AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

BILANGAN DOMINASI-LOKASI HASIL KALI SISIR GRAF LINTASAN DENGAN BEBERAPA GRAF REGULER

Aulia Sibua[1], Anuwar Kadir Abdul Gafur[1*]
[1]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Pasifik Morotai
Email korespondensi*: anuwarkadirabdulgafur@gmail.com

Abstrak

Ke seluruh peper, semua graf adalah graf terhubung, sederhana, tak berarah, dan terbatas. Himpunan titik W dari G dinamakan himpunan dominasi jika setiap titik untuk setiap $u \in V(G) \setminus W$ adjacent ke beberapa titik $v \in W$. Kardinalitas minumum dari himpunan dominasi lokasi disebut bilangan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\lambda(G)$. Dalam penelitian ini, kami memperhatikan hasil kali sisir graf lintasan dengan beberapa graf regular. Jika diperhatikan pengertian dari graf regular maka diperoleh graf lengkap merupakan graf $(n-1)$ −reguler dengan orde n. Maka dalam hasil penelitian ini kami mulai dengan mencari bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf lintasan dengan graf regular dimana graf regular $adalah\ (n-1) - reguler, (n-2) - reguler$, dan $(n-3) - reguler$ yang masing-masing memiliki $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot (n-2)$, $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$, dan $\lambda(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$ dengan orde n dan m.

Kata kunci: *hasil kali sisir, himpunan dominasi, bilangan dominasi-lokasi*

Sejarah artikel
Diterima: 25-08-2022
Direvisi: 12-09-2022
Dipublikasikan: 17-11-2022

Abstract

To all the paper, all graph is connected, simple, undirected, and finite. A set vertex W of G is called the domination set if every vertex for every $u \in V(G) \setminus W$ is adjacent to some vertex $v \in W$. The minimum cardinality of a location-dominated set is called the location-dominated number, which is denoted by λ(G). In this research, we observe to the comb product of a path graph to regular graphs. If noticed to the definition of a regular graph, then obtained a complete graph is $(n-1) - regular$ graph with order n. So in the results of this research we start by looking for the location-dominated number of the comb product of a path graph with a regular graph where the regular graph is a $(n-1) - regular$, $(n-2) - regular$, end $(n-2) - regula$ which each one has $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot (n-2)$, $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$, dan $\lambda(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$ where order n end m.

***Keywords**: the comb product;* the domination set*;* the location-dominated number

Article history
Received: 25-08-2022
Revised: 12-09-2022
Published: 17-11-2022

A. Pendahuluan

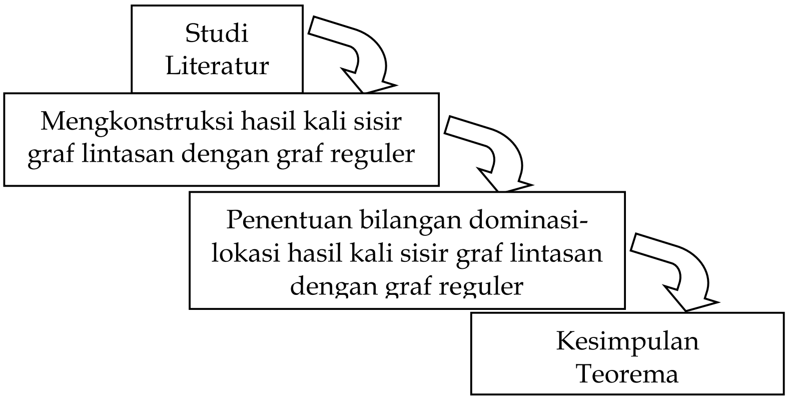
Himpunan dominasi-lokasi merupakan pengembangan dari konsep *dimensi metrik.* Dimensi metrik diperkenalkan oleh Salter pada tahun 1975. Pada tahun 1976 Harary dan Malter juga memperkenalkannya secara terpisah. Salter mengaitkan permasalahan konsep himpunan lokasi yang memiliki kardinalitas minimum dengan masalah jaringan. Khuller dkk pada tahun 1996 kemudian menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf pada bidang sains kumputasi dan robotika. Chartrand dan Zhang padatahun 2003 juga memanfaatkan masalah ini untuk navigasi robotika. J. Caceres dkk. menggaitkan konsep dominasi-lokasi ini dengan permasalahan penempatan alat pendekteksi dalam suatu bangunan. J. Caceres dkk. mengasumsikan bagunan sebagai graf. Kemudian alat pendekteksi tersebut ditempatkan di beberapa titik di graf. Oleh karena itu, diperlukan suatu optimasi untuk menentukan banyaknya perangkat yang dibutuhkan sehingga dapat mendeteksi masalah di setiap titik. Misalkan alat pendeteksi yang dimaksud adalah salah satunya bunyi alaram yang menunjukkan terjadi kerusakan atau kebakaran. Setiap alaram akan memberikan sinyal ketika yang berdekatan dengan titik alaram ditempatkan sehingga lokasi kebakaran atau kerusakan dapat ditemukan. Oleh karena itu, kami tertarik untuk mengembangan penelitian bilanagan dominasi-lokasi pada graf.

Himpunan dominasi merupakan bagian dari himpunan titik pada suatu graf, yang memiliki ketentuan titik tersebut. Dengan menentukan titik yang terhubung minimal satu titik. Himpunan S dari titik graf sederhana G dinamakan himpunan dominasi jika setiap titik untuk setiap $u \in V(G) - S$ adjacent ke beberapa titik $v \in S$. Kardinalitas minumum dari himpunan dominasi lokasi disebut bilangan dominasi lokasi yang disimbolkan dengan $\lambda(G)$. Oleh karena itu, dapat diberikan suatu graf terhubung $G = (V, E)$ himpunan dominas-lokasi pada graf G adalah himpunan dominasi S pada G dengan syarat untuk setiap titik u dan v dimana $u, v \in V - S$ dengan $u \neq v$ berlaku $\emptyset \neq N(u) \cap S \neq N(v) \cap S \neq \emptyset$ (Anuwar K A Gafur dan Suhadi W S, 2021).

Dalam penelitian ini, kami memperhatikan hasil kali sisir graf lintasan dengan beberapa graf regular. Jika diperhatikan pengertian dari graf regular maka diperoleh graf lengkap merupakan graf $(n-1)$ −reguler dengan orde n. Maka dalam hasil penelitian ini kami mulai dengan mencari bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf lintasan dengan graf regular dimana graf regular adalah $(n-1)$ −reguler, $(n-2)$ −reguler, dan $(n-3)$ −reguler.

B. Metode Penelitian

Metode penelitian merupakan suatu kerangka dalam pemecahan masalah yang menggambarkan tahap-tahap penyelesaian masalah secara singkat berserta penjelasannya. Kegiatan penelitian kami rancang sedemikian rupa agar mengikuti diagram alir. Oleh karena itu, tahapan-tahapan dalam dalam penelitian ini dijadikan dalam bentuk diagram alir seperti gambar berikut:



Gambar 1. Diagram alir

Studi Literatur

Dalam penelitian ini, termasuk dalam jenis penelitian studi literatur yakni melalui pencarian referensi teori yang relevan dengan konsep himpunan dominasi-lokasi. Teori-teori yang diperlukan dikhususkan pada kelas-kelas graf guna mengkonstruksi kelas graf baru, dalam hal ini hasil kali sisir dari graf lintasan dan graf reguler. Selain itu, dalam penelitian-penelitian terdahulu juga sangat dibutuhkan untuk menentukan batas atas dan batas bawah bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir dari graf lintasan dan graf reguler. Dalam pelaksanaan kegiatan penelitian maka waktu yang dibutuhkan yakni selama bulan mei sampai oktober 2022.

Mengkontruksi Hasil Kali Sisir dari Graf Lintasan dan Graf Reguler.

Pengkontruksian hasil kali sisir dari graf lintasan dan graf reguler untuk melihat karakteristik graf tersebut dengan memperhatikan pola sehingga akan ditentukan bilangan dominasi-lokasi dari graf yang di sajikan. Dalam mengkontruksi graf, kami memperhatikan teori yang ada pada kelas-kelas graf sebelumnya untuk menghindari graf yang isomorfik atau sama. Setelah itu dilakukan penamaan pada graf yang berhasil dikonstruksi dengan memperhatikan penamaan kelas-kelas graf terdahulu untuk menghindari kesamaan penggunaan nama pada graf.

Menentukan Bilangan Dominasi-Lokasi Hasil Kali Sisir dari Graf Lintasan dan Graf Reguler.

Pada tahap ini penentuan batas atas dan batas bawah dari bilangan dominasi-lokasi untuk graf yang dikonstruksi sangat dibutuhkan untuk menghindari graf yang trivial atau dengan kata lain hasilnya sama dengan batas atas dan/atau batas bawah. Jika hasilnya trivial, maka akan dilakukan pengkonstrusian ulang, tetapi jika hasilnya tidak trivial maka penelitian dilanjutkan hingga diperoleh hasil utama bilangan dominasi-lokasi pada graf bintang kipas yang kemudian disimpulkan dalam bentuk lemma dan teorema.

C. Hasil Dan Pembahasan

Untuk $n, m \geq 3$, P_m merupakan graf lintasan dan H adalah graf $(n-1)$ −reguler. Misalkan $o \in V(H)$ maka hasil kali sisir P_m terhadap H dinotasikan $P_m \rhd_o H$, didefenisikan sebagai sebuah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan $|V(G)|$ salinan H, yaitu $H_1, H_2, \ldots. H_{|V(G)|}$, kemudian menempelkan titik ke-i di G pada titik v di $H_i, i = [1|V(G)|]$.

Untuk mencari bilangan diminasi-lokasi dari graf $P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H$ dimana $m \geq 3$ maka diperlukan beberapa defenisi. Misalkan $o \in V(H)$ dan $x \in V(P_m)$ maka didefenisikan $G_o = \{(x,o)|\ x \in V(P_m)\}$ dan $H_x = \{(x,u)|\ u \in V(H)\ \}$. Kami juga mendefinisikan $H_x^- = H_x \setminus (x,o)$. Karena graf H dengan orde $n \geq 3$ maka H_x^- tidak kosong. Jika $z \in H_x^-$ maka $N_{P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H}(z) \subseteq H_x$ serta $S \subseteq V(P_m)$**,** notasi dari $P_m[S]$ adalah subgraf maksimum dari P_m untuk semua titik di S. Misalkan graf lintasan P_m dengan $m \geq 3$ dan graf $(n-1)$ −reguler, $(n-2)$ −reguler, dan $(n-3)$ −reguler dengan $n \geq 3$ atau kita sebut graf H merupakan graf terhubung dan tidak trivial. Untuk mencari $\lambda(P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H)$, dengan memperhatikan H_x untuk setiap $x \in V(P_m)$. Kami juga mendefenisikan W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H$ dan $W_x = W \cap H_x$. Lemma 4.1, menunjukkan bahwa H_x berkonstribusi panling sedikit $\lambda(H) - 1$ titik di W.

Lemma 4.1. Untuk setiap titik x di $V(P_m)$ maka $W \cap H_x \neq \emptyset$. Selain itu $|W \cap\ H_x| \geq \lambda(H) - 1$.

Bukti. Misalkan W adalah himpunan dominasi-lokasi di $P_m \rhd_o H$. Misalkan $x \in V(P_m)$. Akan dibuktikan $W \cap H_x \neq \emptyset$. Andaikan $W \cap H_x = \emptyset$ maka terdapat titik $z \in H_x^-$ dimana $H_x^- = H_x \backslash \{(x,o)\}$ sehingga $N_{P_m \rhd_o H}(z) \cap W = \emptyset$. Kontradiksi dengan W adalah himpunan dominasi-lokasi di $P_m \rhd_o K_n$, haruslah $W \cap H_x \neq \emptyset$. Selain itu, kami akan membuktikan bahwa $|W \cap\ H_x| \geq \lambda(H) - 1$. Andaikan $|W \cap\ H_x| \leq \lambda(H) - 2$ dimana $W_x = W \cap\ H_x$. Artinya terdapat dua titik yang tidak berada pada W_x, sebutlah titik a dan b sehingga kedua titik memiliki ketertangga $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x \neq \emptyset$, $N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W_x \neq \emptyset$ dan $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x = W_x = N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W_x$. Dengan demikian $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W = N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x \neq \emptyset$, dan $N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W = N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W_x \neq \emptyset$ serta $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W = N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x = W_x = N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x = N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W$. Kontradiksi dengan W adalah himpunan dominasi-lokasi di $P_m \rhd_o H$. Haruslah $|W \cap\ H_x| \geq \lambda(H) - 1$.

Berdasarkan lemma 4.1 diatas, menjelaskan bahwa untuk setiap x di $V(P_m)$, dan z di H_x^- maka $N_{P_m \rhd_o H}(z) \subseteq H_x$. Ini menunjukkan bahwa hanya ada satu titik diluar dari H_x yaitu (x,o). Sebagai akibat dari lemma 4.1 sebagai berikut.

Akibat 4.1. Jika $|W_x| = \lambda(H) - 1$, maka $(x,o) \notin W_x$. Selain itu, jika $W_x \cup \{(x,o)\}$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $(P_m \rhd_o H)[H_x]$.

Lemma 4.2. Jika setiap titik x di $V(P_m)$ memenuhi $|W_x| = \lambda(H) - 1$, maka $N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap G_o \cap W \neq \emptyset$.

Bukti. Misalkan x di $V(P_m)$ memenuhi $|W_x| = \lambda(H) - 1$. Akan ditunjukkan bahwa $N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap G_o \cap W \neq \emptyset$. Karena $|W_x| = \lambda(H) - 1$, maka W_x bukan himpunan dominasi-lokasi dari $(P_m \rhd_o H\ )[H_x]$ dan berdasarkan akibat 4.1, maka (x,o) tidak berada di W_x. Oleh karena itu, terdapat titik a di H_x^- sehingga $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x = N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap W_x$ dan $N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap W_x \neq \emptyset$. Tanpa mengurangi keumuman, pilih titik (y,o) di G_o dan (y,o) berada pada W serta $(x,o)(y,o) \in E(G_o)$. Maka $N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap G_o \neq \emptyset$ karena (x,o) merupakan bagian dari G_o. Karena W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ maka $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W \neq N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap W$ dan $N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big) \cap W \neq \emptyset$ karena $(y,o) \in N_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big)$ tetapi $(y,o) \notin N_{P_m \rhd_o H}(a)$.

Untuk lemma 4.3 di bawah ini, himpunan H_x memberikan kontribusi $\lambda(H)$ titik di himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$.

Lemma 4.3. Misalkan B adalah himpunan dominasi-lokasi dari H dengan $\lambda(H)$ titik. Untuk setiap x di $V(P_m)$. Misalkan juga $B_x = \{(x,v) | x \in V(P_m), v \in B\}$. Maka $D = \bigcup_{x \in V(P_m)} B_x$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$.

Bukti. Ambil sebarang titik a, b di $V(P_m \rhd_o H)$ selain D dimana titik a dan b berbeda. Jika kedua titik a dan b berada di H_x dan untuk setiap x di $V(P_m)$ maka jelas bahwa $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap B_x \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap B_x \neq \emptyset$ akibatnya $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap D \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap D \neq \emptyset$. Sekarang asumsikan bahwa titik a di H_x dan b di H_y dengan titik x dan y di $V(P_m)$ dan titik x dan y berbeda. Terdapat dua titik yang berbeda di u di B_x dan v di B_y sehingga $ua, ub \in E(P_m \rhd_o H)$ tetapi $ub, va \notin E(P_m \rhd_o H)$. Akibatnya $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap D \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap D \neq \emptyset$.

Menurut lemma 4.1 dan 4.3 di atas, mengandung beberapa akibat yang berbeda di bawah ini.

Akibat 4.2. Misalkan P_m dan H adalah graf terhubung dengan orde paling sedikit 3 titik. Maka $|V(P_m)| \cdot (\lambda(H) - 1) \leq \lambda(P_m \rhd_o H) \leq |V(P_m)| \cdot \lambda(H)$.

Akibat 4.3. Misalkan W adalah dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana $|W| = \lambda(P_m \rhd_o H)$. Untuk setiap x di $V(P_m)$ dan $W_x = W \cap H_x$. Maka $|W_x| = \lambda(H) - 1$ atau $|W_x| = \lambda(H)$.

Misalkan $o \in V(H)$ merupakan titik salinan. Misalkan W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana $|W| = \lambda(P_m \rhd_o H)$. Berdasarkan akibat 4.3, untuk setiap titik x di $V(P_m)$, dan himpunan $W_x = W \cap H_x$ memenuhi $|W_x| = \lambda(H) - 1$ atau $|W_x| = \lambda(H)$. Kami mendefenisikan

$$T^+ = \{x \in V(P_m) | |W_x| = \lambda(H)\} \quad (1)$$

Dan

$$T^- = \{x \in V(P_m) | |W_x| = \lambda(H) - 1\} \quad (2)$$

Menunjukkan bahwa $T^+ \cap T^- = \emptyset$ dan $T^+ \cup T^- = V(P_m)$. Oleh karena itu, kita memperoleh beberapa lema berikut ini.

Lemma 4.4. Misalkan W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana $|W| = \lambda(P_m \rhd_o H)$. Maka $|W| = |T^+| \cdot \lambda(H) + |T^-| \cdot (\lambda(H) - 1)$.

Bukti. Karena W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ maka berdasarkan akibat 4.1, Lemma 4.2, dan akibat 4.3 diatas, maka banyaknya W_x yang memuat $\lambda(H) - 1$ titik adalah $|T^-| \cdot (\lambda(H) - 1)$ dan banyaknya W_x yang memuat $\lambda(H)$ titik adalah $|T^+| \cdot \lambda(H)$. Akibatnya $|W| = |T^+| \cdot \lambda(H) + |T^-| \cdot (\lambda(H) - 1)$.

Kami akan mengkarakterisasikan graf H berdasarkan titik salinan. Misalkan o di $V(H)$ adalah titik salinan sehingga graf H memiliki tipe sebagai berikut,

1. Tipe $\mathcal{A}_o$ jika terdapat himpunan dominasi-lokasi D dari H selain titik salinan o dengan $\lambda(H) - 1$ titik dan terdapat titik v di $V(H)$ selain titik salinan o sehingga $\emptyset \neq N_H(o) \cap D = N_H(v) \cap D \neq \emptyset$.
2. Tipe $\mathcal{B}_o$ jika H bukan tipe $\mathcal{A}_o$

Berdasarkan karakteristik graf H diatas maka setiap himpunan dominasi-lokasi D dari H selain titik salinan o di $V(H)$ pada tipe $\mathcal{B}_o$ mengandung paling sedikit $\lambda(H)$ titik. Perhatikan tipe pada H yang merupakan dasar untum memilih titik salinan yaitu o. Sebagai contoh, misalkan H dengan titik salinan o di $V(H)$ adalah tipe $\mathcal{A}_o$. Jika kita memilih selain titik salinan sebutlah titik a di H selain o maka tipe H adalah $\mathcal{A}_o$ atau $\mathcal{B}_o$.

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 1, No. 2, November, 2022
ISSN: 2830-3695

Sekarang kami akan mencari batas bawah dari $\lambda(P_m \rhd_o H)$ dari kedua tipe diatas.

Lemma 4.5. Untuk $m \geq 3$, misalkan P_m dan H adalah graf terhubung. Jika H adalah tipe $\mathcal{A}_o$. Maka untuk setiap titik $o \in V(H)$ sehingga $\lambda(P_m \rhd_o H) \geq \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1)$.

Bukti. Mengigat himpunan $|T^+|$ dan $|T^-|$ yang telah didefenisikan pada bagian (1) dan (2). Misalkan $X = G_o \cap W$. Berdasarkan Lemma 4.1, untuk setiap titik x di $V(P_m)$ maka$W_x \neq \emptyset$ dan $\lambda(W_x) = \lambda(H) - 1$. Berdasarkan akibat 4.1, maka (x, o) tidak berada di W_x. Dengan demikian $T^- \cap W = \emptyset$ dan himpunan X seharusnya bagian dari T^-. Selain itu juga, pada lemma 4.2. membuktikan bahwa untuk setiap x di T^- maka $N_{P_m \rhd_o H}((x, o)) \cap X \neq \emptyset$. Berakibat $N_{P_m \rhd_o H}((x, o)) \cap T^+ \neq \emptyset$. Perhatikan tipe H, karena H adalah tipe $\mathcal{A}_o$, maka T^+ seharusnya titik dominasi dari G_o sedemikian sehingga $|T^+| = \gamma(P_m)$. Berdasarkan Lemma 4.4, maka

$$\begin{aligned}
|W| &= |T^+| \cdot \lambda(H) + |T^-| \cdot (\lambda(H) - 1) \\
&= |T^+| \cdot \lambda(H) + (|V(P_m)| - |T^+|) \cdot (\lambda(H) - 1) \\
&= |T^+| + |V(P_m)| \cdot (\lambda(H) - 1) \\
&\geq \gamma(P_m) + |V(P_m)| \cdot (\lambda(H) - 1).
\end{aligned}$$

Sekarang, kita akan mencari bilangan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dengan orde $m \geq 3$ dimana graf P_m dan H terhubung dan titik salinan o di $V(H)$.

Teorema 4.1. Untuk $m \geq 3$, misalkan P_m dan H adalah graf terhubung dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka

$$\lambda(P_m \rhd_o H) = \begin{cases} \gamma(P_m) + |V(P_m)| \cdot (\lambda(H) - 1) & \text{Jika } H \text{ adalah tipe } \mathcal{A}_o \\ |V(P_m)| \cdot \lambda(H) & \text{Jika } H \text{ adalah tipe } \mathcal{B}_o \end{cases}$$

Bukti. Misalkan P_m dan H adalah graf terhubung dan tidak tervial dengan orde $m \geq 3$. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Akan ditunjukkan masing-masing kasus sebagai berikut.

Kasus 1. Jika H adalah tipe $\mathcal{A}_o$. Maka berdasarkan Lemma 4.5. $\lambda(P_m \rhd_o H) \geq \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1)$. Oleh karena itu, kami tinggal membuktikan batas atas bilangan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ yaitu $\lambda(P_m \rhd_o H) \leq \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1)$. Ambil sembarang x di $V(P_m)$. Kami mendefenisikan $D_x = \{(x, u) | u \in D\}$. Misalkan $X \subseteq V(P_m)$ adalah himpunan dominasi-lokasi dari P_m dengan $\gamma(P_m)$ titik. Kami juga mendefinisikan $X_o = \{(a, o) | a \in X\}$. Misalkan $S = X_o \cup_{x \in V(P_m)} D_x$. Untuk menunjukkan $(P_m \rhd_o H) \leq \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1)$ cukup dengan membuktikan bahwa S adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$. Misalkan titik a dan b di $V(P_m \rhd_o H) \setminus S$ dimana $a \neq b$.

- $a, b \in H_x$
  Jika $a, b \in H_x \setminus \{(x, o)\}$ maka selesai karena $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap D_x \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap D_x \neq \emptyset$. Jika $a = (x, o)$ maka a adalah hanya titik di H_x yang bertetangga dengan semua titik di X_o. Akibatnya $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap S \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap S \neq \emptyset$.
- $a \in H_x$ dan $b \in H_x$ untuk setiap $x, y \in V(P_m)$ dan $x \neq y$
  Perhatikan kedua kasus berikut ini.
  1. $a \in H_x \setminus \{(x, o)\}$ dan $b \in H_x \setminus \{(y, o)\}$
     Maka terdapat titik $u \in D_x$ dan $v \in D_y$ sehingga $au, bv \in E(P_m \rhd_o H)$ tetapi $av, bu \notin E(P_m \rhd_o H)$.
  2. $a = (x, o)$ atau $b = (y, o)$
     Jika H adalah tipe $\mathcal{A}_0$ maka terdapat titik $u \in D_x$ dan $v \in D_y$ sehingga $au, bv \in E(P_m \rhd_o H)$ tetapi $av, bu \notin E(P_m \rhd_o H)$.

Berdasarkan kedua kasus diatas, akibatnya $\emptyset \neq N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap S \neq N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap S \neq \emptyset$.

Kasus 2. Jika H adalah tipe $\mathcal{B}_o$. Berdasarkan akibat 4.2, kami hanya menunjukkan bahwa $\lambda(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot \lambda(H)$. Berdasarkan defenisi (1) dan (2) pada himpunan T^+ dan T^-. Misalkan D adalah himpunan dominasi-lokasi dari $H \setminus \{o\}$. Maka $|D| \geq \lambda(H)$. Misalkan W adalah himpunan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dan $W_x = W \cap H_x$. Karena Hadalah tipe $\mathcal{B}_o$, berdasarkan akibat 4.3, maka $|W_x| \geq |D| = \lambda(H)$ untuk setiap x di $V(P_m)$. Kemudian $|T^-| = 0$. Berdasarkan Lemma 4.4, maka $|W| \geq |V(P_m)| \cdot \lambda(H)$.

Teorema 4.2. Untuk $m, n \geq 3$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-1)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot (n-2)$.

Bukti. Berdasarkan Lemma 4.4, H adalah graf $(n-1)$ −reguler yang tergolong tipe $\mathcal{A}_o$ dikarenakan terdapat dua titik yang berbeda yang memiliki ketertanggan yang sama terhadap W dan tak kosong. Maka berdasarkan penelitian I.M. Pelaya tahun 2012 menyatakan bahwa $\lambda(H) = n-1$ titik dan graf lintasan P_m adalah $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Maka berdasarkan teorema 4.1, $\lambda(P_m \rhd_o H) = \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + \mathrm{m} \cdot \big((n-1) - 1\big) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + \mathrm{m} \cdot (n-2)$.

Teorema 4.3. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 6$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-2)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.

Bukti. Berdasarkan Lemma 4.4, H adalah graf $(n-2)$ −reguler yang tergolong tipe $\mathcal{A}_o$ dikarenakan terdapat dua titik yang berbeda yang memiliki ketertanggan yang sama terhadap W dan tak kosong. maka berdasarkan penelitian Anuwar Kadir dan Suhadi W Saputro tahun 2021 menyatakan bahwa $\lambda(H) = \frac{n}{2}$ titik dan menurut I.M. Pelayo tahun 2012, graf lintasan P_m adalah $\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Maka berdasarkan teorema 4.1, $\lambda(P_m \rhd_o H) = \gamma(P_m) + |V(G)| \cdot (\lambda(H) - 1) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + \mathrm{m} \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right) - 1\right) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + \mathrm{m} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.

Teorema 4.4. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 5$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-3)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\lambda(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$.

Bukti. Berdasarkan Lemma 4.4, H adalah graf $(n-2)$ −reguler yang tergolong tipe $\mathcal{B}_o$ dikarenakan dikarenakan terdapat dua titik yang berbeda tidak memiliki ketertanggan yang sama terhadap W dan tak kosong. Maka berdasarkan penelitian Anuwar Kadir dan Suhadi W Saputro tahun 2021 menyatakan bahwa $\lambda(H) = \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$ titik. Maka berdasarkan teorema 4.1, $\lambda(P_m \rhd_o H) = |V(G)| \cdot \lambda(H) = \mathrm{m} \cdot \left(\left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil\right) = \mathrm{m} \cdot \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$.

D. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitia yang telah dilakukan oleh peneliti mengenai bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf Lintasan terhadap beberapa graf Reguler dengan orde n, maka dalam penelitian ini diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Bilangan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana H adalah $(n-1)$ −reguler dengan masing-masing ordenya $n, m \geq 3$ maka hasil dari bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf lintasan terhadap graf regular $(P_m \rhd_o H)$ adalah $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot (n-2)$.
2. Bilangan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana H adalah $(n-2)$ −reguler dengan masing-masing ordenya $m \geq 3$ dan $n \geq 6$ maka hasil dari bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf lintasan terhadap graf regular $(P_m \rhd_o H)$ adalah $\lambda(P_m \rhd_o H) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.
3. Bilangan dominasi-lokasi dari $P_m \rhd_o H$ dimana H adalah $(n-3)$ −reguler dengan masing-masing ordenya $m \geq 2$ dan $n \geq 5$ maka hasil dari bilangan dominasi-lokasi hasil kali sisir graf lintasan terhadap graf regular $(P_m \rhd_o H)$ adalah $\lambda(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$.

E. Daftar Pustaka

AKA Gafur, Dan A. W. Bustan (2019). "Mengidentifikasi Bilangan Dominasi Lokasi Pada Graf Bintang Kipas". *the original of mathematics*, Program Studi Matematika, Fakultas FMIPA, Universitas Pasifik Morotai. Media,neliti, 3-8.

A Kadir A Gafur, S W Saputro, On locating-dominating set of regular graph, Journal of mathematics, volume 2021, 6 pages, doi.org/10.1155/2021/8147514

Ignacio M Pelayo, Locating-dominating in graphs, preprint.

J. Caceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, Locating-dominating codes : Bound and extremal cardianities, *arXiv:1025.2177v1* [math.CO] 10 Mey 2012.

G. Chartrand, L. Eroh, M. Johnson, dan O. R. Ollerman, resolvabililty in graph and Metric dimension of graph., *Discrete Appl.* **105**, (2000), 99-113.

G. Chartrand, dan P. Zhang, The theory and applications of resolvability in graphs; a survey, **160** (2003), 47-68.

C. Chen, C. Lu, Identifying codes and locating-dominating sets on paths and cycles, *arXiv:0908.2750v1* [math.CO] 19 Agu 2009.

F. Harary dan R. A. melter, On the metric dimension of graph, *Ars Combin.,* 2 (1976), 191-195.

T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, dan P. J. Salter, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

R. Jayagopal, R. Sundara Rajan, Indra Rajasingh, Tigh lower bound for locating-total dominating number, *Internasional Jurnal of Pure and Applied Mathematics,* **101** (2015), 661-668.

S. Khuller, B. Raghavachari, dan A. Rosenfeld, Landmarks in graphs, Discrete Appl. Math., **70** (1996), 217-229.

P. J. Salter, Leaves of trees, *Congres. Number.,* **14** (1975), 549559: