AFoSJ-LAS, Vol.2, No.2, 15 Juni 2022 (hal:101-109) e-ISSN.2776-2408 ; p-ISSN 2798-9267

All Fields of Science J-LAS
Jurnal Penelitian
Availabel Online: https://j-las.lemkomindo.org/index.php/AFoSJ-LAS/index

Masalah Pencarian Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Multivariabel dengan Turunan Parsial dan Matriks Hessian

The Problem of Finding Maximum and Minimum Values of Multivariable Functions with Partial Derivatives and Hessian Matrices

Muhammad Razali[1]*
[1]Universitas Pembinaan Masyarakat Indonesia Medan
Corresponding Author*: razalialy@gmail.com

Abstrak

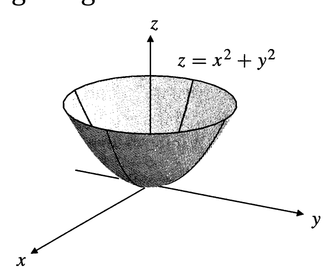
Tulisan ini menguraikan aplikasi turunan parsial untuk menentukan nilai maksimum-minimum fungsi multivariabel, khususnya fungsi dua variabel bebas dan fungsi tiga variabel bebas dan masalah ini dikenal dengan istilah optimisasi. Aplikasi kalkulus pada masalah ini telah meluas penerapannya di berbagai bidang ilmu. Proses penentuan titik kritis dan nilai optimum untuk fungsi multivariabel dilakukan dengan analogi yang mirip seperti yang dilakukan pada fungsi satu variabel bebas, namun membutuhkan analisis yang lebih teliti dan mendalam. Pendekatan geometri dengan cara menggambarkan grafik fungsi untuk melihat kedudukan titik-titik kritis dan nilai optimum fungsi di dalam domainnya sering tidak memberi jawaban akurat. Oleh karena itu akurasi jawaban masalah optimisasi diperoleh dengan analisis matematik dan teorema-teorema yang tepat. Teorema-teorema syarat perlu, syarat cukup untuk eksistensi nilai ekstrim pada masalah ini serta penggunaan uji turunan parsial kedua dan klasifikasi sifat-sifat alamiah dari nilai ekstrim telah menentukan bagaimana titik kritis dan solusi optimal (jika ada) dapat diperoleh.
Kata Kunci: Pencarian Nilai; Multivariabel; Parsial; Matriks Hessian

Abstract

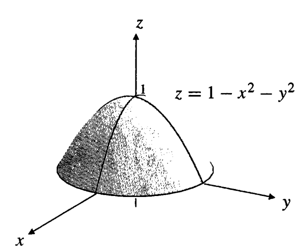
This paper describes the application of partial derivatives to determine the maximum-minimum value of multivariable functions, especially functions of two independent variables and functions of three independent variables and this problem is known as optimization. The application of calculus to this problem has been widely applied in various fields of science. The process of determining the critical point and optimum value for multivariable functions is carried out with a similar analogy to that of a single independent variable function, but requires a more thorough and in-depth analysis. The geometric approach by drawing a graph of the function to see the position of the critical points and the optimum value of the function in its domain often does not give an accurate answer. Therefore, the accuracy of the answer to the optimization problem is obtained by mathematical analysis and appropriate theorems. The theorems of necessary conditions, sufficient conditions for the existence of extreme values in this problem as well as the use of the second partial derivative test and classification of properties of extreme values have determined how critical points and optimal solutions (if any) can be obtained.
Keywords: Value Search; Multivariable; Partial; Hessian Matrix.

PENDAHULUAN

Tulisan ini membahas kontribusi turunan parsial untuk membantu pemahaman dan penyelesaian masalah-masalah dalam matematika terapan, khususnya upaya penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi multivariabel yang dikenal sebagai masalah optimisasi. Pertimbangkan fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$, bagian dari grafiknya pada gambar 1, memiliki nilai minimum 0, nilai ini muncul di titik asal (0, 0) di mana bidang singgung kurva di titik tersebut horisontal. Demikian pula, fungsi $g(x,y)=1-x^2-y^2$ yang sebagian kurvanya disajikan pada gambar 2 memiliki nilai maksimum 1 di titik asal (0, 0). Pertanyaan yang muncul kemudian, teknik apa yang bisa digunakan untuk menyelidiki nilai maksimum-minimum fungsi multivariat jika kurvanya tidak digambarkan? Penentuan nilai maksimum-minimum fungsi tujuan seperti pada fungsi satu variabel, adalah bagian penting dalam kalkulus yang aplikasinya meluas di beragam disiplin ilmu lainnya. Masalah penentuan nilai maksimum-minimum fungsi lebih dari satu variabel bebas lebih rumit dari kasus pada fungsi dengan satu variabel bebas saja. Dalam tulisan ini diuraikan teknik optimisasi fungsi dua variabel bebas dan tiga variable. Dengan mengabaikan jumlah variabel, diasumsikan secara umum bahwa bila fungsi ditulis dalam bentuk umum, fungsi tujuan tersebut mempunyai derivative parsial kontinu untuk sembarang ordo yang diinginkan [2].



Gambar 1



Gambar 2

LANDASAN TEORI DAN TEOREMA

Kita mulai dengan uraian singkat masalah optimisasi pada fungsi satu variabel bebas. Fungsi *f(x)* memiliki maksimum lokal (atau minimum lokal) di titik *a* di dalam domainnya jika $f(x) \le f(a)$ (atau $f(x) \ge f(a)$) untuk semua nilai *x* di dalam domain *f* yang cukup dekat dengan *a*. Jika pertaksamaan ini berlaku benar untuk semua nilai *x* yang berada dalam domain *f* maka dikatakan bahwa *f* memiliki nilai *maksimum mutlak* (atau *minimum mutlak*) di

a. Nilai-nilai ekstrim (maksimum atau minimum) lokal dan mutlak hanya dapat terjadi pada titik-titik di satu dari tiga jenis berikut ini:

(a) titik-titik kritis di mana $f'(x)=0$

(b) titik-titik singular yakni pada mana $f'(x)$ *tak terdefinisi*

(c) Titik-titik ujung (batas bawah dan batas atas) domain *f*

Kondisi yang sama juga berlaku pada fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas. Dikatakan bahwa fungsi dua variabel bebas memiliki nilai *maksimum lokal* (atau *maksimum relatif*) di titik (*a,b*) di dalam domainnya jika $f(x,y)\leq f(a,b)$ untuk semua titik (*x, y*) di dalam domain *f* yang cukup dekat dengan titik (*a, b*). Jika pertaksamaan ini berlaku untuk semua (*x, y*) di dalam domain *f,* maka dikatakan *f* memiliki maksimum mutlak titik (*a, b*). Teorema berikut ini menunjukkan bahwa terdapat tiga kemungkinan bagi- titik-titik di mana nilai-nilai ekstrim dapat muncul, mengadopsi ide yang sama dengan masalah optimisasi pada kasus fungsi satu variabel bebas.

Teorema 1: Syarat-syarat perlu untuk nilai-nilai ekstrim

Fungsi f(x, y) dapat memiliki nilai ekstrim lokal atau mutlak di titik (a, b) di dalam domainnya hanya bila (a, b) merupakan satu dari tiga titik berikut ini:

(a) ***titik kritis*** *dari f, yaitu titik yang memenuhi* $\nabla f(a,b)=0$

(b) ***titik singular*** *dari f, yaitu titik di mana* $\nabla f(a,b)$ *tak terdefinisi atau*

(c) ***titik batas****, dari domain f*

Uraian bukti teorema 1 sebagai berikut [1] Misalkan *(a, b)* berada dalam domain *f.* Jika *(a, b)* bukan berada pada titik batas dari domain *f*, maka ia mesti berada di wilayah interior dari domain *f* dan jika *(a, b)* bukan merupakan titik singular dari *f* maka $\nabla f(a,b)$ ada atau terdefinisi. Akhirnya, jika *(a, b)* bukan merupakan titik kritis dari *f*, maka $\nabla f(a,b)\neq 0$ sehingga *f* memiliki turunan berarah positif dalam arah $\nabla f(a,b)$ dan turunan berarah negatif dalam arah $-\nabla f(a,b)$; yang artinya fungsi *f* naik jika kita bergerak dari *(a, b)* dalam satu arah dan menurun bila kita bergerak dari arah sebaliknya. Karenanya, *f* tidak mungkin bernilai maisimum atau minimum di titik *(a, b).* Oleh karena itu, sebarang titik di mana nilai ekstrim terjadi harus merupakan (salah satu dari) *titik kritis* atau *titik singular* atau *titik batas* dari domain *f.*

Perlu dicatat bahwa teorema 1 tetap benar dengan alur pembuktian yang persis sama seperti pembuktian di atas bila diterapkan pada fungsi-fungsi yang jumlah variabel bebasnya lebih banyak (tiga variabel dan seterusnya). Tentu saja teorema 1 tidak menjamin bahwa suatu fungsi yang diberikan akan memiliki nilai-nilai ekstrim. Teorema ini hanya menyatakan di titik-titik mana saja nilai ekstrim fungsi *f* mungkin terjadi. Titik ekstrim adalah titik di mana nilai maksimum atau minimum tercapai. Teorema 1 tidak menjamin eksistensi (keberadaan) nilai maksimum atau minimum. Eksistensi nilai maksimum atau minimum dijamin oleh teorema 2 sebagai berikut, yang analoginya sama seperti pada masalah nilai maksimum dan minimum pada fungsi satu variabel bebas.

Teorema 2: Syarat-syarat cukup untuk nilai-nilai ekstrim

Jika f adalah fungsi kontinu dengan n variabel bebas yang domainnya adalah himpunan tertutup dan terbatas di dalam ruang $\mathbb{R}^n$ *, maka range dari f adalah himpunan bilangan real yang terbatas dan terdapat titik-titik di dalam domainnya di mana f mencapai nilai maksimum dan minimum.*

Suatu himpunan di dalam ruang $\mathbb{R}^n$ dikatakan *terbatas* bila ia berada di dalam *bola* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ dari jari-jari R yang panjangnya berhingga (*finite*).

2.1. Mengklasifikasi Titik-titik Kritis

Untuk fungsi yang lebih komplek dan melibatkan banyak variabel bebas, akan lebih sulit untuk mengkasifikasi titik-titik kritis interiornya. Secara teori, klasifikasi dapat dilakukan dengan mempertimbangkan selisih dari

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

Untuk nilai-nilai *h* dan *k* yang cukup kecil, di mana *(a, b)* merupakan titik kritis yang dicari. Jika selisihnya selalu *non-negatif* (atau *non-positif*) untuk nilai-nilai *h* dan *k* yang cukup kecil, maka *f* harus memiliki minimum lokal (atau maksimum) di titik *(a, b)*; jika selisihnya negatif untuk sebarang beberapa titik *(h, k)* yang dekat dengan titik pangkal koordinat (0, 0) dan positif untuk yang lainnya, maka *f* harus memiliki titik *saddle* (pelana) di *(a, b).*

Teorema 3: Uji turunan kedua

Anggap bahwa $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *adalah titik kritis dari* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dan berada dalam interior dari domain f. Anggap juga bahwa semua turunan parsial kedua dari f adalah kontinu seluruhnya disekitar* ***a*** *sehingga* ***matrik Hessian***

$$\mathrm{H}(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{11}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Adalah juga kontinu disekitar ***a****.*

*(a) Jika H(**a**) adalah definit positif maka f memiliki minimum lokal di **a***

*(b) Jika H(**a**) adalah definit negatif maka f memiliki maksimum lokal di **a**.*

*(c) Jika H(**a**) adalah indefinit maka f memiliki titik saddle (belok) di **a***

*(d) Jika H(**a**) tidak definit positif, tidak definit negatif dan tidak juga indefinit maka uji tidak memberi informasi apapun*

Bukti Misalkan $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ untuk $0 \leq t \leq 1$ di mana **h** adalah vektor dimensi *n*. Maka

$$g'(t) = f_i(\mathbf{a} + \mathrm{t}\mathbf{h})\mathrm{h}_i$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a} + \mathrm{t}\mathbf{h})\mathrm{h}_i\, h_j = \mathbf{h}^T H(\mathbf{a} + \mathrm{t}\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Berikutnya menggunakan formula Taylor dengan sisa Lagrange pada *g* untuk menuliskan $g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$ untuk beberapa nilai θ antara 0 dan 1. Jadi

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a}) h_i + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T H(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Karena **a** adalah titik kritis f, $f_i(\mathbf{a}) = 0$ untuk $1 \le i \le n$, jadi

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}^T H(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Jika H(**a**) definit positif maka dengan kontinuitas H, sehingga H(**a** + θ**h**) untuk |**h**| memiliki nilai yang cukup kecil. Oleh karena itu $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ untuk nilai $\mathbf{h} \neq 0$, merupakan bukti bagi bagian (a) dari teorema ini. Bagian (b) dan (c) dibuktikan dengan analogi yang sama seperti bagian ***a***.

Fungsi-fungsi seperti berikut $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = -x^4 - y^4$ dan $h(x,y) = x^4 - y^4$ semuanya memenuhi teorema bagian (d), dalam kasus ini menunjukkan bahwa sebuah fungsi dapat memiliki titik minimum, maksimum atau titik saddle. Berikut ini diberikan sebuah ilustrasi bagaimana cara menemukan dan mengklasifikasi titik-titik kritis dari fungsi tiga variabel bebas *x, y* dan *z* $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x.$

Pada fungsi *f* ini, tiga persamaan yang menentukan titik-titik kritis adalah

$$f_1(x,y,z) = 2xy - 2 = 0$$
$$f_2(x,y,z) = x^2 + 2yz = 0$$
$$f_3(x,y,z) = y^2 + 2z = 0$$

Persamaan ketiga menyebabkan $z = -y^2/2$, substitusi *z* ke persamaan kedua menghasilkan $y^3 = x^2$. Dari persamaan pertama diperoleh $y^{5/2} = 1$. Jadi $y = 1$ dan $z = -1/2$. Karena $xy = 1$, maka nilai *x* harus 1. Satu-satunya titik kritis adalah $P = (1, 1, -1/2)$. Dengan menghitung turunan parsial kedua dari *f* di titik ini, diperoleh **matrik Hessian**

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Karena,

$$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

Maka H indefinite, sehingga *P* adalah *titik saddle* dari *f*. Dengan menguji matrik simetri positif atau matrik simetri negatif dari matrik Hessian untuk fungsi dua variabel bebas, kita dapat mengatakan uji turunan kedua teorema 3 untuk fungsi sedemikian sebagai berikut[1].

Misalkan bahwa (a, b) adalah titik kritis dari fungsi f(x, y) dan adalah titik interior dalam domain f. Misalkan pula bahwa turunan parsial kedua dari f adalah kontinu disekitar (a, b) dan pada titik ini memiliki nilai-nilai berikut:

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b), \quad \text{dan } C = f_{yy}(a,b)$$

(a) Jika $B^2 - 4AC < 0$ *dan* $A > 0$ *maka f memiliki minimum lokal di (a, b)*

(b) $B^2 - 4AC < 0$ *dan* $A < 0$ *maka f memiliki maksimum lokal di (a, b)*

(c) $B^2 - 4AC > 0$ *maka f memiliki titik saddle di (a, b)*

(d) $B^2 - 4AC = 0$, *uji ini tidak memberi informasi, fungsi f mungkin memiliki maksimum lokal, minimum lokal atau titik saddle di (a, b).*

2.2. Fungsi tiga variabel dengan kendala

Untuk memperoleh titik-titik ekstrim fungsi tiga variabel:

$u = f(x, y, z) \cdots (1)$

dengan kendala $\phi(x, y, z) = 0 \cdots (2)$

maka pada titik stasioner (ekstrim) berlaku persamaan

$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z = 0 \cdots (3)$

Dan karena $\phi(x, y, z) = 0$ maka

$\frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\delta z = 0 \cdots (4)$

Masing-masing suku pada (4) dikali konstanta Lagrange λ dan kemudian menambahkan (4) ke (3) diperoleh

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\delta y$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

Dari persamaan di atas dapat dikatakan bahwa

$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \cdots (5)$ $\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \cdots (6)$

$\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \cdots (7)$

Persamaan (5), (6), (7) bersama kendala (2) memberi informasi untuk menentukan nilai *x, y, z* dan λ jika diperlukan [5].

HASIL DAN PEMBAHASAN

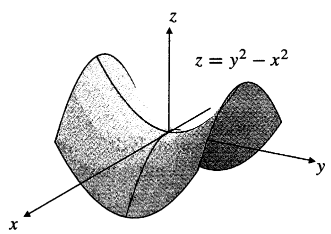
Bagian ini memaparkan beberapa kasus yang mengilustrasi landasan teori dan teorema pada bagian 2 dengan menerapkannya pada fungsi tertentu.

Kasus 1.

Fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ pada gambar 1 memiliki titik kritis di (0,0) karena $\nabla f = 2xi + 2yj$ dan kedua komponen ∇f hilang dititik (0, 0). Karena $f(x, y) > 0 = f(0,0)$ jika $(x, y) \neq (0,0)$ maka f harus memiliki nilai minimum mutlak 0 di titik tersebut. Jika domain *f* tidak dibatasi fungsi , maka *f* tidak memiliki nilai maksimum. Demikian pula untuk fungsi $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ pada gambar 2 memiliki nilai maksimum mutlak 1 di titik kritis
(0, 0)

Kasus 2.

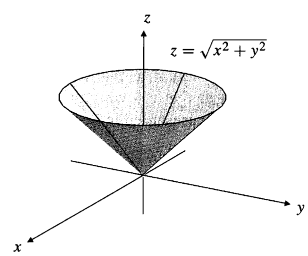
Fungsi $h(x, y) = y^2 - x^2$ juga memiliki titik kritis di (0, 0) tetapi tidak memiliki maksimum lokal dan minimum lokak di titik tersebut. Amati bahwa $h(0, 0) = 0$ namun $h(x, 0) < 0$ dan $h(0, y) > 0$ untuk semua nilai *x* dan *y* yang tidak nol. Grafik *h* pada gambar 3 berbentuk paraboloida hiperbolik yang mirip seperti pelana (saddle) kuda dan titik kritis (0, 0) disebut *titik saddle* fungsi *h*.



Gambar 3

Kasus 3.

Fungsi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tidak memiliki titik kritis namun memiliki *titik singular* di (0, 0) dan memiliki nilai minimum lokal (dan mutlak sekaligus) nol. Fungsi ini memiliki grafik berbentuk corong sirkular seperti gambar 4



Gambar 4

Kasus 4.

Pertimbangkan fungsi tiga variabel bebas $u = x^2 + 2y^2 + z$

dengan kendala $\phi(x, z) = x^2 - z^2 - 2 = 0$

maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2z$$

Kemudian disusun persamaan ini sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

dan $\dfrac{\partial u}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

serta kendala $\phi(x, z) = x^2 - z^2 - 2 = 0$, akan menghasilkan titik-titik stasioner pada $(\frac{3}{2}, 0, \frac{-1}{2})$ *dan* $(\frac{-3}{2}, 0, \frac{-1}{2})$, karena:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \;\therefore\; 2x + \lambda 2x = 0 \;\therefore\; \lambda = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \;\therefore\; 4y + \lambda(0) = 0 \;\therefore\; y = 0 \qquad \phi = x^2 - z^2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \;\therefore\; 1 - \lambda 2z = 0 \;\therefore\; z = \frac{1}{2\lambda} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore x2 - \tfrac{1}{4} - 2 = 0 \quad \therefore x = \pm \tfrac{3}{2}$$

Oleh karena itu titik-titik stasionernya jatuh pada $(\frac{3}{2}, 0, \frac{-1}{2})$ *dan* $(\frac{-3}{2}, 0, \frac{-1}{2})$.

Kasus 5.

Output maksimum fungsi produksi *Cobb-Douglas*

Jika x ribu rupiah dialokasikan pada upah pekerja (*labor*) dan y ribu rupiah dialokasikan pada *equipment* (bahan baku produksi, mesin dan sebagainya), maka output atau produksi suatu pabrik dapat diestimasi sebanyak Q unit dengan fungsi

$$Q(x,\ y) = 50x^{2/5}y^{3/5}$$

yang dalam bidang ekonomi dikenal dengan *fungsi produksi Cobb-Douglas* [3]. Jika Rp. 150 juta modal tersedia, adalah hal penting untuk menetapkan besarnya kombinasi biaya yang dialokasikan pada biaya pekerja dan biaya *equipment* yang akan menghasilkan produkivitas (output) maksimum. Jika penambahan unit biaya pekerja dan biaya *equipment* masing-masing adalah per Rp 1 juta per unit, maka uraian untuk model optimisasinya dengan turunan parsial dan pengali *Lagrange* adalah sebagai berikut:

Di sini muncul fungsi kendala

$g(x, y) = x + y$

Fungsi produksi Q dimaksimumkan dengan kendala $g(x, y) = 150$ juta.

Untuk menerapkan metode pengali *Lagrange*, terlebih dahulu temukan masing-masing turunan parsial Q dan g terhadap x dan y:

$$Q_x = 20x^{-3/5}y^{3/5};\quad Q_y = 30x^{2/5}y^{-2/5}$$

$$g_x = 1 \ dan \ g_y = 1$$

kemudian menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} 20x^{-3/5}y^{3/5} = \lambda(1) \\ 30x^{2/5}y^{-2/5} = \lambda(1) \\ x + y = 150 \ juta \end{cases}$$

dari dua persamaan pertama diperoleh

$$20x^{-3/5}y^{3/5} = 30x^{2/5}y^{-2/5}$$

$20y = 30x$

$y = 1{,}5x$

Substitusi $y = 1{,}5x$ ke dalam persamaan $x + y = 150$ juta, didapat $x = 60$ juta dan $y = 90$ juta. Ini berarti modal 150 juta akan memberi produktivitas terbaik bila 60 juta dialokasika ke biaya pekerja dan 90 juta untuk *equipment*. Output Q maksimum yang dihasilkan adalah:

$Q(60, 90) = 50(60)^{2/5}(90)^{3/5} \approx 3.826$ unit.

Nilai $\lambda = 20(60)^{-3/5}(90)^{3/5} \approx 25{,}51\ unit$.

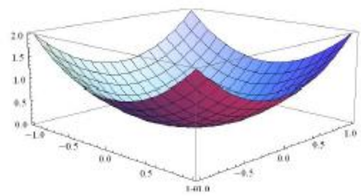
Ini juga mermakna bahwa penambahan dalam kelipatan Rp 1 juta pada masing-masing komponen x dan y output maksimum dengan 25,51 unit (dari 3.826 ke 3851,51 unit)

Penyelesaian dengan *Mathematica*

Penyelidikan nilai ekstrim fungsi pada gambar 1 dengan *Mathematica*, dengan perintah *Minimize* dan *Plot3D* sebagai berikut [4]

```
Minimize[{x^2+y^2, -1<x<1, -1<y<1}, {x,y}]
{0, {x→0, y→0}}

Plot3D[x^2+y^2, {x,-1,1}, {y,-1,1}]
```



Gambar 4. Output $f(x, y) = x^2 + y^2$ dengan *Mathematica*

Perintah Minimize memberi output:
{0, {x→0, y→0}} yang berarti nilai minimum f adalah nol, ketika $x = 0$ dan $y = 0$.

KESIMPULAN

Fungsi kontinu f dengan dua variabel bebas memiliki kurva bidang (lengkung maupun datar) yang terbentang pada domainnya di ruang $\mathbb{R}^3$ di mana nilai maksimum atau minimum terjadi pada satu dari tiga tempat yaitu titik kritis, titik singular atau titik-titik ujung domain f. Bentuk grafik memberi gambaran kasar mengenai lokasi titik ekstrim dan nilai optimum (maksimum atau minimum) namun nilai presisi dari titik-titik ekstrim dan nilai optimum fungsi serta sifat-sifat alamiah (masimum, minimum atau titik saddle) dari nilai ekstrim dan nilai optimum fungsi f hanya dapat ditentukan dengan aturan matematis turunan parsial dan teorema-teorema yang telah dikemukakan. Pada fungsi dengan tiga variabel bebas, kurva fungsi tidak mungkin lagi digambarkan dan penyelidikan nilai-nilai kritis dan nilai optimum harus dilakukan dengan analogi matematis seperti di atas.

DAFTAR PUSTAKA

Muhammad Rajali, Elazhari, Khairuddin Tampubolon, (2021). Pencocokan Kurva Dengan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Gauss. AFoSJ-LAS: Journal All Field of Science J-LAS, 1(1), 14-22.
From: https://j-las.lemkomindo.org/index.php/AFOSJ-LAS/article/view/9

Adams A. Robert., Essex C., 2010, *Calculus a Complete Course 7th Ed*., Pearson

Chiang C.A., Wainwraight K., 2006, *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi Edisi-4.,* Erlangga

Strauss, Bradley, Smith., 2002, *Calculus 3rd Ed*, Prentice Hall International Edition.

Ruskeepaa Heikki., 2009, *Mathematica Navigator 3rd Ed*, Academic Press.

Stroud, K.A., 1990. *Further Engineering Mathematics 2nd Ed.*, MacMillan Press.