AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

PEMODELAN PENULARAN PENYAKIT HEPATITIS MENGGUNAKAN MODEL SEIR

Elisabet Bormasa[1], D. L. Rahakbauw[2], D. Patty [3*]

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pattimura
Email korespondensi*: pattydyana@gmail.com

Abstrak

Penyakit hepatitis merupakan suatu proses peradangan pada jaringan hati dan tergolong penyakit menular. Penelitian ini bertujuan memodelkan penyakit hepatitis menggunakan model SEIR. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka dan simulasi. Data yang digunakan adalah data penderita penyakit hepatitis pada RSUD Dr. M. Haulussy Ambon tahun 2019. Pemodelan matematika model SEIR menggambarkan pola penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* atau subpopulasi yang berpotensi terinfeksi penyakit menjadi *exposed* atau subpopulasi yang memperlihatkan gejala ditulari penyakit melalui kontak langsung dengan individu *infected* atau subpopulasi yang telah terinfeksi penyakit. Individu *infected* yang dapat bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered* atau subpopulasi yang telah sembuh. Selanjutnya dari model yang dibangun dan simulasi MATLAB diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik $E = (S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{ba}{g}, \frac{a}{g}, \frac{ca}{g}, \frac{ea}{g}\right)$ dan titik kesetimbangan bebas penyakit $E = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{a\mu\alpha + a\mu^2}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, \frac{\beta a\mu}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, 0, \frac{a\alpha\beta}{\mu v\beta + \mu v a + \mu^2 v + \mu\alpha\beta + \mu^2\beta + \mu^2\alpha + \mu^3}\right)$. Dari penelitian ini, dapat dikembangkan model matematika untuk masalah lainnya.

Kata kunci: hepatitis, endemik, model SEIR.

Sejarah artikel

Diterima: 03-08-2022
Direvisi: 15-08-2022
Dipublikasikan: 01-11-2022

Abstract

Hepatitis is an inflammatory process in the liver tissue and is classified as an infectious disease. This study aims to model hepatitis disease using the SEIR model. The research method used is a literature study and simulation method. The data used is data on patients with hepatitis at RSUD Dr. M. Haulussy Ambon 2019. The mathematical modeling of the SEIR model describes the pattern of disease spread from groups of susceptible individuals or subpopulations that have the potential to be infected with the disease to become exposed or subpopulations that show symptoms of being infected with the disease through direct contact with infected individuals or subpopulations that have been infected with the disease. Infected individuals who can survive the disease will recover and enter the recovered group or subpopulation that has recovered. Furthermore, from the built model and MATLAB simulation, two equilibrium points are obtained, namely the endemic equilibrium point $E =$

Article history

Received: 03-08-2022
Revised: 15-08-2022
Published: 01-11-2022

$(S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{ba}{g}, \frac{a}{g}, \frac{ca}{g}, \frac{ea}{g}\right)$ and the disease-free equilibrium point $E = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{a\mu\alpha + a\mu^2}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, \frac{\beta a\mu}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, 0, \frac{a\alpha\beta}{\mu v\beta + \mu v a + \mu^2 v + \mu\alpha\beta + \mu^2\beta + \mu^2\alpha + \mu^3}\right)$. From this research, mathematical models can be developed for other problems.

Keywords: *hepatitis, endemic, SEIR model*

A. Pendahuluan

Penyakit hepatitis merupakan suatu proses peradangan pada jaringan hati yang tergolong penyakit menular. Secara popular dikenal juga dengan istilah penyakit hati, sakit liver atau sakit kuning, hepatitis dapat disebabkan oleh berbagai macam penyebab seperti virus, bakteri, parasit, jamur, obat-obatan, bahan kimia, alkohol, cacing, gizi buruk, dan bahkan autoimun. Penyakit hepatitis terbanyak disebabkan oleh virus hepatitis masih merupakan penyakit endemis di indonesia. Sebagian besar virus hepatitis disebabkan oleh infeksi virus hepatitis A, B, C, D, E (Papuangan, 2018).

Berdasarkan laporan WHO (Word Health Organitation) tahun 2013 terdapat 2 miliar penduduk di dunia menderita penyakit hepatitis, 240 juta orang menderita penyakit hepatitis B kronik dan 1,46 juta diantaranya mengalami kematian. Kematian penyakit ini sebanding dengan kematian HIV yaitu 1,3 juta kematian, TBC 1,2 juta kematian dan malaria 0,5 juta kematian. Namun, penyakit hepatitis belum mendapatkan perhatian serius seperti ketiga penyakit tersebut (Al, 2016).

Salah satu cara untuk menganalisis penyebaran virus hepatitis adalah melalui model matematika. Model matematika adalah suatu representasi yang menggunakan simbol matematika yang digunakan untuk mempelajari sistem atau fenomena dunia nyata tertentu. Model matematika dapat berupa berbagai macam yaitu persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan linier maupun non linier.

Dalam beberapa dekade terakhir telah banyak dikembangkan model matematika yang menjelaskan dinamika penyakit menular yang biasa disebut model epidemik, pada model epidemik, umumnya populasi dibagi menjadi beberapa kelas yang berbeda. Salah satu model matematika yang termasuk dalam kategori adalah model SIR yang membagi populasi menjadi kelompok individu rentan terhadap infeksi suatu penyakit (Susceptible), kelompok individu terinfeksi (Infective), dan kelompok individu sembuh dari infeksi (Recovered).

Epidemik merupakan suatu keadaan dimana berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang meleihi perkiraan kejadian normal dalam periode yang singkat. Model epidemik SEIR merupakan model penyebaran penyakit menular yang terjadi pada kelompok-kelompok individu yang berbeda, yaitu kelas rentan, ekspos, terinfeksi, dan bebas penyakit. Kelas S (susceptible) digunakan untuk mewakili individu-individu yang rentan terhadap infeksi virus, kemudian kelas I (infectious) digunakan untuk mewakili individu-individu yang telah terinfeksi dan mampu menularkan atau menyebarkan penyakit ke individu pada populasi rentan, untuk kelas R (recovered) digunakan untuk mewakili individu-individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan permanen yang artinya individu tersebut tidak akan terinfeksi lagi untuk jenis penykit yang sama. Pada model-model epidemik yang memperhatikan adanya periode laten (masa inkubasi) seperti model SEIR, terdapat kelas E (exposed) yang digunakan untuk mewakili individu-individu yang baru terinfeksi dan memasuki periode laten. Periode laten adalah selang waktu dimana suatu individu terinfeksi sampai munculnya penyakit. Adanya periode laten ini yang menjadi alasan pembentukan model epidemik SEIR, yakni munculnya kelas exposed (Putra, 2016).

B. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, data yang akan digunakan yaitu data pasien penderita penyakit hepatitis, yaitu data sekunder yang bersumber dari RSUD Dr. M. Haulussy Ambon pada tahun 2019. Jumlah populasi dalam penelitian ini adalah sebanyak 48 pasien. Untuk mengetahui sampel penelitian digunakan perhitungan menggunakan model matematika SEIR.

Adapun tahapan dalam penelitin ini adalah sebagai berikut:

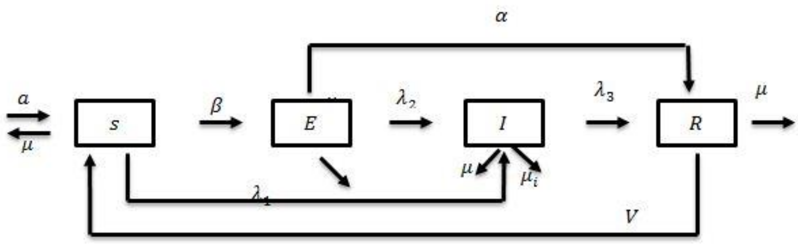
1. Penelitian ini dimulai dengan mengambil data pasien penderita hepatitis tahun 2019 yang diperoleh dari rekam medis RSUD Dr M Haulussy Ambon.
2. Membentuk model SEIR dari variabel dan parameter yang digunakan.
3. Menentukan titik kesetimbangan model, titik kesetimbangan endemik, dan titik kesetimbangan bebas penyakit pada model SEIR.
4. Menganalisis kestabilan model SEIR.
5. Melakukan simulasi numerik menggunakan aplikasi Matlab pada model berdasarkan parameter data yang diperoleh.
6. Menarik kesimpulan.

C. Hasil Dan Pembahasan

C.1 Model Matematika

Model Matematika yang akan dianalisis dan disimulasikan pada penelitian ini adalah model matematika SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, dan Recovered).

Berikut diagram alir model matematika SEIR



Gambar 1. Model SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, dan Recovered)

Berdasarkan formulasi model di atas model matematika yang terbentuk untuk penyakit hepatitis adalah

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 1, No. 2, November, 2022
ISSN: 2830-3695

$$\frac{dS}{dt} = a + vR - (\beta + \lambda_1 + \mu)S$$
$$\frac{dE}{dt} = \beta S - (\alpha + \lambda_2 + \mu)E$$
$$\frac{dI}{dt} = \lambda_1 S + \lambda_2 E - (\lambda_3 + \mu + \mu i)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \alpha E + \lambda_3 I - (v + \mu)R$$

C.2 Titik Kesetimbangan Model Matematika

Titik kesetimbangan yang akan dianalisis adalah titik kesetimbangan endemik $E = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ dan titik kesetimbangan bebas penyakit $E = (S^0, E^0, I^0, R^0)$

C.2.1 Titik Kesetimbangan Endemik

Dengan menggunakan persamaan kedua pada sistem persamaan maka diperoleh:

$$E = (S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{ba}{g}, \frac{a}{g}, \frac{ca}{g}, \frac{ea}{g}\right)$$

Dengan

$g = (\beta + \lambda_1 + \mu)b - ve$

C.2.2 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kondisi bebas penyakit pada model ini adalah kondisi dimana belum ada individu yang terinfeksi atau mulai menunjukan gelaja, sehingga nilai parameter $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$,, dan $\lambda_3 = 0$ ke persamaan

$$\lambda_1 S + \lambda_2 E - (\lambda_3 + \mu + \mu i)I = 0$$

maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$E = (S^0, E^0, I^0, R^0)$$
$$= \left(\frac{a\mu\alpha + a\mu^2}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, \frac{\beta a\mu}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, 0, \frac{a\alpha\beta}{\mu v\beta + \mu va + \mu^2 v + \mu\alpha\beta + \mu^2\beta + \mu^2\alpha + \mu^3}\right)$$

C.3 Analisis Kestabilan Model SEIR

Berdasarkan model pada persamaan (4.1) maka

$$\frac{dS}{dt} = f_1 = a + vR - (\beta + \lambda_1 + \mu)S$$
$$\frac{dE}{dt} = f_2 = \beta S - (\alpha + \lambda_2 + \mu)E$$
$$\frac{dI}{dt} = f_3 = \lambda_1 S + \lambda_2 E - (\lambda_3 + \mu + \mu i)I$$

$$\frac{dR}{dt} = f_4 = \alpha E + \lambda_3 I - (v+\mu)R$$

Dengan menggunakan matriks jacobian maka

$$Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 & 0 & 0 & v \\ \beta & -r_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -r_3 & 0 \\ 0 & \alpha & \lambda_3 & -r_4 \end{bmatrix}$$

Dengan

$r_1 = \beta + \lambda_1 + \mu$

$r_2 = \alpha + \lambda_2 + \mu$

$r_3 = \lambda_3 + \mu + \mu i$

$r_4 = v + \mu$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Jf(\hat{x})$

$$|\lambda I - Jf(\hat{x})| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r_1 & 0 & 0 & v \\ \beta & -r_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -r_3 & 0 \\ 0 & \alpha & \lambda_3 & -r_4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda + r_1 & 0 & 0 & -v \\ -\beta & \lambda + r_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda + r_3 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\lambda_3 & \lambda + r_4 \end{bmatrix} \right|$$

Sehingga

$k_1 = r_4 + r_3 + r_2 + r_1$

$k_2 = r_4 r_3 + r_4 r_2 + r_4 r_1 + r_3 r_2 + r_3 r_1 + r_2 r_1$

$k_3 = r_4 r_3 r_2 + r_4 r_3 r_1 + r_4 r_2 r_1 + r_3 r_2 r_1$

$k_4 = r_1 r_2 r_3 r_4$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz yang menyatakan bahwa syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif, dan karena k_1, k_2, k_3, k_4 dan k_5 adalah positif maka kondisi dari model adalah stabil.

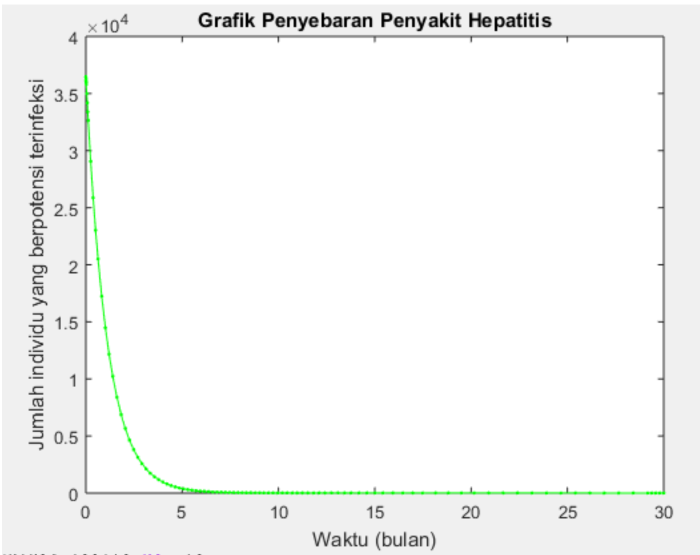
C.4 Simulasi Model Matematika

Simulasi model matematika dilakukan dengan menggunakan program matlab dengan kondisi awal masing-masing subpopulasi dan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai Parameter dan Nilai Awal Subpopulasi

Variabel	Keterangan	Nilai
S	Subpopulasi individu yang berpotensi terinfeksi	36476
E	Subpopulasi individu yang memperlihatkan gejala ditulari	3323
I	Subpopulasi individu yang telah terinfeksi	48
R	Subppulasi individu yang sembuh	37

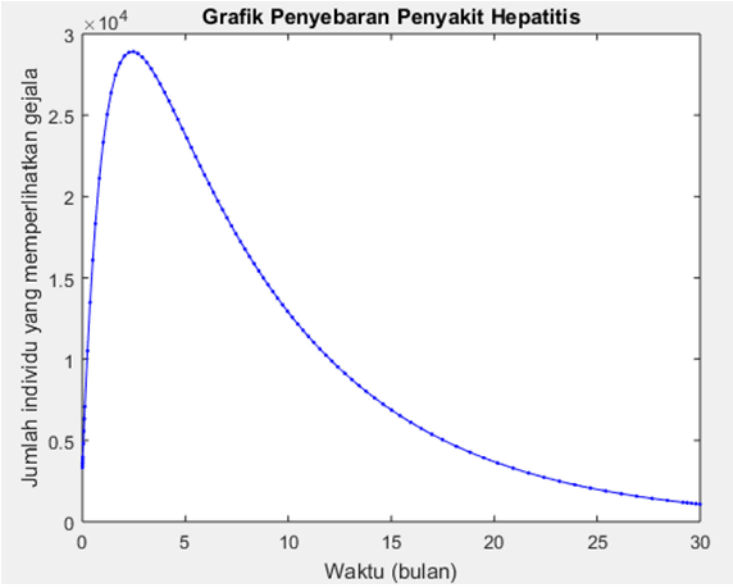
Parameter	Keterangan	Nilai
a	Laju kelahiran	0.021
v	Laju individu yang kebal karena vaksin	0.083
a	Lamanya perawatan	0.00092
β	Laju penularan penyakit	0.91
λ_1	Laju infeksi individu yang rentan tanpa vaksin	0.0012
λ_2	Laju penyakit bawaan pada individu yang rentan tanpa vaksin	0.00092
λ_3	Laju kesembuhan individu yang terinfeksi setelah dirawat dan diberi pengobatan dokter	0.00092
μ	Laju kematian alami	0.00012
μi	Laju kematian akibat infeksi	0.125



Gambar 2. Grafik subpopulasi individu yang berpotensi terinfeksi

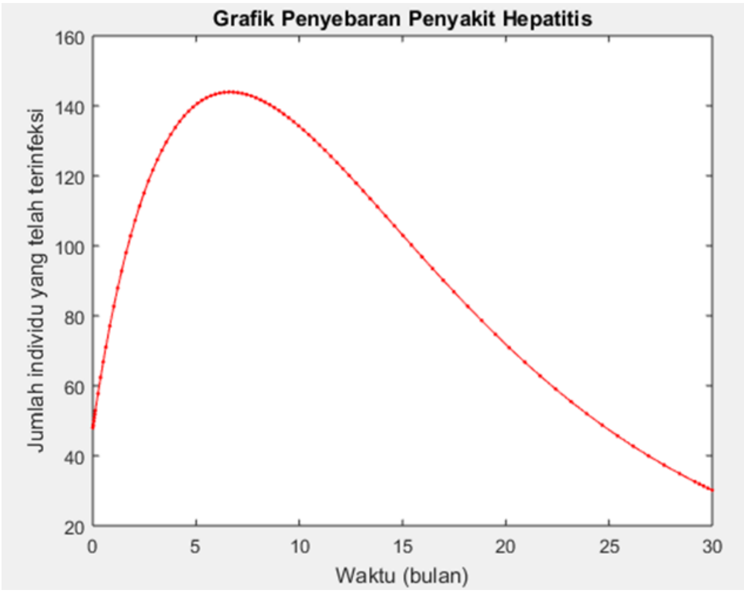
Subpopulsi individu yang berpotensi terinfeksi sudah meningkat pada bulan awal, setelah itu baru mengalami penurunan hingga pada 10 bulan awal subpopulasi ini sudah mencapai nol.

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 1, No. 2, November, 2022
ISSN: 2830-3695



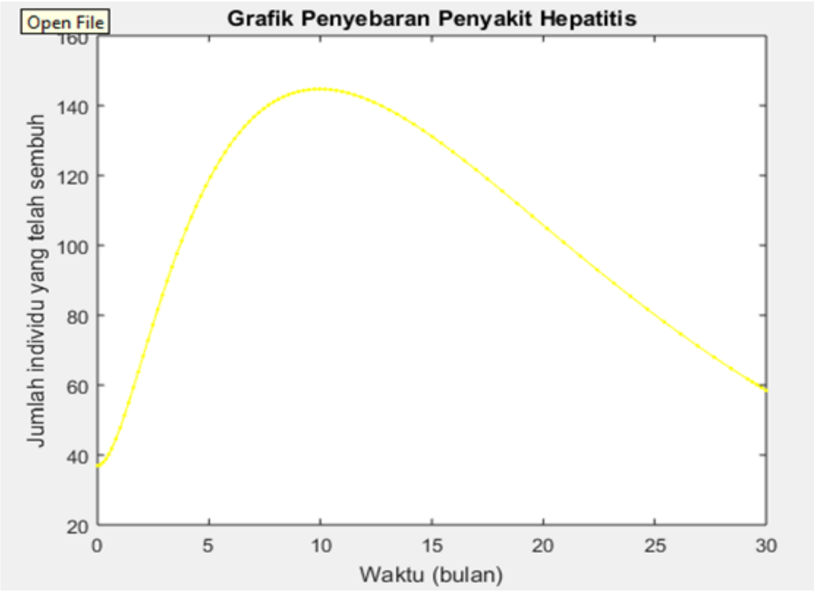
Gambar 3. Grafik subpopulasi individu yang memperlihakan gejala

Subpopulasi individu yang memperlihatkan gejala terinfeksi pada bulan ke 4 sudah mengalami peningkatan dan setelah itu perlahan mengalami penurunan setiap bulannya hingga pada bulan yang ke 30.



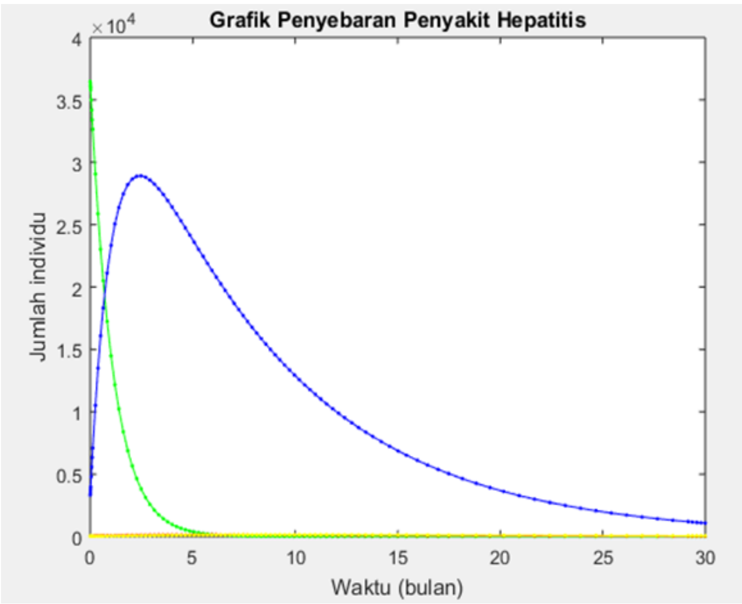
Gambar 4. Grafik subpopulasi individu yang telah terinfeksi

Pada Gambar 4 subpopulasi individu yang telah terinfeksi dapat dilihat bahwa pada bulan ke 7 individu yang terinfeksi mengalami peningkatan yang sangat signifikan setelah itu perlahan mengalami penurunan.



Gambar 5. Grafik subpopulasi individu yang telah sembuh

Dapat dilihat pada Gambar 5 bahwa subpopulasi individu yang telah sembuh pada bulan yang ke 12 mengalami peningkatan yang sangat besar tetapi setelah itu perlahan mengalami penurunan.



Gambar 6. Grafik gabungan dari semua subpopulasi

Dengan ini maka dapat disimpulkan bahwa menurun dan meningkatnya suatu infeksi penyakit dapat disebabkan oleh beberapa hal. Misalnya meningkatnya suatu infeksi penyakit disebabkan karena laju penularan penyakit yang semakin tinggi pada individu karena kekebalan tubuh yang lemah atau individu yang rentan karena tidak melakukan vaksin untuk meningkatkan kekebalan tubuh begitu juga dengan menurunnya suatu penyakit karena individu melakukan vaksin kekebalan atau laju kesembuhan pada individu yang terinfeksi karena individu rutin melakukan pengobatan dengan kata lain lamanya perawatan sangat mempengaruhi seseorang dapat terlepas dari infeksi penyakit. itu mengalami penurunan hingga pada bulan ke 10.

D. Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika penyakit hepatitis dengan empat subpopulasi individu yang berpotensi terinfeksi *susceptible* (S), individu yang memperlihatkan gejala ditulari *exposed* (E), individu yang telah terinfeksi *infected* (I), dan *recovered* (R) yaitu

$$\frac{dS}{dt} = a + vR - (\beta + \lambda_1 + \mu)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S - (\alpha + \lambda_2 + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda_1 S + \lambda_2 E - (\lambda_3 + \mu + \mu i)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha E + \lambda_3 I - (v + \mu)R$$

2. Dari hasil analisis model matematika penyakit hepatitis, diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik

$$E = (S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{ba}{g}, \frac{a}{g}, \frac{ca}{g}, \frac{ea}{g}\right)$$

dan titik keseimbangan bebas penyakit

$$E = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{a\mu\alpha + a\mu^2}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, \frac{\beta a\mu}{\mu^2\beta + \mu^2\alpha - \alpha}, 0, \frac{a\alpha\beta}{\mu v\beta + \mu va + \mu^2 v + \mu\alpha\beta + \mu^2\beta + \mu^2\alpha + \mu^3}\right)$$

3. Dari model matematika sampai pada titik kesetimbangan dapat disimpulkan bahwa dalam tahun 2019 subpopulasi yang memperlihatkan gejala ditulari penyakit hepatitis lebih banyak. Selain itu, subpopulasi yang terinfeksi tidak ada karena langsung dilakukan pencegahan penularan dengan pengobatan dokter.
4. Jenis kestabilan dari model matematika adalah stabil.

D. Ucapan Terima kasih

Kami menyampaikan terima kasih kepada seluruh tim editor untuk masukan yang berarti.

E. Daftar Pustaka

Al, R. (2016). Faktor Resiko Hapatitis B Pada Pasien Di RSUD Dr. Pirngadi Medan. 78.

Fridayanthie, E. W. (2015). Analisis Data Mining Untuk Prediksi Penyakit Hepatitis Dengan Menggunakan Metode Naive Bayes dan Support Vector Machine.

Ishan, H., & Syarifuddin, S. (2021). Pemodelan Matematika SEIRS Pada Penyebaran Penyakit Malaria di Kabupaten Mimika. *Journal of Mathematics, Computations*.

Jannah, M. (2021). Analisis Kestabilan Model SEIR Untuk Penyebaran Covid 19 Dengan Parameter Vaksinasi.

Papuangan, M. (2018). Penerapan Case Based Reasoning Untuk Sistem Diagnosis Penyakit Hepatitis. *Jurnal Informatika dan Komputer*, 7-12.

Putra, R. T. (2016). Model Epidemi SEIR Dengan Insidensi Standar. 73-81.

Sidw, S. (2015). Model SEIR Pada Penularan Hepatitis B. 97-102.

Yudasurata, N. S. (2018). Analisis Dinamik Model SIR Dengan Skema Beda Hingga Tak Standar. 1-11.