

# KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK SIR PENYAKIT DEMAM BERDARAH

Katrina Pareallo<sup>1</sup>  
Wahidah Sanusi<sup>2</sup>  
Syafruddin Side<sup>3</sup>

Jurusan Matematika FMIPA  
Universitas Negeri Makassar<sup>1,2,3</sup>

Email: katrinapareallo@gmail.com<sup>1</sup>

**Abstrak.** Penelitian ini membahas mengenai kontrol optimal pada model penyebaran penyakit demam berdarah menggunakan prinsip minimum Pontryagin. Demam Berdarah Dengue (DBD) adalah penyakit yang disebabkan oleh spesies nyamuk betina *Aedes aegypti* dan *Aedes Albopictus*. Penyakit ini dapat menyebabkan kematian jika tidak ditangani secara serius. Penyakit ini dapat dicegah dengan cara pemberian vaksin yang dinamakan Chimeric Yellow Fever 17D-Tetravalent Dengue Vaccine(CYD-TDV) Pembahasan dimulai dari penentuan model SIR menggunakan kontrol, penentuan kontrol optimal menggunakan prinsip minimum Pontryagin, simulasi menggunakan software Maple dan analisis hasil. Dalam penelitian ini diperoleh sistem persamaan diferensial, persamaan kontrol optimal, dan grafik dari model SIR tanpa menggunakan kontrol dan menggunakan kontrol. Berdasarkan hasil yang diperoleh disimpulkan bahwa dengan menambahkan faktor pengontrol pada model SIR dapat meminimumkan jumlah individu terinfeksi.

**Kata Kunci:** SIR, Demam Berdarah Dengue, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Vaksinasi

# INDONESIAN JOURNAL OF FUNDAMENTAL SCIENCES (IJFS)

E-ISSN: 2621-6728

P-ISSN: 2621-671X

Submitted: August 1<sup>st</sup>, 2018

Accepted : August, 23<sup>th</sup>, 2018

**Abstract.** This study discusses about the optimal control on dengue fever distribution model using the minimum principle of Pontryagin. Dengue is a disease caused by dengue virus it transmitted by the female mosquitos species, namely *Aedes aegeypti* and *Aedes Albopictus*. Thus disease cause death if not treated seriously. The disease can be prevented by vaccine, called Chimeric Yellow Fever 17D-Tetravalent Dengue Vaccine(CYD-TDV). The discussion starts from determining the SIR model using the controls, determining the optimal control using the minimum principle of Pontryagin , the simulation using Maple software and the result analysis. In this study obtained the system of differential equations, optimal control equations, and graphs of the SIR model without using controls and using the control. Based on the results obtained concluded that by adding control factor to SIR model can minimize the number of infected individuals.

## PENDAHULUAN

Penyakit demam berdarah adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh satu dari 4 virus dengue berbeda dan ditularkan melalui nyamuk terutama *Aedes aegypti* dan *Aedes* ditemukan di daerah tropis dan subtropis diantaranya kepulauan di Indonesia hingga bagian utara Australia (Kemenkes RI). Dengan melihat kondisi tersebut, beberapa peneliti khususnya dibidang matematika hadir memberikan solusi dengan mentransformasi masalah kedalam bahasa matematika melalui bidang pemodelan seperti yang dilakukan oleh Esteva yang telah mengembangkan model penularan DBD ke dalam bentuk SIR (*Susceptible-Infective-Recovered*) berdasarkan model yang dikembangkan oleh Bayley dan Dietz, dengan asumsi bahwa jumlah populasi manusia konstan dengan tingkat kelahiran dan kematian adalah proporsional dengan jumlah populasi dan juga memperkenalkan parameter nilai ambang  $R_0$  (*threshold parameter*).

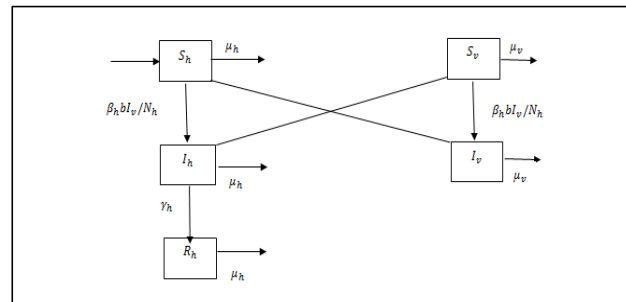
Kontrol Optimal merupakan perluasan dari kalkulus variasi, yaitu metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Pengendalian penyakit yang mempunyai model epidemi tipe SIR dilakukan dengan vaksinasi untuk meminimalkan individu rentan (S) dan terinfeksi (I) serta memaksimalkan individu yang sembuh (R) secara bersamaan. Penyelesaian masalah kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Adapun penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya (Ikthisoliyah, 2011; Setiawan. 2012). Ikthisoliyah(2011) membahas mengenai kontrol optimal. Pada hasil penelitiannya, pengendalian optimal tidak diterapkan pada penyakit yang khusus, akan tetapi digunakan untuk pola penyebaran penyakit yang mempunyai model epidemi tipe SIR. Setiawan (2012) membahas tentang dengan kontrol optimal vaksinasi dan pengobatan. Pada hasil penelitiannya diperoleh merupakan dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik.

Pada penelitian ini dikaji penyelesaian kontrol optimal pada model penyakit demam berdarah. Selanjutnya dibahas karakterisasi model untuk menentukan model yang menggunakan kontrol, kontrol optimal dari model, dan simulasi model untuk mengetahui pengaruh kontrol vaksinasi terhadap sub individu terinfeksi dengan menggunakan software maple.

**KAJIAN PUSTAKA**

**Model Matematika Penyakit Demam Berdarah**

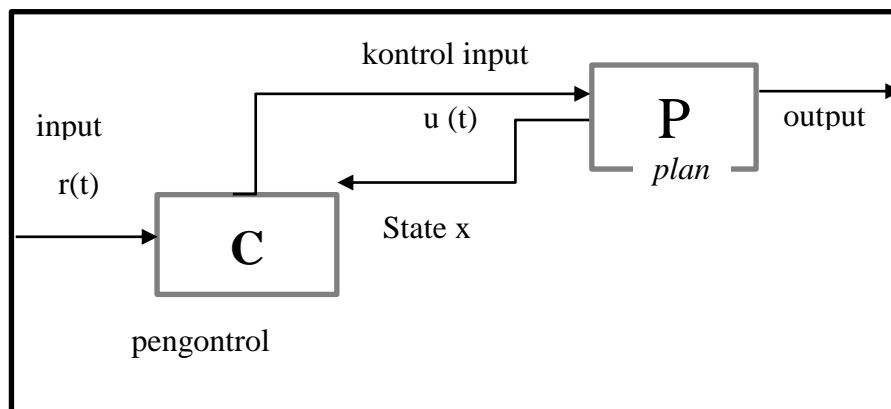
Secara skematis, pola penyebaran penyakit DBD dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. skema populasi manusia dan vektor model SIR (Side, 2014)

**Masalah Kontrol Optimal**

Pada prinsipnya, tujuan utama dari kontrol optimal adalah menentukan signal yang akan diproses dalam plant dan memenuhi konstrain fisik. Kemudian pada waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim (maksimum/minimum) yang sesuai dengan kriteria fungsi tujuan. Adapun alur kontrol optimal dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Skema kontrol

Pada Gambar 2 masalah kontrol optimal adalah mendapatkan kontrol optimal ( $u^*$ ), tanda \* menyatakan kondisi optimal yang akan mendorong dan mengatur *plant P* dari keadaan awal sampai keadaan akhir dengan beberapa konstrain pada kontrol dengan keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan keadaan ekstrim berdasarkan fungsi tujuan (*performance index*) yang diberikan.

**Prinsip Minimum Pontryagin**

Pada tahun 1962, seorang ilmuwan yang bernama Pontryagin mengembangkan suatu prinsip memaksimalkan atau meminimumkan fungsi objektif yang menyertakan variabel kontrol dan kendala. Misalkan diberikan suatu sistem persamaan yang kontinu terhadap waktu,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1}$$

Dengan syarat awal  $x(t_0)$  dan kontrol  $u(t)$  merupakan anggota dari suatu himpunan  $U, u(t) \in U$ . Misalkan  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  adalah vektor keadaan (state),  $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  adalah turunan pertama dari vektor state pada waktu t, dan kontrol  $(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Misalkan sistem mempunyai fungsional objektif (performance index) sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \tag{2}$$

Dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Dengan kontrol:

$$u(t) \in U.$$

Diasumsikan bahwa  $u(t)$  merupakan fungsi terhadap waktu sehingga  $f(x, u, t)$  dan  $L(x, u, t)$  juga merupakan fungsi-fungsi terhadap waktu dengan interval  $[t_0, t_f]$  menunjukkan interval waktu pengamatan. Fungsi  $L(x, u, t)$  merupakan fungsi bobot (weighting function) yang bergantung pada variabel state dan kontrol pada interval waktu  $[t_0, t_f]$ .

Kontrol  $u^*(t)$  yang mengoptimalkan  $J$  pada prinsipnya menggunakan metode pengali Lagrange. Masing-masing kendala mempunyai satu pengali Lagrange. Terdapat fungsi kendala terhadap waktu t pada persamaan yang berada pada interval waktu  $[t_0, t_f]$ , sehingga diperlukan pengali Lagrange pada masing-masing waktu. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ , maka akan dibentuk perluasan dari J yang disimbolkan  $J_a$  yang menyertakan persamaan  $\text{Max}_{\{u(t)\}} J =$

$$\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt, \text{ yaitu}$$

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L[x, u, t] + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x}) dt$$

dengan  $\lambda$  merupakan pengali Lagrange.

Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai berikut:

$$H(x, u, t, \lambda) = L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t)) \tag{3}$$

Sehingga persamaan (2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} H[x, u, t] \lambda^T(t) \dot{x} dt \tag{4}$$

variasi dari  $J_a$  sebagai suatu fungsi terhadap perubahan  $x, u, \lambda, \dot{x}, t$  adalah

$$\delta J_a = (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_f} - (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right]^T \delta x dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \right]^T \delta u dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right]^T \delta \lambda dt - \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta x dt}_* \tag{5}$$

Untuk menghilangkan variasi  $\dot{x}$  pada (1) dalam persamaan (3), maka bentuk tersebut diintegrasikan secara parsial, diperoleh

$$- \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta x dt = -\lambda^T \delta x|_{t_f} + \lambda^T \delta x|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt. \tag{6}$$

Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned} \delta J_a &= (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_f} - (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} [(H_x)^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt - \lambda^T \delta x|_{t_f} + \lambda^T \delta x|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt \\ &= (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_f} - (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} [(H_x)^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt - \lambda^T \delta x|_{t_f} + \lambda^T \delta x|_{t_0} \end{aligned} \tag{7}$$

dengan

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, H_u = \frac{\partial H}{\partial u}, H_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \lambda}.$$

Pada persamaan (6), nilai waktu awal  $t_0$  dan keadaan awal  $x(t_0)$  diketahui dan bernilai tetap sehingga variasi dari  $x$  dan  $t$  pada saat  $t=t_0$  adalah nol. Akibatnya persamaan (7) menjadi :

$$\delta J_a = (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_f} - (H - \lambda^T \dot{x})\delta t|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} [(H_x + \dot{\lambda})^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt. \tag{8}$$

Fungsional  $J$  dapat mencapai nilai minimum jika  $\delta J_a=0$ . Hal ini dapat dicapai dengan membuat koefisien-koefisien dari  $\delta u$ ,  $\delta \lambda$ ,  $\delta t$  pada persamaan (8) sama dengan nol sehingga diperoleh persamaan state, costate, dan stasioner yang merupakan syarat perlu dalam kontrol optimal sebagai berikut:

Persamaan state

$$H_\lambda - \dot{x} = 0 \rightarrow H_\lambda = \dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Persamaan costate

$$H_x - \dot{\lambda} = 0 \rightarrow H_x = \dot{\lambda} \rightarrow \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Syarat stasioner

$$H_u = 0 \rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Secara ringkas, Prinsip Minimum Pontryagin dituliskan sebagai berikut.

Model Sistem:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

Fungsional Objektif :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

Persamaan Hamilton:

$$H(x, u, t, \lambda) = L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t)$$

Pengontrol Optimum

Persamaan state :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Persamaan costate :} & \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ \text{Syarat Stasioner :} & \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \forall u \in U \\ \text{Syarat Batas:} & \quad \lambda(t_f) = 0, H(t_f) = 0, \lambda(x(t_f)) = 0 \end{aligned}$$

### **METODE PENELITIAN**

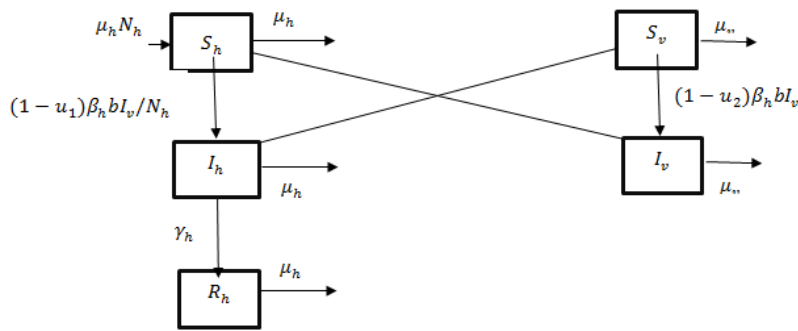
Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori yang bertujuan untuk menentukan model matematika dengan kontrol optimal, menentukan penyelesaian kontrol optimal, dan mensimulasikan model. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah memformulasi model, mencari penyelesaian kontrol optimal dan mensimulasikan model. Pada tahap formulasi model, dilakukan penambahan variabel pada model yang telah ada sehingga terbentuk model baru. Selanjutnya, Pada tahap penyelesaian kontrol optimal, dicari penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan metode prinsip minimum Pontryagin. Ada beberapa langkah yang dilakukan dalam menentukan penyelesaian kontrol optimal yakni mendefinisikan fungsi Lagrange, mendefinisikan fungsi Hamiltonian, menentukan persamaan state dan persamaan Costate, dan uji turunan kedua. Kemudian pada tahap simulasi, dilakukan pendeskritan dengan menggunakan metode dan disimulasikan menggunakan software maple.

### **HASIL DAN PEMBAHASAN**

#### **Model SIR dengan Kontrol**

Model matematika penyebaran penyakit DBD dengan kontrol optimal berdasarkan model SIR dengan vaksinasi. Pada model ini, populasi (N) dibagi menjadi lima kelas yaitu: kelas *Susceptible*  $S_h$  menyatakan jumlah manusia berpotensi terinfeksi virus (sehat tetapi dapat terinfeksi) penyakit DBD, kelas *Infected*  $I_h$  menyatakan jumlah manusia terinfeksi virus (telah menjadi DBD aktif) dan dapat menularkan penyakit DBD, kelas *Recovered*  $R_h$  menyatakan jumlah manusia yang telah sembuh atau sembuh melalui vaksinasi yang menjadikan kekebalan permanen, kelas *Susceptible Vektor*.  $S_v$  menyatakan jumlah nyamuk yang berpotensi membawa virus, dan kelas *Infected*  $I_v$  menyatakan jumlah nyamuk yang terinfeksi. Besarnya populasi manusia (host) dinyatakan  $N_h = S_h + I_h + R_h$ , dan besarnya populasi nyamuk (vektor) dinyatakan  $N_v = S_v + I_v$ .

Model penyebaran penyakit demam berdarah yang melibatkan kontrol dapat dituliskan seperti Gambar 3.



Gambar 3. kompartemen penyakit demam berdarah dengan kontrol (vaksinasi)  
 Dari model diatas dapat dituliskan kedalam sistem persamaan (9).

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S_h &= \mu_h N_h - \frac{\beta_h b I_v}{N_h} (1 - u_1) S_h I_v - \mu_h S_h, \\
 \frac{d}{dt} I_h &= \frac{\beta_h b I_v}{N_h} (1 - u_1) S_h I_v - (\mu_h + \gamma_h) I_h \\
 \frac{d}{dt} R_h &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \\
 \frac{d}{dt} S_v &= \mu_v N_v - \frac{b \beta_v}{N_h} (1 - u_2) I_h S_v - \mu_v S_v \\
 \frac{d}{dt} I_v &= \frac{\beta_v b}{N_h} (1 - u_2) I_h S_v - \mu_v I_v
 \end{aligned} \tag{9}$$

**Penyelesaian Kontrol Optimal**

Penyelesaian kontrol optimal diperoleh dengan menggunakan metode prinsip minimum Pontryagin. Metode ini merupakan pengembangan dari kalkulus variasi, sehingga untuk menyelesaikannya, terlebih dahulu akan ditentukan fungsi hamiltoniannya. Kemudian menentukan persamaan state, costate, dan kondisi stasioner. Selanjutnya, menentukan persamaan kontrol optimal, sehingga diperoleh persamaan (10) dan (11).

$$u_1 = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, - \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) \left( \frac{\beta_h b I_v}{N_h} S_h I_v \right)}{2} \right\} \right\} \tag{10}$$

$$u_2 = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{(\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) \left( \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v \right)}{2} \right\} \right\} \tag{11}$$

**Simulasi**

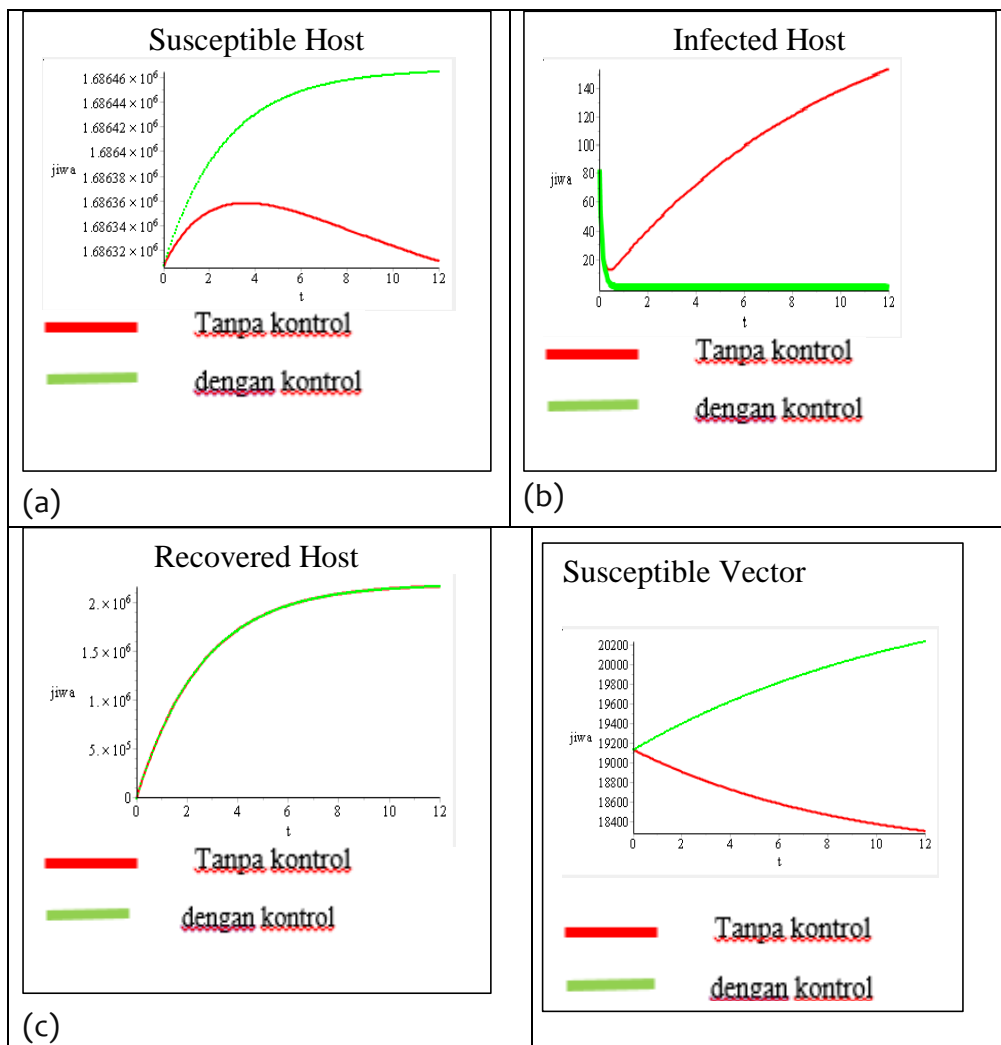
Langkah pertama simulasi model dengan memasukkan tebakan awal pada kontrol vaksinasi  $u_1$  dan  $u_2$ . Kemudian mensubstitusikan tebakan awal nilai kontrol pada persamaan state. Selanjutnya nilai kontrol dan persamaan state disubstitusikan ke persamaan co-state dengan kondisi stasioner. Nilai persamaan state dan co-state disubstitusi kembali ke variabel kontrol, sehingga diperoleh variabel kontrol. Simulasi persamaan state dan co-state diselesaikan dengan menggunakan program Maple. Adapun parameter dan nilai awal yang digunakan seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter

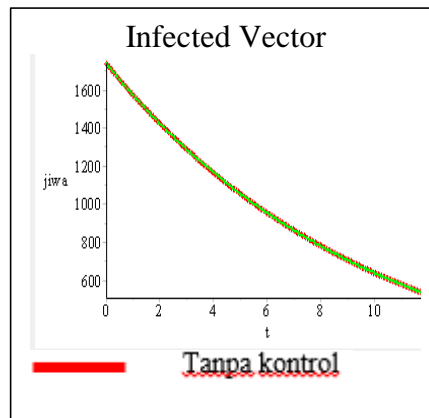
Parameter	Nilai
$\gamma_h$	0,1667
$\mu_h$	0,0000385
$\mu_v$	0,1
$\beta_h$	0,02808
$\beta_v$	0.375
b	0.5
$u_1$	0.9
$u_2$	0.9

**Kontrol Efektifitas Vaksinasi**

Kontrol  $u(t)$  untuk mengontrol efektifitas vaksinasi dalam upaya menekan jumlah sub populasi individu terinfeksi dari awal sampai  $t = 12$  bulan. Hasil yang diperoleh dari simulasi seperti pada Gambar 4.







Gambar 4. (a) plot populasi manusia yang rentan penyakit demam berdarah ( $S_h$ ), dengan kontrol  $u = 0,9$ , (b) plot sub populasi manusia terinfeksi ( $I_h$ ) dengan kontrol  $u = 0,9$ , (c) sub populasi manusia Sembuh dengan control  $u = 0,9$ , (d) plot populasi nyamuk rentan dengan kontrol  $u = 9$ , (e) plot populasi nyamuk terinfeksi  $u = 0,9$

Gambar 4 menunjukkan perbedaan jumlah pada setiap populasi sebelum dan sesudah diberi kontrol. Gambar 4 (a) menunjukkan kelas populasi manusia yang rentan penyakit mengalami penurunan setelah diberi kontrol. Gambar 4 (b) menunjukkan perubahan pada jumlah kelas populasi manusia terinfeksi penyakit, mengalami penurunan setelah diberi kontrol. Gambar 4 (c) pada kelas populasi manusia sembuh mengalami kenaikan setelah diberi kontrol.

## KESIMPULAN

Penelitian yang telah dilakukan menghasilkan model penyebaran demam berdarah dengan kontrol vaksinasi. Penelitian ini juga menghasilkan bentuk kontrol optimal yaitu persamaan state dan fungsi kontrol. Hasil simulasi menggunakan software maple menghasilkan grafik yang menunjukkan perubahan signifikan pada semua kelas populasi baik sebelum diberi kontrol dan sesudah diberi kontrol. Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan metode lain dalam penyelesaian kontrol optimalnya. Selain itu, dapat pula dikembangkan dengan menggunakan model yang berbeda dan menambahkan variabel baru seperti faktor biaya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ikhtisholiah. (2011). Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol Pada Model Tipe Epidemic SIR Dengan Vaksinasi. <http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-17439-Paper-1377307.pdf>. diakses pada tanggal 23 Maret 2017.
- Kemenkes RI. (2010). Buletin Jendela Epidemiologi Demam Berdarah Dengue. Jakarta: Pusat Data dan Surveilans Epidemiologi Kemenkes RI.

- Leleury, Z.A. (2017). Analisis Stabilitas Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Provinsi Maluku. *Jurnal Matematika*, Vol 7 ( 2). 144-158.
- Setiawan. (2012). *Kontrol Optimal Penyebaran Tuberculosis dengan Exogenous Reinfection*. (Tesis,tidak dipublikasikan).Program Studi Magister Matematika. Universitas Indonesia. Depok.
- Side,S. (2014). *Pemodelan matematika SIR dan SEIR* :Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar. Makassar.