Volume 1 No 1 (2022) 95-105
http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis/

Pemetaan Bijektif yang Mengawetkan Solvabilitas di Aljabar Lie

Qonita Qurrota A'yun [1]*, Hardina Sandariria[1], Sri Wigantono[1]

[1] *Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Mulawarman*

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasikan: September 2022
Alamat Email Korespondesi: qonitaqurrota@fmipa.unmul.ac.id

Abstrak.
Misalkan L aljabar Lie general linier $gl(n, \mathbb{C})$ atau aljabar Lie spesial linier $sl(n, \mathbb{C})$. Pemetaan bijektif f pada L dikatakan mengawetkan solvabilitas di dua arah jika f dan f^{-1} memetakan setiap subaljabar Lie solvabel di L ke suatu subaljabar Lie solvabel di L. Tujuan penelitian ini adalah untuk menunjukkan contoh pemetaan linier bijektif dan karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas. Terlebih dahulu dibuktikan bahwa pemetaan transposisi dan pemetaan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas. Selanjutnya menggunakan Teorema Lie ditunjukkan bahwa karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas dapat disederhanakan menjadi karakterisasi pemetaan bijektif pada $M_n(\mathbb{C})$ yang mengawetkan triangularisabilitas matriks atau pasangan matriks dua arah, dengan $M_n(\mathbb{C})$ dipandang sebagai aljabar matriks kompleks ukuran $n \times n$.
Kata Kunci:
Aljabar Lie general linier, aljabar Lie spesial linier, pemetaan bijektif, pengawetan, subaljabar Lie solvabel

PENDAHULUAN

Suatu pemetaan bijektif f di suatu aljabar lie L dikatakan mengawetkan solvabilitas dua arah jika untuk setiap subaljabar Lie solvabel $M \subset L$ terdapat subaljabar Lie solvabel $L_1, L_2 \subset L$ sedemikian sehingga $f(M) \subset L_1$ dan $f^{-1}(M) \subset L_2$. Subaljabar Lie solvabel adalah subaljabar yang dapat diasosiasikan dengan suatu deret turunan yang stasioner.

Penelitian mengenai turunan aljabar Lie solvabel (sekaligus nilpoten) dapat ditemukan di [1]. Oleh [2], diperoleh derajat nilpotensi dari suatu nilradikal aljabar Lie solvabel untuk dua pembangun dengan kondisi tertentu. Penyelidikan mengenai karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas dapat dilakukan dengan mencermati masalah karakterisasi pemetaan bijektif pada aljabar matriks kompleks yang mengawetkan triangularisabilitas matriks atau pasangan matriks dua arah. Penelitian representasi matriks segitiga atas untuk aljabar Lie solvabel dilakukan oleh [3]. Adapun proses mengaplikasikan teori matriks untuk mengklasifikasikan aljabar Lie solvabel untuk bilangan ril dikerjakan oleh [4].

Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki pemetaan-pemetaan bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar matriks $M_n(\mathbb{C})$. Sebagai batasan, pemetaan pada kasus ini dibatasi hanya pemetaan pada aljabar Lie general linier $gl(n\mathbb{C})$ atau aljabar Lie spesial linier $sl(n, \mathbb{C})$. Terlebih dahulu ditunjukkan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas di $gl(n, \mathbb{C})$ beserta pembuktian Matematis, kemudian dengan studi literatur ditunjukkan bahwa Teorema Lie dapat digunakan untuk menyederhanakan karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas [5].

LANDASAN TEORI

Definisi 1. *Aljabar Lie atas suatu lapangan F adalah ruang vektor L atas F bersama pergandaan non-asosiatif*

$$[-,-] : L \times L \longrightarrow L$$

yang disebut Bracket Lie dan memenuhi aksioma:

(i) Bilinearitas
$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ *dan* $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ *untuk setiap* $\alpha, \beta \in F$ *dan* $X, Y \in L$.

(ii) Alternativitas
$[X, X] = 0$ *untuk setiap* $X \in L$.

(iii) Identitas Jacobi
$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = 0$ *untuk setiap* $X, Y \in L$

(iv) Anti Komutativitas $[X, Y] = -[Y, X]$ *untuk setiap* $X, Y \in L$

Bracket Lie $[X, Y]$ disebut juga sebagai komutator dari X dan Y. Suatu aljabar Lie L dikatakan abelian jika untuk setiap $X, Y \in L$ berlaku $[X, Y] = [Y, X]$. Misal diberikan himpunan semua matriks persegi ukuran $n \times n$ atas lapangan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, dinotasikan dengan $M_n(\mathbb{C})$. Himpunan $M_n(\mathbb{C})$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Matriks-matriks yang termuat di dalam $M_n(\mathbb{C})$ diidentifikasi dengan operator linier yang beraksi pada $\mathbb{C}^n$. Misalkan $M_n(\mathbb{C})$ dilengkapi oleh Bracket Lie $[-,-]$ yang didefinisikan sebagai $[A, B] = AB - BA$ untuk setiap $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, maka $M_n(\mathbb{C})$ dapat dipandang sebagai aljabar Lie general linier, dan dinotasikan dengan $gl(n, \mathbb{C})$. Misalkan $sl(n, \mathbb{C})$ menotasikan himpunan semua matriks dengan trace bernilai nol, maka $sl(n, \mathbb{C})$ membentuk subhimpunan di dalam $gl(n, \mathbb{C})$ dan dipandang sebagai aljabar Lie spesial linier [6].

Misalkan L suatu aljabar Lie. Subruang S dari L disebut subaljabar dari L jika untuk setiap $X, Y \in S$ memenuhi $[X, Y] \in S$. Lebih lanjut, jika berlaku $[Z, X] \in S$ untuk setiap $Z \in L$ maka S disebut sebagai ideal dari L.

Aljabar Lie turunan $L^{(1)}$ dari L adalah ideal $[L, L]$ yang dibangun oleh semua $[X, Y]$, dengan $X, Y \in L$. Untuk setiap aljabar Lie L, didefinisikan deret turunan $L \supset L^{(1)} \supset$

$L^{(2)} = (L^{(1)})^{(1)} \supset \cdots$. Aljabar Lie dikatakan solvabel jika terdapat bilangan bulat positif r sedemikian sehingga $L^{(r)} = \{0\}$. Dengan kata lain, deret turunan tersebut bersifat stasioner [5].

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pemetaan Linier Bijektif yang Mengawetkan Solvabilitas

Pada bagian ini ditunjukkan pembuktian bahwa pemetaan transposisi dan pemetaan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif pada aljabar Lie $gl(n, \mathbb{C})$ yang mengawetkan solvabilitas dua arah.

Transposisi

Misalkan ψ suatu pengaitan di $gl(n, \mathbb{C})$ dengan definisi

$$\begin{aligned} \psi : gl(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(n, \mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^t, \quad \forall A \in gl(n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Ditunjukkan bahwa ψ pemetaan linier bijektif.

a. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ sedemikian sehingga $A = B$. Ditunjukkan bahwa $\psi(A) = \psi(B)$. Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$. Karena $A = B$, diperoleh $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \ldots, n$ sehingga berlaku pula $[a_{ji}] = [b_{ji}]$. Dengan kata lain, $A^t = B^t$ atau $\psi(A) = \psi(B)$. Jadi, ψ merupakan pemetaan tertutup yang *well-defined*.

b. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{C}$. Diperhatikan bahwa A, B masing-masing merupakan matriks persegi ukuran $n \times n$ atas bilangan kompleks. Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, diperoleh

$$\begin{aligned} \psi(A + B) &= \psi([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \psi([a_{ij} + b_{ij}]) \\ &= \psi([(a + b)_{ij}]) = ([(a + b)_{ij}])^t \\ &= ([(a + b)_{ji}]) = [a_{ji} + b_{ji}] \\ &= [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^t + B^t \\ &= \psi(A) + \psi(B) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \psi(\alpha A) &= \psi(\alpha[a_{ij}]) = \psi([\alpha a_{ij}]) = ([\alpha a_{ij}])^t \\ &= [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha A^t \\ &= \alpha \psi(A) \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa ψ merupakan pemetaan linier.

c. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ sedemikian sehingga $\psi(A) = \psi(B)$, yang berarti $A^t = B^t$. Diperoleh $[a_{ji}] = [b_{ji}]$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \ldots, n$, yang berarti $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ atau $A = B$. Dengan kata lain, ψ pemetaan injektif. Selanjutnya diambil sebarang $B \in gl(n, \mathbb{C})$, dapat dipilih $A = B^t \in gl(n, \mathbb{C})$ sedemikian sehingga $\psi(A) = A^t = (B^t)^t = B$. Dengan kata lain, ψ surjektif. Jadi, terbukti ψ pemetaan bijektif.

Dari pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa transposisi ψ merupakan pemetaan linier yang bijektif. Selanjutnya ditunjukkan bahwa ψ mengawetkan solvabilitas dua arah.

Misalkan M sebarang subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$. Berarti terdapat bilangan bulat positif r sedemikian sehingga $M^{(r)} = \{0\}$. Diambil sebarang $A \in \psi(M)$. Berarti terdapat suatu matriks persegi $B \in M$ sedemikian sehingga $A = \psi(B) = B^t$. Karena $B \in M$ dan M subaljabar Lie solvabel, berarti $[B, C]^r = 0$ untuk $C \in M$. Diperhatikan bahwa $([B, C])^t = (BC - CB)^t = C^t B^t - B^t C^t = [C^t, B^t]$ dan

$$\begin{aligned}
([B, C]^2)^t &= ((BC - CB)(BC - CB))^t \\
&= (BC(BC - CB) - CB(BC - CB))^t \\
&= (BCBC - BCCB - CBBC + CBCB)^t \\
&= (BCBC)^t - (BCCB)^t - (CBBC)^t + (CBCB)^t \\
&= C^t B^t C^t B^t - B^t C^t C^t B^t - C^t B^t B^t C^t + B^t C^t B^t C^t \\
&= C^t B^t C^t B^t - C^t B^t B^t C^t - B^t C^t C^t B^t + B^t C^t B^t C^t \\
&= C^t B^t (C^t B^t - B^t C^t) - B^t C^t (C^t B^t - B^t C^t) \\
&= (C^t B^t - B^t C^t)(C^t B^t - B^t C^t) \\
&= [C^t, B^t]^2.
\end{aligned}$$

Dengan induksi Matematika, dapat ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli n, berlaku

$$\begin{aligned}
([B, C]^n)^t &= ([B, C]\,[B, C]\, \cdots\, [B, C])^t \\
&= ([B, C])^t\, ([B, C])^t\, \cdots\, ([B, C])^t \\
&= [C^t, B^t]\,[C^t, B^t]\, \cdots\, [C^t, B^t] \\
&= [C^t, B^t]^n.
\end{aligned}$$

Berarti untuk bilangan bulat positif r diperoleh

$$[C^t, A]^r = [C^t, B^t]^r = ([B, C]^r)^t = 0^t = 0.$$

Dengan demikian, A juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel. Berarti ψ mengawetkan solvabilitas. Secara analog, ditunjukkan pula bahwa invers pemetaan ψ juga mengawetkan solvabilitas. Diambil sebarang $A \in \psi^{-1}(M)$. Hal ini artinya, terdapat $B \in \psi(M)$ sedemikian sehingga $B = \psi(A)$, dengan $A \in M$. Karena M solvabel dan ψ mengawetkan solvabilitas, berarti hasil peta $\psi(A) = B$ juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa transposisi ψ merupakan pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar Lie $gl(n, \mathbb{C})$.

Similaritas

Misalkan φ pengaitan pada $gl(n, \mathbb{C})$ dengan definisi

$$\begin{aligned}
\varphi : gl(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(n, \mathbb{C}) \\
A &\longmapsto TAT^{-1}
\end{aligned}$$

untuk setiap matriks $A \in gl(n, \mathbb{C})$ dan suatu matriks T invertibel ukuran $n \times n$. Mula-mula ditunjukkan bahwa φ pemetaan linier bijektif.

a. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ sedemikian sehingga $A = B$. Ditunjukkan bahwa $\varphi(A) = \varphi(B)$. Karena $A = B$, jelas bahwa untuk suatu matriks invertibel T ukuran $n \times n$ berlaku
$$TAT^{-1} = TBT^{-1}.$$
Jadi, ψ merupakan pemetaan tertutup yang *well-defined*.

b. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{C}$. Diperhatikan bahwa A, B masing-masing merupakan matriks persegi ukuran $n \times n$ atas bilangan kompleks. Untuk suatu matriks invertibel T, diperoleh
$$\begin{aligned} \varphi(A + B) &= T(A + B)T^{-1} \\ &= (TA + TB)T^{-1} \\ &= TAT^{-1} + TBT^{-1} \\ &= \varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$
dan
$$\varphi(\alpha A) = T(\alpha A)T^{-1} = \alpha(TAT^{-1}) = \alpha\varphi(A)$$
sehingga terbukti bahwa ψ merupakan pemetaan linier.

c. Diambil sebarang $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$ sedemikian sehingga $\varphi(A) = \varphi(B)$. Untuk suatu matriks invertibel T ukuran $n \times n$ diperoleh
$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(B) \\ TAT^{-1} &= TBT^{-1} \\ (TAT^{-1})T &= (TBT^{-1})T \\ TA(T^{-1}T) &= TB(T^{-1}T) \\ TA &= TB \\ T^{-1}(TA) &= T^{-1}(TB) \\ (T^{-1}T)A &= (T^{-1}T)B \\ A &= B. \end{aligned}$$
Dengan kata lain, φ pemetaan injektif. Selanjutnya diambil sebarang $B \in gl(n, \mathbb{C})$. Misalkan T suatu matriks invertibel ukuran $n \times n$, didefinisikan $A = T^{-1}BT$. Jelas bahwa $A \in gl(n, \mathbb{C})$, diperoleh
$$\begin{aligned} \varphi(A) &= TAT^{-1} \\ &= T(T^{-1}BT)T^{-1} \\ &= (TT^{-1})B(TT^{-1}) \\ &= B \end{aligned}$$
Dengan kata lain, φ surjektif. Jadi, terbukti φ pemetaan bijektif.

Dari pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa similaritas ψ merupakan pemetaan linier yang bijektif. Selanjutnya ditunjukkan pula bahwa ψ mengawetkan solvabilitas dua arah.

Misalkan M sebarang subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$. Karena M solvabel, terdapat bilangan bulat positif r sedemikian sehingga $M^{(r)} = \{0\}$. Diambil sebarang $A \in \varphi(M)$. Berarti terdapat suatu matriks persegi $B \in M$ sedemikian sehingga $A = \varphi(B) = TBT^{-1}$, dengan T matriks invertibel ukuran $n \times n$. Karena $B \in M$ dan M subaljabar Lie solvabel, berarti $[B, C]^r = 0$ untuk $C \in M$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
[TBT^{-1}, TCT^{-1}] &= (TBT^{-1})(TCT^{-1}) - (TCT^{-1})(TBT^{-1}) \\
&= TB(T^{-1}T)CT^{-1} - TC(T^{-1}T)BT^{-1} \\
&= TBCT^{-1} - TCBT^{-1} \\
&= T(BCT^{-1} - CBT^{-1}) \\
&= T(BC - CB)T^{-1} \\
&= T[B, C]T^{-1}.
\end{aligned}$$

Untuk bilangan bulat positif r, didapat

$$\begin{aligned}
[A, TCT^{-1}]^r &= [TBT^{-1}, TCT^{-1}]^r \\
&= [TBT^{-1}, TCT^{-1}]\,[TBT^{-1}, TCT^{-1}] \cdots [TBT^{-1}, TCT^{-1}] \\
&= (T[B, C]T^{-1})\,(T[B, C]T^{-1}) \cdots (T[B, C]T^{-1}) \\
&= (T[B, C]T^{-1})^r \\
&= T^r [B, C]^r (T^{-1})^r \\
&= T^r\, 0\, (T^{-1})^r \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian, A juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel. Diperoleh φ mengawetkan solvabilitas. Secara analog, ditunjukkan pula bahwa invers pemetaan φ juga mengawetkan solvabilitas. Diambil sebarang $A \in \varphi^{-1}(M)$. Dari sini berarti terdapat $B \in \varphi(M)$ sedemikian sehingga $B = \varphi(A)$, dengan $A \in M$. Karena M solvabel dan φ mengawetkan solvabilitas, berarti hasil peta $\varphi(A) = B$ juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa pemetaan similaritas φ merupakan pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar Lie $gl(n, \mathbb{C})$.

2. Pemetaan Bijektif Tanpa Syarat Linier yang Mengawetkan Solvabilitas

Pada bagian ini, diberikan paparan mengenai pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas. Misalkan $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sebarang automorfisma di lapangan bilangan kompleks. Diperhatikan kembali bahwa elemen identitas perkalian dan konjugat kompleks merupakan satu-satunya automorfisma kontinu di $\mathbb{C}$. Pemetaan $A = [a_{ij}] \longmapsto [f(a_{ij})]$ merupakan automorfisma ring di $M_n(\mathbb{C})$. Lebih lanjut, pemetaan tersebut bijektif di $gl(n, \mathbb{C})$ dan mengawetkan solvabilitas dua arah.

Berdasarkan Teorema Lie [7], setiap subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$ ekuivalen dengan suatu subaljabar matriks segitiga. Dengan kata lain, subaljabar Lie $L \subset gl(n, \mathbb{C})$ solvabel jika dan hanya jika terdapat suatu rantai segitiga dari subruang-subruang untuk L. Subruang invarian di L adalah subruang yang invarian terhadap setiap elemen di L. Diperhatikan bahwa dua buah matriks A dan B dikatakan latis-equal, dinotasikan dengan $A \sim B$, jika kedua matriks tersebut memiliki latis subruang invarian yang tepat sama.

Teorema Lie menyatakan bahwa suatu pemetaan bijektif $\tau : gl(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ yang memenuhi relasi $\tau(A) \sim A$, dengan $A \in gl(n, \mathbb{C})$, mengawetkan solvabilitas dua arah. Pemetaan tersebut merupakan sebarang permutasi pada setiap kelas-kelas ekuivalensi yang terbentuk oleh relasi $\sim$. Pada penulisan ini, pemetaan-pemetaan bijektif yang memenuhi kondisi tersebut disebut pengawetan latis. Oleh [5], ditunjukkan bahwa setiap pemetaan bijektif pada $gl(n, \mathbb{C})$ yang mengawetkan solvabilitas dua arah merupakan komposisi dari pengawetan-pengawetan latis, untuk $n \geq 3$.

Suatu pemetaan bijektif $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ dikatakan mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah jika untuk setiap $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ himpunan $\{A, B\}$ bersifat triangularisabel secara bersamaan (atau similar dengan matriks segitiga) jika dan hanya jika himpunan $\{f(A), f(B)\}$ juga triangularisabel. Konsep triangularisabilitas dapat pula dipandang sebagai pendekatan komutativitas [8]. Diberikan teorema dan akibat berikut [5].

Teorema 2. *Misalkan $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ pemetaan bijektif. Pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:*

(i) Pemetaan f mengawetkan solvabilitas dua arah.

(ii) Pemetaan f mengawetkan triangularisabilitas dua arah.

Bukti. $(i) \Rightarrow (ii)$. Mula-mula diasumsikan f mengawetkan solvabilitas dua arah. Misalkan $S \subset M_n(\mathbb{C})$ suatu subset yang memuat matrik-matriks triangularisabel. Berarti terdapat suatu matriks invertibel T sedemikian sehingga $S \subset TT_nT^{-1}$, dengan T_n menotasikan aljabar segitiga atas penuh. Karena TT_nT^{-1} subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$, berarti image dari pemetaan f haruslah termuat pula di suatu subaljabar Lie solvabel. Berdasarkan Teorema Lie, subaljabar Lie solvabel tersebut haruslah triangularisabel. Oleh karena itu, $f(S)$ mengawetkan triangularisabilitas. Secara sama, diperoleh $f^{-1}(S)$ mengawetkan triangularisabilitas.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Untuk arah sebaliknya, misal diasumsikan bahwa f mengawetkan triangularisabilitas di dua arah. Misalkan M subaljabar Lie solvabel di $gl(n, \mathbb{C})$. Menurut Teorema Lie, M triangularisabel. Berdasarkan hipotesis bahwa f mengawetkan triangularisabilitas di dua arah, berarti $f(M)$ dan $f^{-1}(M)$ triangularisabel. Dengan demikian, terdapat suatu matriks invertibel $T, S \in M_n(\mathbb{C})$ sedemikian sehingga $f(M) \subset TT_nT^{-1}$ dan $f^{-1}(M) \subset ST_nS^{-1}$. Oleh karena itu, f mengawetkan solvabilitas di dua arah. ∎

Teorema 3. *Untuk suatu matriks $A \in M_n(\mathbb{C})$, pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:*

(i) $A = \lambda I + N$, untuk suatu skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dan matriks nilpoten N dengan $N^{n+1} \neq 0$.

(ii) Jika untuk sebarang $B, C \in M_n(\mathbb{C})$, pasangan matriks $\{A, B\}$ dan $\{A, C\}$ keduanya triangularisabel, maka $\{B, C\}$ juga triangularisabel.

Bukti. $(i) \Rightarrow (ii)$. Diperhatikan bahwa rantai triangularisabilitas matriks A tunggal, sehingga berlaku pula pada setiap pasangan matriks $\{A, B\}$ yang triangularisabel. Oleh karena itu, pernyataan pertama mengakibatkan pernyataan kedua.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Andaikan matriks A tidak memenuhi bentuk berupa $\lambda I + N$, berarti A memiliki setidaknya dua nilai eigen, atau satu nilai eigen dengan multiplisitas geometri minimal dua. Untuk kedua kasus tersebut, setelah dikenakan similaritas, maka diasumsikan

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Diambil sebarang matriks B dan C dengan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh bahwa pasangan $\{A, B\}$ dan $\{A, C\}$ triangularisabel, yaitu dengan menyelidiki sudut kiri atas ukuran 2×2 dari A dan C membentuk pasangan triangularisabel. Akan tetapi karena rantai triangularisabilitas dari B adalah tunggal, berarti pasangan matriks $\{B, C\}$ tidak triangularisabel. Hal ini kontradiksi dengan kondisi yang diketahui yaitu bahwa jika $\{A, B\}$ dan $\{B, C\}$ triangularisabel, maka pasangan $\{B, C\}$ seharusnya triangularisabel. Oleh karena itu, pengandaian salah dan harus diingkar. Berarti A memiliki bentuk $\lambda I + N$. ■

Akibat 4. *Misalkan $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ suatu pemetaan bijektif. Pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:*

(i) Pemetaan f mengawetkan triangularisabilitas di dua arah.

(ii) Pemetaan f mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah.

Bukti. $(i) \Rightarrow (ii)$. Diasumsikan pemetaan $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ adalah pemetaan bijektif yang mengawetkan triangularisabilitas di dua arah, berarti berlaku pula untuk triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah sehingga pernyataan pertama mengakibatkan pernyataan kedua.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Untuk arah sebaliknya, diasumsikan $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Misalkan $S \subset M_n(\mathbb{C})$ adalah suatu subaljabar. Karena f maupun f^{-1} memiliki sifat yang sama, berarti cukup ditunjukkan bahwa triangularisabilitas di S menghasilkan triangularisabilitas $f(S)$. Misalkan S triangularisabel dan adjoin untuk S adalah suatu nilpoten N dari nilindeks maksimal, yang jika diperlukan, memenuhi syarat sedemikian sehingga himpunan yang diperbesar ini juga masih triangularisabel. Diperhatikan bahwa image f dari himpunan yang diperbesar tersebut memiliki sifat bahwa setiap pasangan di dalamnya triangularisabel dan memuat $f(N)$. Berdasarkan asumsi keawetan dan Lemma 3, setiap pasangan matriks di himpunan tersebut memiliki rantai triangularisabilitas tunggal. Dengan demikian, $f(S)$ triangularisabel.
■

Diperoleh syarat perlu dan cukup suatu pemetaan bijektif di $M_n(\mathbb{C})$ mengawetkan solvabilitas, yaitu apabila pemetaan tersebut mengawetkan triangularisabilitas atau mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Selanjutnya diberikan proposisi yang menunjukkan hubungan antara pengawetan triangularisabilitas dengan diagonalisasi.

Proposisi 5. *Misalkan $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ pemetaan bijektif yang mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Misalkan D menotasikan himpunan bagian dari $M_n(\mathbb{C})$ yang memuat semua matriks yang dapat didiagonalkan (terdiagonal), maka berlaku:*

(i) $f(D) = D$, *dan*

(ii) Jika A dan B matriks yang dapat didiagonalkan (terdiagonal), maka A dan B komut jika dan hanya jika $f(A)$ dan $f(B)$ komut.

Bukti. Telah dibuktikan bahwa f mengawetkan koleksi himpunan-himpunan triangularisabel di dua arah. Secara khusus, pemetaan f menginduksi suatu korespondesi bijektif pada koleksi semua himpunan triangularisabel maksimal, yaitu himpunan matriks yang similar dengan T_n. Untuk sebarang himpunan triangularisabel ε, didefinisikan C_ε sebagai himpunan semua rantai triangularisabilitas untuk ε.

Mula-mula diselidiki bahwa untuk setiap $\varepsilon, C_\varepsilon$, dan $C_{f(\varepsilon)}$ yang triangularisabel, memiliki kardinalitas yang sama. Hal ini didapat dari fakta bahwa kardinalitas C_ε serupa dengan kardinalitas koleksi himpunan triangularisabel maksimal yang memuat ε.

Selanjutnya diselidiki bahwa matriks A memiliki sebanyak n nilai eigen yang berbeda jika dan hanya jika $C_{\{A\}}$ memiliki tepat $n!$ anggota. Karena setiap subruang invarian dari matriks terdiagonal A dengan nilai eigen berbeda merupakan hasil tambah langsung dari suatu ruang eigen, berarti berlaku sedemikian sehingga suatu operator memiliki tepat $n!$ rantai triangularisabilitas. Untuk menunjukkan arah sebaliknya, diselidiki bahwa sebarang matriks A yang mempunyai ruang eigen berdimensi minimal 2, maka $C_{\{A\}}$ mempunyai kardinalitas tak terhingga. Oleh karena itu, diasumsikan bahwa bentuk kanonik Jordan dari A memiliki tepat satu sel yang berkorespondensi dengan setiap nilai eigen. Misalkan A mempunyai bentuk Jordan berupa $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$, dengan setiap A_j merupakan suatu sel Jordan $\lambda_j I + N_j$ yang beraksi pada suatu subruang V_j. Diingat bahwa setiap subruang invarian dari A dapat dinyatakan sebagai $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ dengan $W_j \subset V_j$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, k$ merupakan kernel dari suatu nilpoten berpangkat $(A_j - \lambda_j I)$. Dari sini, maka kardinalitas $C_{\{A\}}$ kurang dari $n!$ jika sel Jordan dari A tidak berukuran 1×1.

Diperhatikan bahwa dua matriks terdiagonal komut jika dan hanya jika matriks-matriks tersebut terdiagonal secara bersamaan. Karena sebarang komposisi dari f dengan suatu transformasi similaritas memenuhi asumsi, cukup ditunjukkan bahwa himpunan Δ_n dari semua matriks diagonal dipetakan pada $S\Delta_n S^{-1}$ untuk suatu matriks invertibel S. Misalkan D_0 suatu anggota *fixed* dari Δ_n dengan n nilai eigen berbeda. Diperhatikan bahwa $C_{\Delta_n} = C_{\{D_0\}}$. Berdasarkan yang sudah dibuktikan sebelumnya, diperoleh bahwa $f(D_0)$ memiliki n nilai eigen berbeda. Tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan bahwa $f(D_0)$ diagonal. Untuk setiap rantai triangularisabilitas D_0, terdapat suatu korespondensi dengan aljabar segitiga penuh dengan rantai subruang invarian, dan irisannya adalah Δ_n. Image pemetaan f dari aljabar segitiga tersebut adalah $n!$ aljabar segitiga penuh yang memuat $f(D_0)$. Karena $f(D_0)$ memiliki nilai eigen berbeda, irisan tersebut haruslah merupakan Δ_n. ■

PENUTUP

Pemetaan transposisi dan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas di aljabar Lie L dengan L merupakan aljabar Lie general linier atau aljabar Lie spesial linier. Kriteria pemetaan bijektif tanpa syarat linier pada aljabar matriks kompleks persegi yang mengawetkan solvabilitas dapat ditinjau dari sifat pengawetan triangularisabilitas matriks dan pasangan matriks di dua arah.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mackedonskyi, O., dan Petravchuk, A.P. (2014). On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. *Journal of Algebra,* **401**, 245-257.

[2] Cagliero, L., Levstein, F., dan Szechtman, F. (2021). Nilpotency degree of the nilradical of a solvable Lie algebra on two generators and uniserial modules associated to free nilpotent Lie algebras. *Journal of Algebra,* **585**, 447-483.

[3] Ceballos, M., Nunez, J., dan Tenorio, A.F. (2017). Minimal faithful upper-triangular matrix representations for solvable Lie algebras, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **318**, 279-292.

[4] Le, V.A., Nguyen, T.A., Nguyen, T.T.C., Nguyen, T.T.M., dan Vo, T.N.. (2020). Applying matrix theory to classify real solvable Lie algebras having 2-dimensional derived ideals. *Linear Algebra and its Applications,* **588**, 282-303.

[5] Radjavi, H., dan Semrl, P. (2004). Non-linear maps preserving solvability, *Journal of Algebra* **280**, 624-634.

[6] Milne J.S. (2011). *Algebraic Groups, Lie Groups and their Arithmetic Subgroups*, 239-272

[7] Samelson, H. (1969). Notes on Lie Algebras, *Van Nostrand Reinhold Math. Stud.*

[8] Radjavi, H., dan Rosenthal, P. (2000). *Simultaneous Triangularization*, New York: Springer.