secara horizontal terhadap sumbu  $y$  ( $m$ )

$x$  = jarak jatuhnya polutan ( $m$ )

$y$  = jarak pengamatan tegak lurus dengan sumbu  $x$  ( $m$ )

$z$  = jarak pengamatan tegak lurus dengan sumbu  $y$  ( $m$ )

$H$  = ketinggian emisi ( $m$ )

### 3.3. Hasil Perhitungan Konsentrasi Polutan

Nilai koefisien dispersi bergantung terhadap stabilitas atmosfer dan kondisi jenis daerah penelitian (desa atau kota). Persamaan untuk menentukan nilai koefisien dispersi disajikan dalam Tabel 2.

**Tabel 2.** Persamaan Koefisien Dispersi untuk Daerah Desa dan Kota

Kelas	Desa		Kota	
	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$	$\sigma_y(m)$	$\sigma_z(m)$
A	$0.22x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.2x$	$0.32x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.24x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$

B	$0.16x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.12x$	$0.32x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.24x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$
C	$0.11x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.08x(1 + 0.0002x)^{-0.5}$	$0.22x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.2x$
D	$0.08x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.06x(1 + 0.0015x)^{-0.5}$	$0.16x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.14x(1 + 0.0003x)^{-0.5}$
E	$0.06x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.03x(1 + 0.0003x)^{-1}$	$0.11x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.08x(1 + 0.0015x)^{-0.5}$
F	$0.04x(1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.016x(1 + 0.0003x)^{-1}$	$0.11x(1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.08x(1 + 0.0015x)^{-0.5}$

Sumber: Visscher, 2014

Keterangan:  $x$  adalah jarak dari sumber dalam satuan meter.

Kemudian untuk mengetahui kadar konsentrasi polutan, diperlukan nilai-nilai parameter sebagaimana ditampilkan pada Tabel 3. Nilai konsentrasi polutan untuk  $SO_2$ ,  $NO_2$ , dan  $CO_2$  yang digunakan adalah nilai konsentrasi tertinggi pada masing-masing polutan di Peraturan Pemerintah Republik Indonesia tahun 1999 tentang baku mutu emisi sumber tidak bergerak.

**Tabel 2.** Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai Parameter
$u$	1.5 m/s & 3/17 m/s
$C_{SO_2}$	900 $\mu g/m^3$
$C_{NO_2}$	400 $\mu g/m^3$
$C_{CO_2}$	3000 $\mu g/m^3$

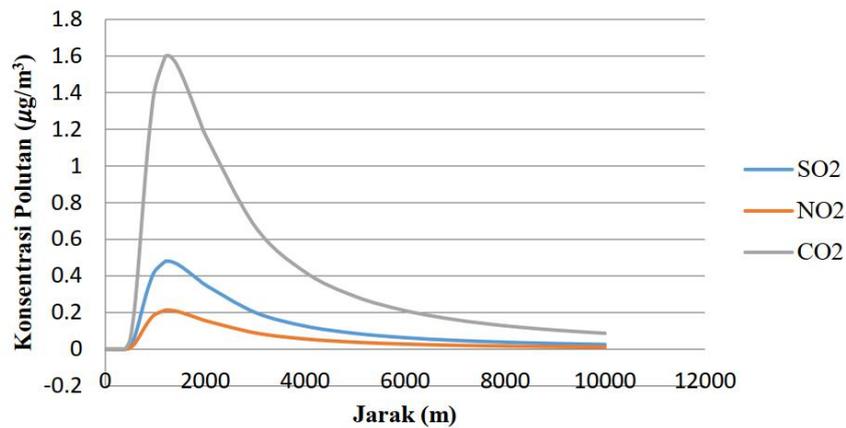
Sumber: Ardianarsyah (2019) dan Peraturan Pemerintah RI 1999

Gambar 2 dan 3 berikut adalah grafik hasil simulasi model *Gaussian Plume* pada persamaan (23) untuk penyebaran tiga polutan yang keluar dari cerobong asap, yaitu  $SO_2$ ,  $NO_2$ , dan  $CO_2$  pada kelas kestabilan atmosfer B dan C. Nilai konsentrasi maksimal dari masing-masing kelas dan polutan ditunjukkan pada Tabel 2. Simulasi ini menggunakan nilai intensitas radiasi matahari sebesar 260 watt/m<sup>2</sup> dengan kecepatan angin sebesar 1.5 m/s untuk kelas B dan 3.17 m untuk kelas C. Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa dari ketiga polutan, konsentrasi tertinggi ada pada jarak 1251m untuk kelas B dan 1327m untuk kelas C. Artinya, sangat tidak disarankan apabila ada pemukiman pada jarak tersebut.

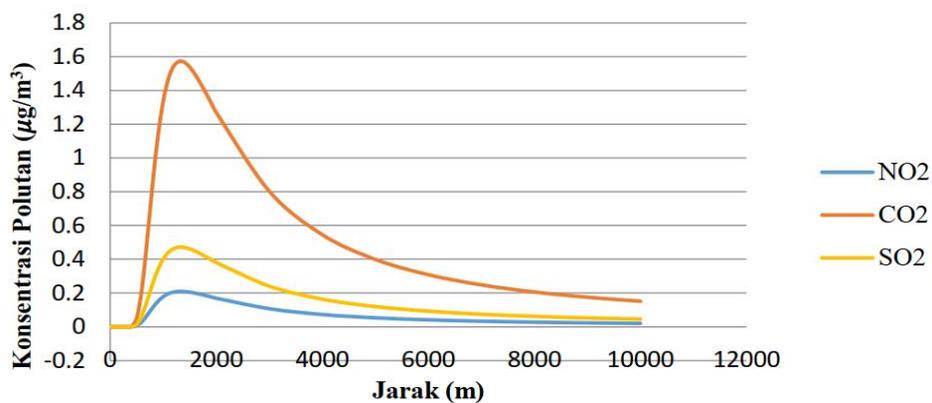
**Tabel 2.** Perbandingan jarak polutan dengan konsentrasi tertinggi dari cerobong asap.

Stabilitas Atmosfer	Kecepatan angin	Nama Polutan	Nilai Konsentrasi Maksimal	Jarak
B	1.5 m/s	$SO_2$	0.480600623 $\mu g/m^3$	1251 m
		$NO_2$	0.213600277 $\mu g/m^3$	1251 m
		$CO_2$	1.602002075 $\mu g/m^3$	1251 m
C	3.17 m/s	$SO_2$	0.472065031 $\mu g/m^3$	1327 m
		$NO_2$	0.20980668 $\mu g/m^3$	1327 m
		$CO_2$	1.573550104 $\mu g/m^3$	1327 m

Sumber: analisis penulis



**Gambar 2.** Grafik jarak penyebaran polutan  $SO_2$ ,  $NO_2$ , dan  $CO_2$  pada kestabilan kelas B

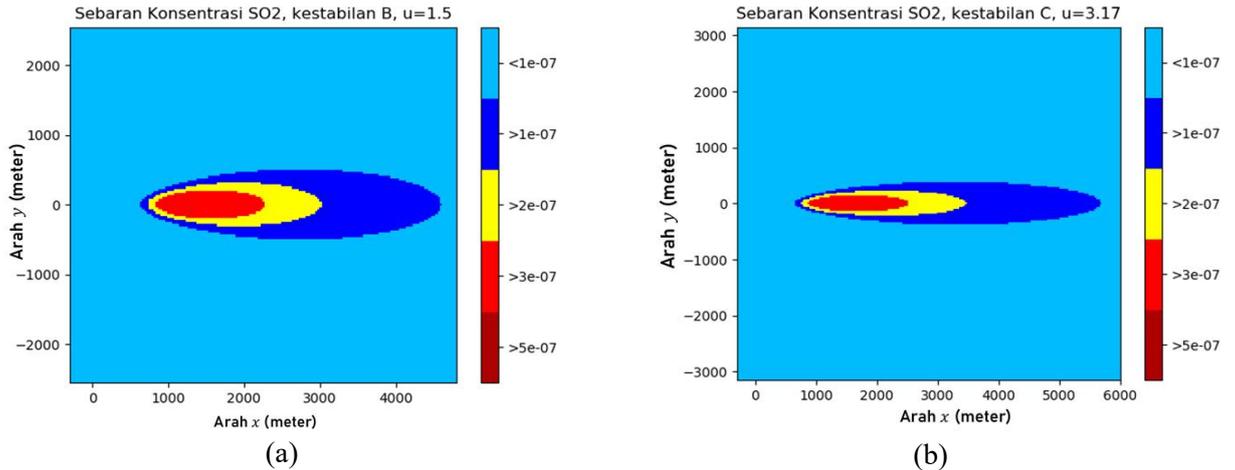


**Gambar 3.** Grafik jarak penyebaran polutan  $SO_2$ ,  $NO_2$ , dan  $CO_2$  pada kestabilan kelas C

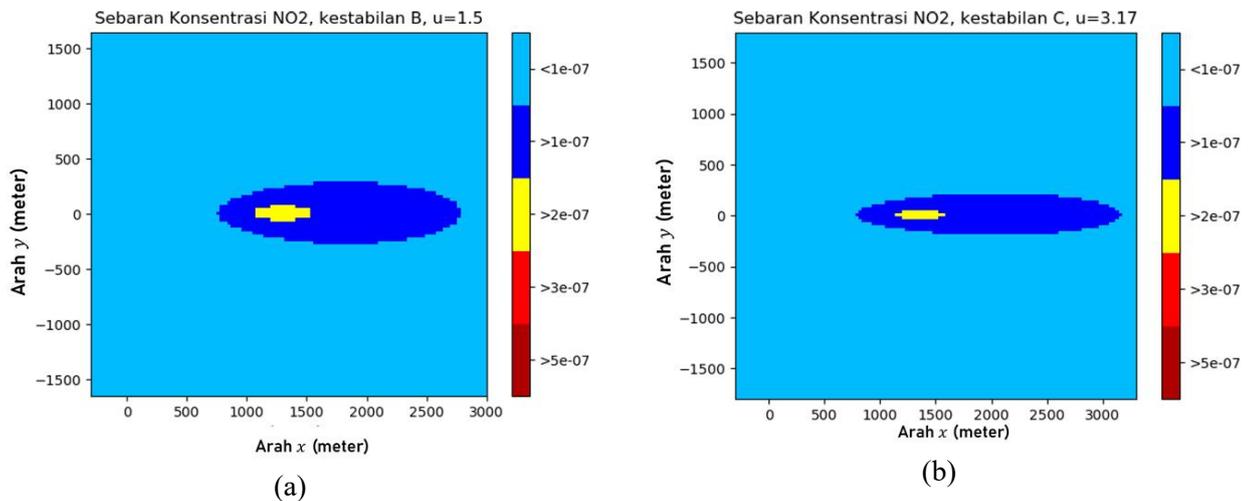
Perbedaan jarak konsentrasi keadaan maksimal pada Gambar 2 dan Gambar 3 dikarenakan pada saat kondisi stabilitas atmosfer di kelas B (tidak stabil) dan kelas C (sedikit tidak stabil) mengalami perbedaan aliran turbulensi udara, perbedaan aliran tersebut mengakibatkan perbedaan difusi yang terjadi di udara. Perbedaan kondisi difusi dapat berpengaruh terhadap dilusi pada kontaminan di udara. Semakin tinggi kondisi difusi pada suatu udara di lingkungan maka, semakin tinggi dilusi (pengenceran) terhadap kontaminan di udara tersebut. Hal tersebut mengakibatkan jarak terjauh kandungan polutan terjadi saat kondisi stabilitas atmosfer yang semakin stabil. Perbandingan jarak terjauh polutan mengalami keadaan konsentrasi tertinggi adalah saat penyebaran polutan di kondisi kestabilan atmosfer kelas C. Sebaran polutan tersebut berlaku pada ketiga kandungan polutan yang diteliti. Setelah konsentrasi polutan mengalami keadaan maksimum, maka kandungan polutan tersebut akan mengalami penurunan konsentrasi dengan bertambahnya jarak  $x$  terhadap cerobong asap sampai ke permukaan tanah. Perbedaan lokasi koordinat jarak yang mengalami penurunan konsentrasi polutan tanpa adanya kenaikan konsentrasi polutan berbeda, maka untuk mendapatkan jarak aman pemukiman penelitian ini menyimpulkan jarak aman pada pemukiman adalah pada jarak lebih dari 1327 m, karena jarak tersebut merupakan jarak terjauh dari cerobong asap.

### 3.4. Simulasi Penyebaran Polutan

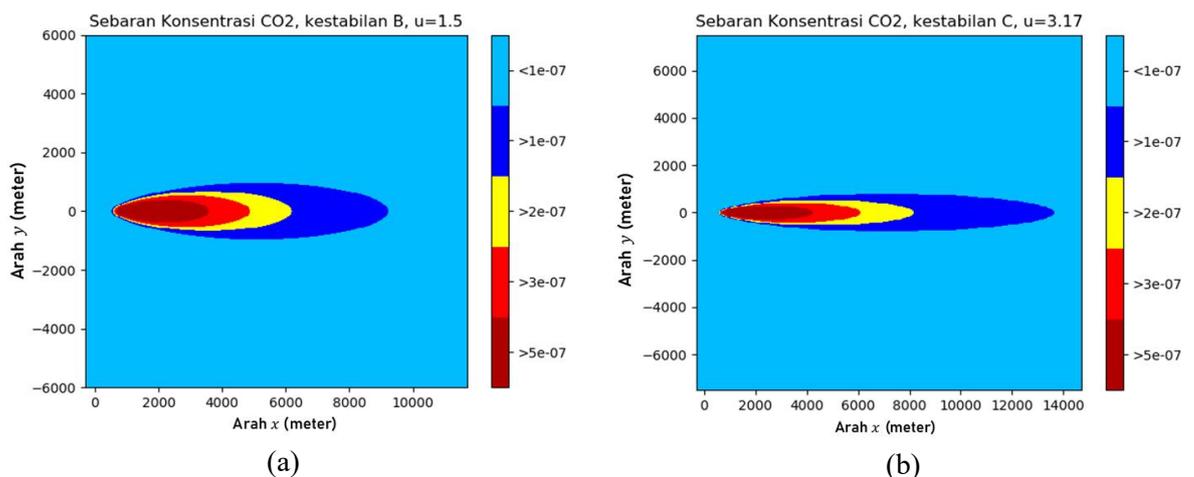
Simulasi pada bagian ini menjelaskan penyebaran polutan  $SO_2$  dengan kecepatan angin sebesar 1.5 m/s pada kestabilan atmosfer Kelas B dan kecepatan angin 3.17 m/s dengan pada kestabilan atmosfer Kelas C. Intensitas radiasi matahari yang digunakan adalah sebesar 260 watt/m<sup>2</sup> dan tinggi cerobong.



**Gambar 4.** Simulasi Penyebaran Polutan untuk  $SO_2$  untuk (a) Kestabilan atmosfer Kelas B dan (b) Kestabilan atmosfer Kelas C



**Gambar 5.** Simulasi Penyebaran Polutan untuk  $NO_2$  untuk (a) kestabilan atmosfer Kelas B dan (b) kestabilan atmosfer Kelas C.



**Gambar 6.** Simulasi Penyebaran Polutan untuk  $CO_2$  untuk (a) Kestabilan atmosfer Kelas B dan (b) Kestabilan Atmosfer Kelas C.

Berdasarkan simulasi penyebaran ketiga polutan  $SO_2$ ,  $NO_2$  dan  $CO_2$  diperoleh informasi bahwa penyebaran arah horizontal polutan (arah  $y$ ) di kelas B lebih lebar bentuknya dibandingkan

saat kondisi kestabilan atmosfer di Kelas C. Di sisi lain, penyebaran ketiga polutan ke arah  $x$  diketahui lebih jauh untuk stabilitas atmosfer kelas C dibandingkan kelas B. Hal tersebut diakibatkan oleh kecepatan angin yang lebih besar di kelas C daripada kelas B. Selain itu, jika polutan berada pada keadaan kestabilan atmosfer yang semakin stabil maka pencampuran polutan di udara lingkungan sekitar lebih lambat. Dengan kata lain, Semakin stabil kondisi atmosfer mengakibatkan konsentrasi maksimal pada masing-masing polutan menurun dan semakin jauh polutan mencapai titik maksimum dari cerobong asap.

#### 4. KESIMPULAN

Kesimpulan dari hasil penelitian ini adalah :

1. Rekonstruksi model matematika penyebaran pencemaran udara dari cerobong asap industri dilakukan menggunakan metode Transformasi Laplace yang menghasilkan model rekonstruksi sebagai berikut:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi u \sigma_y^2 \sigma_z^2} \exp \exp \left( -\frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \left[ \exp \exp \left( \frac{(z-H)^2}{\sigma_z^2} \right) + \exp \exp \left( -\frac{(z+H)^2}{\sigma_z^2} \right) \right]$$

2. Konsentrasi tertinggi untuk ketiga polutan, yaitu  $SO_2$ ,  $NO_2$ , dan  $CO_2$  saat kondisi kestabilan atmosfer di kelas B dan C masing-masing adalah 1251m dan 1327m dari cerobong asap. Hal tersebut dipengaruhi oleh perbedaan kecepatan angin sebesar 1.5 m/s untuk kelas B dan 3.17 m/s untuk kelas C, sehingga jarak aman untuk pemukiman dari cerobong asap untuk ketiga polutan tersebut haruslah lebih dari 1327 meter.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada Program Studi Matematika dan Statistika Institut Teknologi Kalimantan serta seluruh pihak yang mendukung selesainya penelitian ini.

#### REFERENSI

- [1] Darmawan, A. (2013), "Penyakit Sistem Respirasi Akibat Kerja", *JMJ*, Vol. 1, No.1, hal 68-83.
- [2] Mosey, H.I.R. (2011), "Pemodelan Penyebaran Polutan di Udara Dengan Solusi Persamaan Difusi Advektif", *Jurnal Ilmiah Sains*, Vol. 11, No. 1, hal. 58-60.
- [3] Patmasari, S. dan Abadi. (2018), "Model Matematika dari Penyebaran Polutan di Udara Dengan Model *Gaussian Plume*", *Jurnal Ilmiah Matematika*, Vol. 6, No. 2, hal 86-94.
- [4] Rahmadhani, A. (2017), "Pemodelan Dispersi Pencemaran Udara Sumber Majemuk Industry Semen di Kabupaten Tuban Jawa Timur", Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [5] Muhaimin., Sugiharto, E. dan Suratman, A. (2015), "Air Pollution Simulation From Cirebon Power Plant Activity", *Eksakta*, Vol. 16, No.1-2 Agustus 2015.
- [6] Apsari, I., Mahdhivan, S., dan Ahmda, I. B. (2018), "Penyelesaian Persamaan Adveksi Nonlokal dalam Kasus Domain Satu Dimensi dengan Menggunakan Metode Karakteristik", *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. VII, No. 1, hal 76- 84.
- [7] Stockie, J.M. (2011), "The Mathematics of Atmospheric Dispersion Modeling", *SIAM Review*, Vol. 53, No. 2, hal 349-372.
- [8] Ardianarsyah, B.S. (2019), *Inventarisasi Emisi dan Pemodelan Dispersi Emisi PM (Particulate Matter) 2.5 PT. Semen Indonesia (PERSERO) TBK*, Skripsi, Politeknik Perkapalan Negeri Surabaya, Surabaya.

- [9] Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 41 Tahun 1999 *Pengendalian Pencemaran Udara*. 26 Mei 1999. Lembaran Negara Republik Indonesia Tahun 1999 Nomor 41. Jakarta.
- [10] Visscher, A. D., (2014), *Air Dispersion Modeling*. John Wiley & Sons, Inc.