All Fields of Science J-LAS
Jurnal Penelitian
Availabel Online: https://j-las.lemkomindo.org/index.php/AFoSJ-LAS/index

Pencocokan Kurva Dengan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Gauss

Curve Matching Using Least Square Method and Gaussian Method

Muhammad Razali[1], Elazhari[2], Khairuddin Tampubolon[3]
[1,2,3]Universitas Pembinaan Masyarakat Indonesia
Corresponding author: khoir.tb@gmail.com

Abstrak

Tidak diragukan bahwa metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode pencocokan kurva (*curve fitting*) yang sangat terkenal dan digunakan untuk tujuan pencocokan kurva, yaitu upaya mendapatkan model matematik terbaik yang menyatakan hubungan antara dua data bivariate (x_i, y_i) dengan prinsip kerja meminimumkan kesalahan estimasi terhadap data asal menggunakan prinsip kalkulus diferensial. Persamaan regresi linier merupakan salah satu produk metode kuadrat terkecil yang sering digunakan dalam statistika. Tulisan ini menurunkan rumus kerja yang disebut persamaan normal yang dihasilkan dari metode kuadrat terkecil dan pencocokan kurva polinomial dengan metode Gauss. Lima buah model sebaran data bivariate diberikan dan penurunan rumus persamaan normal masing-masing model dilakukan dengan metode kuadrat terkecil dan sekumpulan data yang dihampiri dengan polinomial derajat empat menggunakan metode Gauss. Dua dari lima persamaan normal yang dihasilkan diterapkan pada pencocokan kurva data bivariate memperlihatkan bagaimana metode kuadrat terkecil bekerja dalam menemukan model matematik terbaik yang menyatakan hubungan antar variabel dalam data biavariate.

Kata Kunci: Metode kuadrat terkecil, pencocokan kurva, metode Gauss, persamaan normal

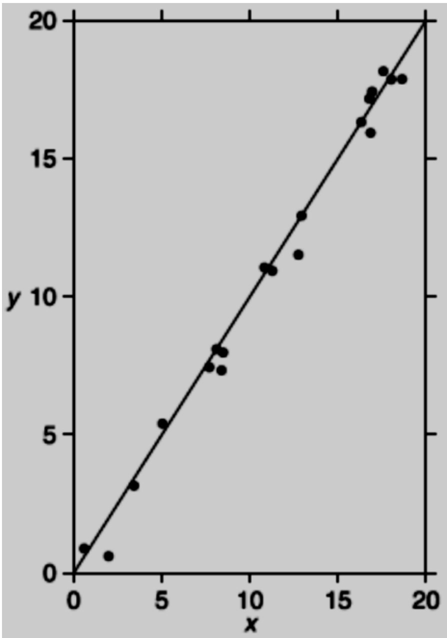
Abstract

There is no doubt that the least squares method is one of the most well-known curve fitting methods and is used for the purpose of curve matching, namely the effort to obtain the best mathematical model which states the relationship between two bivariate data (xi, yi) with the working principle of minimizing estimation errors. against the original data using the principle of differential calculus. The linear regression equation is one of the products of the least squares method which is often used in statistics. This paper derives a working formula called the normal equation resulting from the least squares method and polynomial curve matching with the Gauss method. Five bivariate data distribution models are given and the derivation of the normal equation formula for each model is carried out using the least squares method and the data set is approached with a fourth degree polynomial using the Gauss method. Two of the five resulting normal equations applied to bivariate data curve matching show how the least squares method works in finding the best mathematical model that expresses the relationship between variables in biavariate data.

Keyword: Least squares method, curve matching, Gauss method, normal equations.

PENDAHULUAN

Pembacaan hasil suatu pengujian atau percobaan biasanya selalu memuat berbagai macam kesalahan, karena itu titik-titik yang digambarkan berdasarkan data ini tersebar di tempat di mana seharusnya ia berada. Bila hasil pembacaan data percobaan yang diambil cukup banyak, dapat dianggap bahwa kesalahan yang terjadi di dalamnya bersifat random yang mengakibatkan sebagian harga yang diperoleh sedikit lebih tinggi dari yang semestinya dan sebagian lagi sedikit lebih rendah. Setelah digambarkan titik-titiknya, ditarik grafiknya sebagai garis tengah dari pita sempit yang dibentuk oleh titik-titik itu diantara titik-titik yang digambarkan semula. Untuk selanjutnya garis tersebut digunakan untuk menentukan hubungan antara kedua variabel yang terkait seperti pada gambar 1



Gambar 1. Plot data bivariate (xi, yi)

Semua cara yang melibatkan penggambaran garis lurus terbaik dengan mata seperti dua grafik di atas hanyalah merupakan pendekatan saja dan bergantung kepada selera penggambarnya. Dalam upaya memperkecil garis lurus terbaik berbagai orang mendapatkan berbagai hasil dengan perbedaan yang cukup besar. Metode kuadrat terkecil menentukan garis lurus terbaik sepenuhnya berdasarkan perhitungan dengan menggunakan perangkat data yang diberikan. Bentuk persamaannya harus dipilih sedemikian rupa sehingga jumlah total kuadrat kesalahan estimasi antara titik data dan garis persamaan adalah sekecil mungkin. Komputer dan kalkulator grafik mencari garis terbaik yang menghampiri titik-titik data dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Prinsipnya adalah meminimumkan jumlah kuadrat dari jarak vertikal (ordinat) antara titik data dan garis estimasi terbaik untuk kumpulan data yang diberikan. Berikut ini dipaparkan prinsip kerja metode kuadrat terkecil untuk menghasilkan persamaan normal yang digunakan untuk curve fitting data bivariate yang mengikuti model-model berikut: model garis lurus, model kuadratik, kuadratik resiprokal, model hiperbola tegak dan logaritma natural.

METODE PENELITIAN

Bagian ini memaparkan penurunan rumus persamaan normal pencocokan kurva menggunakan prinsip metode kuadrat terkecil. untuk model-model sebaran data bivariate yang sering muncul dalam percobaan atau penelitian. Lima model sebaran data bivariate ditentukan rumus persamaan normalnya dengan pendekatan metode kuadrat terkecil, yaitu model garis lurus, model kuadratik, model kuadratik resiprokal, model hiperbola tegak dan model logaritma. Untuk pencocokan kurva dengan metode Gauss, permasalahan dibatasi hanya pada penentuan grafik fungsi polinomial derajat (n – 1) dengan sekumpulan n buah titik data yang dianggap dilewati oleh kurva polinomial derajat (n – 1)

a) Pencocokan kurva garis lurus

Prinsip metode kuadrat terkecil yang bekerja pada pencocokan kurva garis lurus diuraikan sebagai berikut. Diberikan pasangan data di mana i = 1, 2, ..., n. Garis lurus yang menghampiri kumpulan titik-titik data adalah dan misalkan S menyatakan jumlah kuadrat dari selisih jarak vertikal (ordinat) antara titik data dan garis untuk kumpulan data yang diberikan, yaitu

S = $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ = $\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$. Nilai-nilai dari *a* dan *b* dalam S keduanya meminimumkan jumlah kuadrat S. Memanfaatkan kalkulus, ini berarti

$\frac{\partial S}{\partial a}=0$ dan $\frac{\partial S}{\partial a}=0$

Dari S = $\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$ maka:

untuk $\frac{\partial S}{\partial a}$,

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-a-bx_i)(-1)=0$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}a-\sum_{i=1}^{n}bx_i=0$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i-na-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$na+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i \quad \ldots\ldots\ldots(i)$$

dan untuk $\frac{\partial S}{\partial b}$,

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - ax_i - bx_i^2) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - ax_i - bx_i^2) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} bx_i^2 = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{…….. } (ii)$$

Persaman *(i)* dan *(ii)* secara serentak disebut persamaan normal yang memberi taksiran bagi nilai *a* dan *b*, seperti berikut ini

$$\left.\begin{aligned} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}\right\}$$

Nilai-nilai numerik $\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

diperoleh dari pasangan data (x_i, y_i) dan disubstitusikan ke persamaan normal untuk memperoleh nilai-nilai *a* dan *b*. Ekspresi *a* dan *b* disebut estimasi kuadrat terkecil dan garis persamaan lurus yang dihasilkannya

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

disebut persamaan regresi kuadrat terkecil. Oleh karena itu untuk suatu nilai tertentu x, yaitu x_i , maka nilai prediksi untuk y_i yang berpasangan dengan x_i, diestimasi dengan baik oleh $\hat{y}_i$ dengan garis regresi kuadrat terkecil $\hat{y}_i = a + bx_i$

b) Pencocokan kurva model kuadratik

Pendekatan metode kuadrat terkecil untuk pencocokan kurva dari model kuadratik dengan bentuk umum berikut:

$$y = ax^2 + b$$

dengan *a* dan *b* adalah konstanta-konstanta yang akan dihampiri nilai-nilainya dengan metode kuadrat terkecil yang menghasilkan rumus kerja untuk mendapatkan kedua nilai konstanta ini. Prosedurnya sebagai berikut:

S = $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax^2 - b)^2$. Nilai-nilai dari *a* dan *b* dalam S keduanya meminimumkan jumlah kuadrat S. Memanfaatkan kalkulus, ini berarti

$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ dan $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$

Dari S = $\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - b)^2$ maka:

untuk $\frac{\partial S}{\partial a}$,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - b)(-x_i^2) = 0$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - b) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^2) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \quad \ldots\ldots\ldots(iii)$$

dan untuk $\frac{\partial S}{\partial b}$,

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - b)(-1) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - b) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b = 0$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \ldots\ldots (iv)$$

Persaman *(iii)* dan *(iv)* secara serentak disebut persamaan normal bagi model kuadratik $y = ax^2 + b$ yang memberi taksiran bagi nilai *a* dan *b*:

$$\left.\begin{array}{l} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\}$$

Bila data yang akan ditentukan pencocokan kurva nya dengan model kuadratik yang berbentuk

$y = ax^2 + bx + c$, maka metode kuadrat terkecil akan membangkitkan tiga buah persamaan simultan dengan tiga nilai *a, b* dan *c* yang akan ditentukan nilai-nilainya melalui persamaan normal yang dihasilkan.

c) Pencocokan kurva model kuadratik resiprokal

Sebaran data *bivariate* (x_i, y_i) yang berhubungan satu dengan lainnya dalam bentuk kuadratik resiprokal mengikuti bentuk umum berikut:

$$y = a + \frac{b}{x^2}$$

Dengan prosedur yang sama, pendekatan metode kuadrat terkecil pada model ini akan menghasilkan dua buah persamaan normal yang akan menentukan hampiran bagi nilai-nilai *a* dan *b*. Persamaan normal yang dihasilkan adalah:

$$\left.\begin{aligned} na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x^2} &= \sum_{i=}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^4} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2} \end{aligned}\right\}$$

d) Pencocokan kurva model hiperbola tegak

Untuk model hiperbola tegak $xy = c$ dengan *c* konstanta, model ini ditulis ulang sebagai $y = \frac{c}{x}$.

Selisih ordinat antara sebuah titik data dan kurva adalah $y_i - \frac{c}{x_i}$, sehingga untuk *n* buah pasangan data *bivariate* (x_i, y_i) maka jumlah kuadratnya adalah $S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{c}{x_i}\right)^2$. Turunan parsial $\frac{\partial S}{\partial c}$ =0 menghasilkan persamaan normal pencocokan kurva bagi model hiperbola tegak sebagai berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\left(y_i - \frac{c}{x_i}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} - c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = 0 \quad \ldots..$$

persamaan normal model hiperbola tegak

Dengan terlebih dahulu menentukan nilai $\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}$ dan $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$ dari perangkat data bivariate yang tersedia, maka nilai taksiran *c* dapat diperoleh.

e) Pencocokan kurva model logaritma natural

Jika data bivariate (x_i, y_i) diduga dapat dihubungkan oleh model $y = a\ln x$ dengan *a* konstantayang akan ditentukan nilainya dengan metode kuadrat terkecil, maka persamaan normalnya dapat ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan substitusi variabel $u = \ln x$ sehingga selisih ordinat yang akan diminimumkan adalah:

$S = y_i - a\ln x_i = y_i - au_i$. Akibatnya jumlah kuadrat kesalahan menjadi:

$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - au_i)^2$.

Agar *S* minimum maka turunan parsial

$\frac{\partial S}{\partial a}$ = 0. Persamaan normal yang dihasilkan adalah:

$\sum_{i=1}^{n} u_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$

f) Pencocokan kurva dengan metode Gauss

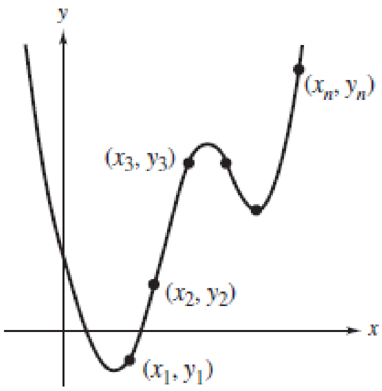
Misalkan sekumpulan data yang dinyatakan oleh *n* buah titik pada bidang *xy*,

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots, (x_n, y_n)$$

dan akan dicari fungsi polinomial derajat (n – 1) :

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$

yang kurvanya melewati kumpulan titik di atas. Prosedur pencocokan kurva polinomial dengan menggunakan metode Gauss terlepas dari proses meminimumkan eror seperti yang dilakukan pada metode kuadrat terkecil. Yang diperlukan hanya pengamatan pada sebaran plot kumpulan titik data, dan dengan melihat berapa banyak titik belok (turning points) yang ditampilkan plot tersebut dapat ditentukan derajat polinomial $p(x)$ sebagai langkah awal untuk memulai metode Gauss. Jika setiap nilai koordinat-*x* dari kumpulan titik (x_i, y_i) adalah berbeda, maka akan terdapat tepat satu fungsi polinomial $p(x)$ derajat n – 1 yang sesuai (*fit*) dengan *n* buah kumpulan titik tesebut, seperti ilustrasi gambar 2 berikut



Gambar 2. Pencocokan kurva polinomial

Proses pencocokan kurvanya dilakukan dengan mencari *n* buah koefisian dari $p(x)$, dengan memasukkan tiap nilai titik (x_i, y_i) ke dalam bentuk umum polinomial itu yang selanjutnya menghasilkan sebuah sistem persamaan linier *n* persamaan dan *n* variabel $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ bebagai berikut,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n \end{aligned}$$

Metode Gauss bekerja dengan cara eliminasi untuk memperoleh nilai-nilai koefisien $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ yang akan menentukan pecocokan kurva dari fungsi polinomial $p(x)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini memaparkan pemakaian persamaan normal untuk pencocokan kurva dengan metoden kuadrat terkecil dan metode Gauss. Komputasi dilakukan dengan Microsoft Excel. Untuk keperluan ilustrasi, hanya dua (dari lima) model yang digunakan yaitu model logaritma natural dan model kuadratik, dengan asumsi bahwa dua kelompok data yang diberikan pada bagian ini tersebar mengikuti model logaritma dan model kuadratik. Pada metode Gauss akan diberikan kumpulan titik yang akan diaproksimasi dengan polinomial derajat empat.

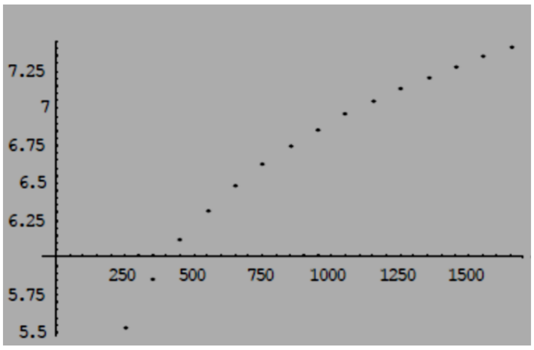
1) Aplikasi pada model logaritma

Diberikan 15 pasang data percobaan (x_i, y_i) pada tabel 1.

Tabel 1. *Data bivariate (* x_i, y_i *) diduga tersebar mengikuti model logaritma* $y = a \ln x$

x_i	250	350	450	550	650
y_i	5.5221	5.8588	6.1191	6.3088	6.4799
x_i	750	850	950	1050	1150
y_i	6.62	6.7463	6.8492	6.9565	7.0476
x_i	1250	1350	1450	1550	1650
y_i	7.1291	7.2081	7.2799	7.3461	7.4084

Diagram pencar (*scatter plot*) data ini diberikan pada gambar 2 dan dari sebarannya diduga bahwa variabel x dan y mengikuti model logaritma natural dengan persamaan $y = a \ln x$.



Gambar 3. *Plot data bivariate (x_i, y_i).*

Nilai konstanta a dihampiri dengan persamaan normal berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$$

dengan $u = \ln x$.

Untuk mendapatkan nilai hampiran yang baik bagi konstanta a pada model logaritma ini, pemakaian persamaan normal $\sum_{i=1}^{n} u_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$

membutuhkan tabel kerja yang memuat nilai-nilai numerik dari $u_i y_i$ dan u_i^2 yang diberikan pada tabel 2.

Tabel 2. *Tabel kerja persamaan normal*

x	y	$u_i = \ln x$	u_i^2	$u_i y_i$
250	5.5221	5.52146	30.4865	30.4901

350	5.8588	5.85793	34.3154	34.3205
450	6.1191	6.10925	37.3229	37.3831
550	6.3088	6.30992	39.8151	39.808
650	6.4799	6.47697	41.9512	41.9701
750	6.62	6.62007	43.8254	43.8249
850	6.7463	6.74524	45.4982	45.5054
950	6.8492	6.85646	47.0111	46.9613
1050	6.9565	6.95655	48.3935	48.3932
1150	7.0476	7.04752	49.6675	49.6681
1250	7.1291	7.1309	50.8497	50.8369
1350	7.2081	7.20786	51.9532	51.955
1450	7.2799	7.27932	52.9885	52.9927
1550	7.3461	7.34601	53.9639	53.9645
1650	7.4084	7.40853	54.8863	54.8854
		$\sum$	682.928	682.959

Nilai-nilai $\sum_{i=1}^{n} u_i^2$ = 682.928 dan $\sum_{i=1}^{n} u_i y_i$ = 682.959 disubstitusikan ke dalam persamaan normal untuk memperoleh nilai konstanta *a*,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$$

682.959 – 682.928 *a* = 0

a = 1.00005 $\approx$ 1

Substitusi balik nilai *a* = 1 ke dalam model dugaan $y = a \ln x$ menghasilkan

$y = 1.00005 \ln x \approx \ln x$

Oleh karena itu, model dugaan pencocokan kurva untuk data bivariate tabel 1 adalah $\hat{y} = \ln x$.

Komparasi nilai numerik antara data

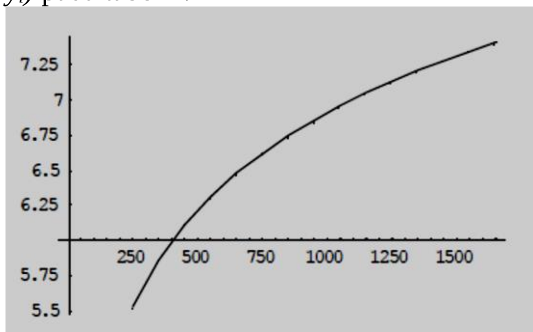
y- percobaan dan data $\hat{y}$ *-dugaan* yang diperoleh dari persamaan hampiran $\hat{y} = \ln x$ bersama *galat* $\varepsilon_i = |y_i - \hat{y}_i|$ diberikan pada tabel 3:

Tabel 3. *Selisih antara data asal dan data pencocokan kurva*

x	y	$\hat{y} = \ln x$	$\varepsilon_i = \|y_i - \hat{y}_i\|$
250	5.5221	5.5215	0.000639
350	5.8588	5.8579	0.000867
450	6.1191	6.1092	0.009852
550	6.3088	6.3099	0.001118
650	6.4799	6.477	0.002928
750	6.62	6.6201	0.000073
850	6.7463	6.7452	0.001064
950	6.8492	6.8565	0.007262
1050	6.9565	6.9565	0.000045
1150	7.0476	7.0475	0.000083
1250	7.1291	7.1309	0.001799

1350	7.2081	7.2079	0.00024
1450	7.2799	7.2793	0.000581
1550	7.3461	7.346	0.000089
1650	7.4084	7.4085	0.000131

Hasil pencocokan kurva kurva $\hat{y} = \ln x$ pada gambar 4 sangat dekat dengan sebaran data asli *(x_i, y_i)* pada tabel 1.



Gambar 4.*Kurva hasil pencocokan kurva data tabel 1.*

Model mana yang tepat diterapkan untuk pencocokan kurva tergantung pada sebaran datanya dan dapat diamati dengan melihat pola diagram pencar data (x_i, y_i).

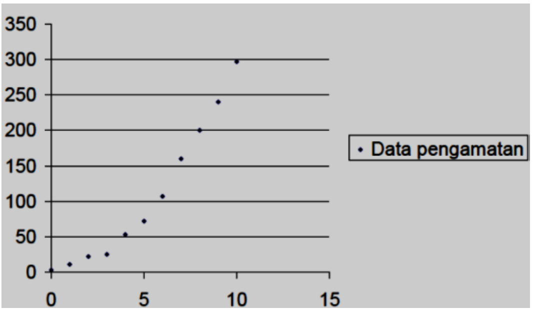
2) Aplikasi pada model kuadratik

Tabel 4 menyajikan 11 pasang data bivariate yang diduga mengikuti sebaran kuadratik $y = ax^2 + b$

Tabel 4. *Data bivariate sebaran kuadratik*

x	0	1	2	3	4	5
y	3	11	22	25	53	72
x	6	7	8	9	10	
y	107	160	200	240	297	

Plot datanya ditampilkan pada gambar 5.



Gambar 5. *Plot kuadratik data tabel 4.*

Mengaplikasikan persamaan normal

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\}$$

untuk menemukan taksiran bagi konstanta a dan b membutuhkan nilai-nilai $\sum y;\ \sum x^2;\ \sum x^2 y;\ \sum x^4$ yang nilainya berturut-turut (dengan *Excel*): 1190 ; 385; 76604; 25333. Substitusi ke dalam persamaan normal menghasilkan

$$25333a + 385b = 76604$$

$$385a + 11b = 1190$$

Komputasi dengan *Mathematica*:

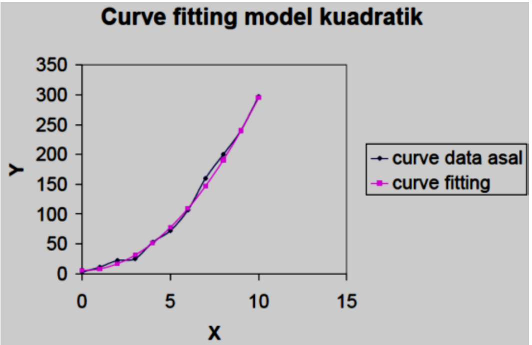
```
In[1]:= Solve[{25333 a + 385 b == 76604, 385 a + 11 b == 1190},
          {a, b}] // N

Out[1]= {{a → 2.94771, b → 5.01181}}
```

Taksiran bagi a dan b berturut-turut adalah
a = 2,9 dan b = 5. Oleh karena itu model dugaan yang tepat untuk data tabel 4 adalah

$$\hat{y} = 2,9x^2 + 5.$$

Jika kurva data asal dikomparasi dengan pencocokan kurva yang dihasilkan dari grafik persamaan taksiran $\hat{y} = 2,9x^2 + 5$, hasilnya diberikan oleh gambar 6.



Gambar 6. *Curve data asal vs pencocokan kurva*

Jelas nyata bahwa pencocokan kurva metode kuadrat terkecil memberikan 'fit' yang memuaskan bagi data bivariate pada tabel 4.

3) Pencocokan kurva dengan Metode Gauss

Misal diberikan lima titik (-2,3), (-1,5), (0,1), (1,4) dan (2,10) yang dianggap terletak pada kurva polinomial derajat empat

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Koefisien-koefisien polinomial a_0, a_1, a_2, a_3 dan a_4 diperoleh dengan mensubstitusikan nilai masing-masing titik ke dalam polinomial $p(x)$, menghasilkan sistem persamaan linier,

$$\begin{array}{llllllc} a_0 & -2a_1 & +4a_2 & -8a_3 & +16a_4 & = & 3 \\ a_0 & -a_1 & +a_2 & -a_3 & +a_4 & = & 5 \\ a_0 & & & & & = & 1 \\ a_0 & +a_1 & +a_1 & +a_3 & +a_4 & = & 4 \\ a_0 & +2a_1 & +2a_1 & +8a_3 & +16a_4 & = & 10 \end{array}$$

Matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) untuk sistem persamaan linier ini sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 8 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

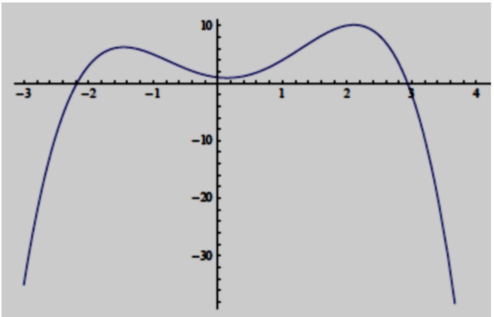
Menerapkan eliminasi Gauss pada matrik yang diperbesar ini menghasilkan nilai koefisien-koefisien a_0, a_1, a_2, a_3 dan a_4 :

$$a_0 = 1,\ a_1 = \tfrac{-30}{24},\ \ a_2 = \tfrac{101}{24},\ a_3 = \tfrac{18}{24},\ a_4 = \tfrac{-17}{24}$$

yang berarti polinomial yang dicari adalah

$$p(x) = 1 - \tfrac{30}{24}x + \tfrac{101}{24}x^2 + \tfrac{18}{24}x^3 - \tfrac{17}{24}x^4$$

$$= \tfrac{1}{24}(24 - 30x + 101x^2 + 18x^3 - 17x^4)$$ yang grafiknya pada gambar 7



Gambar 7

KESIMPULAN

Metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode pencocokan kurva yang dikenal luas dan digunakan untuk mendapatkan model matematik terbaik yang menyatakan hubungan antara dua data bivariate (x_i, y_i) . Metode kuadrat terkecil bekerja dengan meminimumkan jumlah kuadrat dari jarak vertikal (ordinat) antara titik data dan garis estimasi terbaik untuk kumpulan data yang diberikan. Dengan memanfaatkan perhitungan kalkulus diferensial, metode kuadrat terkecil bekerja menghasilkan persamaan normal yang berperan sebagai persamaan kerja dalam pengolahan data bivariate untuk mendapatkan nilai estimasi terbaik bagi konstanta-konstanta yang terlibat dalam model matematik yang diasumsikan. Ketika model matematik bagi perangkat data bivariate telah dipilih secara tepat, maka pencocokan kurva dengan metode kuadrat terkecil akan bekerja dengan tepat. Metode Gauss secara sigifikan memiliki cara pencocokan kurva yang berbeda dari metode kuadrat terkecil, bekerja dalam sistem persamaan linier untuk mencari koefisien-koefisien fungsi polinomial pada pencocokan kurva.

Daftar Pustaka

Bernstein Stephen& Bernstein Ruth., 1999, *Theory and Problems of Elements of Statistics II*: *Inferential Statistics*, Schaum's Outline.

Buonaccorsi, J.P., 2010. *Measurement error, models, methods and applications*. CRC Press.

Gallant, A.R., 1987. *Nonlinier statistical models*, John Wiley&Sons

Kinney, J.J., 2009. *A Probability and Statistics Companion*, John Wiley&Sons Inc.

Larson R., Falvo D.C., 2009., *Elementary Linear Algebra*, 6th ed., Houghton Mifflin Harcourt Publishing Co.
Stroud, K.A., 1987. *Engineering Mathematics 4th Ed.*, MacMillan Press.