KORESPONDENSI KARAKTER TERRESTRIKSI DAN TERINDUKSI BESERTA TABEL KARAKTER DARI REPRESENTASI GRUP HINGGA

Restu Cahyaningsih dan Budi Surodjo
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Email: restucn@yahoo.com

Abstract. A representation of finite group G describes every $g \in G$ to representation matrices. If we encode it with a complex-valued function defined as the trace of that matrix then is called the character. Instead of the uniqueness of decomposition representation cause character of G can be presented by character table that the rows correspond to irreducible character and the columns correspond to conjugacy classes. The table describe the structure of G and since there are rows and columns orthogonality of character table then its invertible. A restricted character to subgroup $H \leq G$ is the restriction of the character representation of a group G to H. Furthermore, the induced character for G is the sum of all irreducible characters on conjugacy classes of H that contained in conjugacy classes of G divided by cardinality of H. The correspondence both of them describe that the characters are adjoint and there are irreducibility of relevant representations.

Abstrak. Representasi grup G mendeskripsikan setiap elemen $g \in G$ ke dalam matriks representasi. Pengaitan setiap representasi dengan pemetaan bernilai kompleks yang didefinisikan sebagai trace dari matriks tersebut selanjutnya disebut karakter dari representasi grup G. Adanya ketunggalan dekomposisi representasi mengakibatkan karakter dari G dapat disajikan dalam bentuk tabel karakter yang barisnya berkorespondensi dengan karakter iredusibel dan kolomnya dengan kelas konjugasi. Tabel karakter menjelaskan tentang struktur grup G dan bersifat invertible karena adanya orthogonalitas baris dan orthogonalitas kolom. Karakter terrestriksi pada subgrup $H \leq G$ adalah restriksi dari karakter representasi grup G pada H. Lebih lanjut, karakter terinduksi untuk G adalah jumlahan nilai karakter iredusibel pada kelas konjugasi H yang termuat pada kelas konjugasi G dibagi kardinalitas dari H. Korespondensi keduanya mendeskripsikan bahwa kedua karakter tersebut saling adjoin dan representasi yang terkait bersifat iredusibilitas.

Kata kunci: Induksi, Iredusibel, Karakter, Representasi, Restriksi, Tabel Karakter.

Pada akhir abad ke-19, bagian terpenting yang dipelajari dari Teori Grup adalah berkaitan dengan cara mendeskripsikan grup tersebut. Hal inilah yang menjadi permasalahan utama dalam Teori Representasi Grup. Representasi grup hingga G merupakan suatu homomorfisma yang memetakan setiap anggota di G ke dalam grup linear $GL\ (V)$ (Dummit, 2004).

Lebih lanjut, berdasarkan Teorema Maschke, setiap representasi grup hingga G merupakan jumlahan langsung berhingga representasi iredusibel (Steinberg, 2012). Oleh karena itu, representasi iredusibel menjadi dasar utama yang menarik untuk mengetahui tunggal atau tidaknya dekomposisi representasi.

Untuk memahami struktur yang lebih kecil dari grup G, analisis restriksi representasi φ dapat dilakukan pada subgrup $H \leq G$. Sebaliknya jika dipunyai representasi H maka secara umum struktur dari H dapat diperluas menjadi lebih kompleks menggunakan metode induksi (Serre, 1977).

Di sisi lain, karena $GL(V) \cong GL_n(F)$, berarti setiap elemen $g \in G$ dideskripsikan dalam sebuah matriks berukuran $n \times n$ relatif terhadap basis dari V (Kosmann, 2010). Oleh karena itu, bagaimana cara mengaitkan setiap representasi grup G dengan pemetaan bernilai kompleks sehingga pemetaan ini dapat mewakili matriks representasi. Bilangan kompleks tersebut nantinya yang akan menjelaskan informasi tentang struktur dari grup G (Serre, 1977). Hal ini menarik untuk diselidiki lebih lanjut.

Matriks yang similar pasti mempunyai nilai eigen yang sama sehingga menghasilkan nilai trace yang sama pula (Isaacs, 1976). Oleh karena itu, dengan mengambil trace dari matriks representasinya, pengolahan informasi grup G akan lebih efisien daripada keseluruhan matriks representasinya. Trace dari matriks representasi tersebut selanjutnya merupakan karakter dari representasi grup G (Steinberg, 2012).

Pada tulisan ini akan dikaji tentang karakter dari representasi grup G. Selain itu, akan dikaji pula pembentukan tabel karakter yang terkait dengan kelas konjugasi dan karakter iredusibel yang selanjutnya juga dioperasikan restriksi pada subgrup $H \leq G$ dan induksi dari subrepresentasinya se-hingga akan diperoleh korespondensi dari karakter terrestriksi dan terinduksi. Pada tulisan ini diasumsikan grup yang akan dibicarakan adalah grup hingga dengan ruang vektornya juga berdimensi hingga atas lapangan kompleks.

PENGANTAR

Pertama diberikan definisi mengenai representasi dan ekuivalensi.

Definisi 2.1. Diketahui G grup hingga dan V ruang vektor atas F dengan dim $(V) < \infty$. Representasi φ dari G pada V atas F adalah homomorfisma $\varphi: G \to GL(V)$ yaitu $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ untuk setiap $g_1, g_2 \in G$.

Definisi 2.2. Diketahui G grup hingga dan F^n ruang vektor atas F dengan dim $(F^n) = n$. Representasi φ dari G pada F^n atas F adalah homomorfisma $\varphi: G \to GL_n(F)$ yaitu $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1)\, \varphi(g_2)$untuk setiap $g_1, g_2 \in G$.

Selanjutnya suatu representasi disebut iredusibel jika memenuhi definisi berikut:

Definisi 2.3. Representasi tak nol $\varphi: G \to GL(V)$ dari grup G dikatakan iredusibel jika $V \neq \{0\}$ dan jika subruang G-invarian dari V hanya $\{0\}$ dan V.

Dua representasi dikatakan ekuivalen jika terdapat isomorfisma seperti definisi berikut:

Definisi 2.4. Dua representasi $\varphi : G \to GL(V)$ dan $\psi : G \to GL(W)$ dikatakan ekuivalen jika terdapat isomorfisma $T: V \to W$ sedemikian sehingga

$$\varphi_g = T^{-1} \psi_g T, \forall g \in G.$$

Dalam hal ini ditulis $\varphi \sim \psi$.

KARAKTER DAN KETUNGGALAN DEKOMPOSISI REPRESENTASI

Untuk menunjukkan ketunggalan dekomposisi representasi ke dalam jumlahan langsung berhingga representasi iredusibel, representasi φ harus dikaitkan dengan pemetaan $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ yang menandakan keseluruhan representasi.

Karakter

Teorema 3.1. (Kosmann, 2010) Diketahui $\varphi : G \to GL(V)$ representasi dari grup G. Pemetaan $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ dengan definisi

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g), \forall g \in G.$$

disebut karakter dari φ. Untuk representasi matriks dengan dimensi n, didefinisikan

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g).$$

Seperti halnya pada representasi, karakter juga mempunyai beberapa sifat elementer yang dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 3.2. (Kosmann, 2010) Jika diketahui φ, ρ representasi dari grup G maka pernyataan berikut berlaku.

(a) $\chi_\varphi(1) = \deg \varphi$.

(b) $\forall g \in G, \chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$.

(c) $\forall g, h \in G,\ \chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1})$.

(d) $\chi_{(\varphi \oplus \rho)} = \chi_\varphi + \chi_\rho$.

(e) $\chi_{(\varphi \otimes \rho)} = \chi_\varphi \times \chi_\rho$.

Lebih lanjut, karakter dari suatu representasi juga berhubungan dengan ekuivalensi dari representasi tersebut sehingga diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.3. (Serre, 1977) Diberikan dua representasi φ dan ρ. Jika representasi $\varphi \sim \rho$ maka $\chi_\varphi = \chi_\rho$.

Ketunggalan Dekomposisi Representasi

Sebelum mendekomposisikan karakter sebagai jumlahan langsung berhingga dari karakter iredusibel akan dijelaskan tentang aljabar grup berikut.

Definisi 3.4. (Steinberg, 2012) Dike tahui G grup. Didefinisikan

$$L(G) = \mathbb{C}^G = \{ f \mid f : G \to C \}.$$

Himpunan $L(G)$ merupakan ruang Hermit dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar dan didefinisikan pemetaan $\langle \cdot, \cdot \rangle : L(G) \times L(G) \to \mathbb{C}$ berikut.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}, \tag{1}$$

untuk setiap $f_1, f_2 \in L(G)$.
Untuk selanjutnya, $L(G)$ disebut aljabar grup dari G.

Teorema 3.5. (Relasi Orthogonal Schur). (Steinberg, 2012) Jika $\varphi : G \to U_n(\mathbb{C})$ dan $\rho : G \to U_m(\mathbb{C})$ representasi uniter iredusibel yang tidak ekuivalen maka pernyataan berikut berlaku.

(1) $\langle \varphi_{ij}, \rho_{kl} \rangle = 0$;

(2) $\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n}, jika\ i = k\ dan\ j = l; \\ 0, lainnya. \end{cases}$

Diberikan representasi iredusibel $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ dari G yang tidak ekuivalen satu sama lain dengan $N = |Cl(G)|$. Sebut saja perwakilannya $\varphi^{(i)}, i = 1, \dots, N$.

Definisi 3.6. (Kosmann, 2010) Diberikan representasi φ dari G yang dinyatakan dalam dekomposisi berikut.

$$\varphi = m_1 \varphi^{(1)} \oplus \dots \oplus m_N \varphi^{(N)}$$

dengan m_i bilangan bulat nonnegatif yang disebut multiplisitas dari $\varphi^{(i)}$,di dalam φ dan $\varphi^{(i)}$ merupakan representasi iredusibel G.

Definisi 3.6 di atas menjelaskan bahwa dekomposisi dari sebarang representasi ke dalam representasi iredusibel tidak tunggal. Oleh karena itu, pada teorema berikut diberikan kondisi agar dekomposisi tersebut tunggal yaitu menggunakan relasi orthogonal antara karakter iredusibelnya.

Teorema 3.7. (Relasi Orthogonal Per-tama). (Isaacs, 1991) Jika φ,ρ representasi iredusibel dari grup G maka persamaan berikut berlaku.

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, \varphi \sim \rho; \\ 0, \varphi \nsim \rho. \end{cases}$$

Lebih lanjut, multiplisitas di atas akan bernilai tunggal jika didefinisikan sebagai produk Hermit karakter iredusibel dengan karakter representasinya seperti berikut.

Teorema 3.8. (Kosmann, 2010) Dike-tahui φ sebarang representasi dari G dan χ_φ karakter dari φ. Jika φ representasi iredusibel dari G maka

$$\varphi = \oplus_{i=1}^{N} m_i \varphi^{(i)},$$

dengan $m_i = \langle \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_\varphi \rangle$.

Banyaknya representasi iredusibel dari G dapat dilihat dari derajat representasi iredusibel tersebut dengan membentuk $d_i = \deg \varphi^{(i)}$. Diambil $\chi_i = \chi_{\varphi^{(i)}}$, untuk $i = 1, \ldots, N$, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.9. (Steinberg, 2012) Diketahui L representasi reguler dari grup G. Dekomposisi berikut berlaku.

$$L \sim d_1 \varphi^{(1)} \oplus \ldots \oplus d_N \varphi^{(N)}.$$

Akibat 3.10. (Serre, 1977) [4] Jika derajat dari $\varphi^{(i)} = d_i$ maka $|G| = \sum_{i=1}^{N} d_i^2$.

Teorema 3.11. (Serre, 1977) Karakter karakter $\chi_1, \ldots, \chi_N$ membentuk basis orthonormal dari $(L(G))$.

Teorema 3.12. (Serre, 1977) Diberikan grup G. Banyaknya representasi iredusibel dari G (*up to* isomorfisma) sama dengan banyaknya kelas konjugasi dari G

TABEL KARAKTER, KARAKTER TERRESTRIKSI, DAN KARAKTER TERINDUKSI

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa banyaknya representasi iredusibel dari G sama dengan banyaknya kelas konjugasi dari G sehingga jika dikaitkan maka dapat dibentuk dalam tabel karakter yang didefinisikan seperti berikut.

Definisi 4.1. (Tabel Karakter). Diketahui G grup hingga dengan karakter iredusibel $\chi_1, \ldots, \chi_s$ dan kelas-kelas konjugasi G adalah $C_1, \ldots, C_s$. Tabel karakter grup G adalah matriks X berukuran $s \times s$ dengan $X_{ij} = \chi_i(C_j)$. Dengan kata lain, baris dari X berisi indeks dari karakter iredusibel G dan kolom dari X berisi indeks dari kelas konjugasi G dan entri ke-ij merupakan nilai dari karakter iredusibel ke$-i$ pada kelas konjugasi ke$-j$.

Berikut ini diberikan contoh pembentukan tabel karakter dari sebarang representasi grup hingga G.

Contoh 4.2. Berikut adalah tabel karakter S_5 dengan kelas konjugasi S_5 adalah $Cl(S_5) = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ $(1\ 2), (1\ 2\ 3)(4\ 5), (1\ 2\ 3\ 4)\}$.

Tabel 1. Tabel Karakter S_5

$Cl(S_5)$	1	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4 5)	(1 2)	(1 2 3)(4 5)	(1 2 3 4)
$\|C\|$	1	15	20	24	10	20	30
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_ϕ	4	0	1	-1	2	-1	0
$\chi_\phi \times \chi_\varepsilon$	4	0	1	-1	-2	1	0
χ_5	5	1	-1	0	1	1	-1
$\chi_5 \times \chi_\varepsilon$	5	1	-1	0	-1	-1	1
χ_6	6	-2	0	1	0	0	0

Contoh 4.3. Tabel karakter D_{2n} untuk n genap. Diberikan kelas konjugasi D_{2n} yaitu $Cl(D_{2n}) = \{1, \{r^{\frac{n}{2}}\}, \{r^j, r^{-j} \mid 1 \le j \le \frac{n}{2} - 1\}\}$, $\{r^j s \mid$ j genap$\}$, $\{r^j s \mid$ j ganjil$\}$. Dari sini, diperoleh empat buah karakter iredusibel berdimensi 1 dan satu buah representasi berdimensi 2. Berikut adalah tabel karakter D_{2n} untuk n genap.

Tabel 2. Tabel Karakter D_{2n}, n genap

$Cl(D_{2n})$	r^k	sr^k
χ_{triv}	1	1
χ_{ε}	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
χ_{ρ}	$2\cos\frac{2\pi hk}{n}$	0

Selanjutnya akan ditunjukkan tabel karakter D_{2n} untuk n ganjil. Diberikan kelas konjugasi D_{2n} yaitu $(D_{2n}) = \{1, \{r^j, r^{-j} \mid 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}\}, \{r^j s \mid 0 \leq j \leq n-1\}\}$. Dari sini, diperoleh dua buah karakter iredusibel berdimensi 1 dan satu buah representasi berdimensi 2. Berikut tabel karakter D_{2n} untuk n ganjil.

Tabel 3. Tabel Karakter D_{2n}, n ganjil

$Cl(D_{2n})$	r^k	sr^k
χ_{triv}	1	1
χ_{ε}	1	-1
χ_{ρ}	$2\cos\frac{2\pi hk}{n}$	0

Teorema berikutnya menegaskan bahwa orthogonalitas tidak hanya berlaku antara karakter iredusibel dari suatu representasi tetapi juga pada nilai karakter antara dua buah kelas konjugasi yang berbeda.

Teorema 4.4. (Relasi Orthogonal Kedua). Diketahui C, C' merupakan kelas-kelas konjugasi dari grup G. Jika diambil sebarang elemen $g \in C$ dan $h \in C'$, maka

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\,\overline{\chi_\iota(h)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|}, C = C'; \\ 0, C \neq C'. \end{cases}$$

Akibatnya, kolom-kolom dari tabel karakter saling orthogonal dan dengan demikian tabel karakter invertibel. Lebih lanjut, dari tabel karakter dapat ditemukan subgrup normal dari G. Hal tersebut dijelaskan pada definisi dan teorema berikut.

Definisi 4.5. Jika $N \lhd G$ dan $\widetilde{\chi_\iota}$ karakter iredusibel grup G/N maka karakter iredusibel dari G seperti berikut.

$$\chi_i(g) = \widetilde{\chi_\iota}(Ng), g \in G$$

disebut *lift* dari karakter untuk G.

Teorema 4.6. Jika $N \lhd G$ maka terdapat karakter iredusibel $\chi_1, \ldots, \chi_s$ dari G sedemikian sehingga

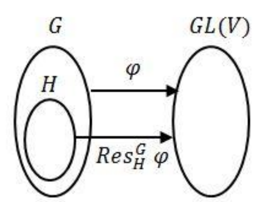
$$N = \bigcap_{i=1}^{s} Ker\,\chi_i$$

dengan $Ker\,\chi_i = \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1)\}$.

Contoh 4.7. Pada Tabel 1 Karakter dari S_5 diperoleh bahwa subgrup normal dari S_5 adalah $N = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 5\ 4\ 3\ 2)\} = A_5$.

Karakter Terrestriksi

Perhatikan diagram berikut.



Gambar 1. Diagram Restriksi

Definisi 4.8. Diketahui $\varphi: G \to GL\,(V)$ representasi grup G dan $H \leq G$. Restriksi dari representasi φ pada H adalah homomorfisma $Res_H^G\varphi: H \to GL\,(V)$ yaitu

$Res_H^G\varphi\ (h_1 * h_2) = \ Res_H^G\varphi\ (h_1) \circ Res_H^G\varphi\ (h_2)$
untuk setiap $h_1, h_2 \in\ H$.

Contoh 4.9. Perhatikan representasi $\rho : S_3 \rightarrow GL_3(C)$. Diketahui $H = C_2 \leq S_3$. Jika representasi iredusibel dari S_3 adalah representasi trivial, ε, dan ρ, maka restriksi dari ketiga representasi pada H adalah

1. Karena representasi trivial dari S_3 sama dengan di C_2 maka diperoleh $Res_{C_2}^{S_3}Id$ adalah $Id: C_2 \rightarrow\ \mathbb{C}^*$.
2. $Res_{C_2}^{S_3}\varepsilon\ =\ \tau$, dengan $\tau\ :\ C_2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ merupakan representasi non trivial.
3. $Res_{C_2}^{S_3}\rho\ =\ Id\oplus\tau$.

Definisi 4.10. Diberikan subgrup $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$ dan representasi restriksi $\mathrm{Res}_\mathrm{H}^\mathrm{G}\varphi\mathrm{: H} \rightarrow GL\ (V)$ Untuk setiap $h\ \in\ H$ didefinisikan karakter terrestriksi $\chi_{Res_H^G}\ \varphi\text{:}\ \ H \rightarrow \mathbb{C}$ yaitu

$$\chi_{Res_H^G\varphi}(h) = Tr\ (Res_H^G\varphi\ (h)) = Res_H^G\chi_\varphi\ (h)\ .$$

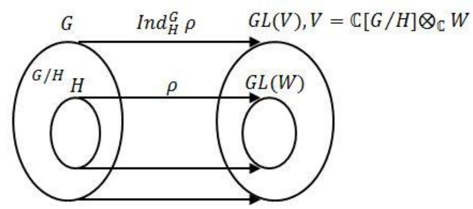
Contoh 4.11. Perhatikan Tabel Karakter 1 dari grup simetri S_5. Diketahui $A_5\ \leq\ S_5$ dengan $|A_5| = 60$. Akan dicari karakter terrestriksi untuk A_5. Diketahui juga $(A_5) = \{1, (\ 1\ 2\ 3\ ), (\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ ), (\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ ), (\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2\ )\}$. Perhatikan bahwa kelas konjugasi (1 2 3 4 5) di S_5 menjadi dua kelas konjugasi yang berbeda di A_5. Untuk setiap $C \in Cl\ (A_5)$ diperoleh karakter terrestriksi berikut.

Tabel 4. Tabel Karakter Terrestriksi A_5

$Cl(A_5)$	1	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 5 4 3 2)
$\|C\|$	1	20	15	12	12
$\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5}\chi_{triv}$	1	1	1	1	1
χ_{ψ_3}	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_{ρ_3}	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5}\chi_\phi$	4	1	0	-1	-1
$\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5}\chi_5$	5	-1	1	0	0

Karakter Terinduksi

Induksi perlu dilakukan dengan cara menambah dimensi untuk memperluas representasi dari H menjadi representasi untuk G seperti diilustrasikan pada diagram berikut.



Gambar 2. Diagram Induksi

Definisi 4.12. Diketahui H subgrup G dan W subruang G-invarian dari V. Diketahui juga $\rho : H \rightarrow GL\ (W)$ representasi. Representasi φ dikatakan diinduksi oleh representasi ρ dari H di W atau dinotasikan dengan $Ind_H^G\ (\rho): G \rightarrow GL\ (V)$ jika $V =\ \mathbb{C}\ [G/H]\ \otimes_\mathbb{C}\ \ W$.

Berdasarkan Definisi 4.9, perluasan
dimensi representasi terinduksi dapat di-
lakukan dengan cara berikut.

(i) Pilih himpunan dari koset kirikatakan $sH = \{s_1, \ldots, s_r\}$ dari H di G yang berarti untuk setiap $g\ \in\ G$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $g\ =\ s_jh$ untuk suatu $s_j\ \in sH, h\ \in H$.

(ii) Jika $W_\sigma, \sigma \in G/H$ merupakan ruang vektor dengan basis sH maka $V = \mathbb{C}\ [G/H]\ \otimes_\mathbb{C}\ \ W$.

(iii) Setiap $x \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\sum_{\sigma\in\ G/H} x_\sigma$ dengan $x_\sigma\ \in\ W_\sigma$ untuk setiap $\sigma \in G/H$.

(iv) Kondisi tersebut diperluas untuk representasi G menggunakan linearitas dari $Z(L(H)) \rightarrow Z(L\ (G))$.

Teorema 4.13. Diketahui $H \leq G$ dan $g_1, \ldots, g_m$ merupakan perwakilan koset-koset kiri yang berbeda dari H di dalam G. Jika $\rho: H \to GL\,(W)$ representasi matriks berderajat n maka representasi matriks $Ind_H^G \rho : G \to GL\,(V)$ dengan $V = \mathbb{C}\,[G/H] \otimes_{\mathbb{C}} W$ berderajat mn atas F dan terdapat basis dari V sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ didefinisikan matriks representasi $\Phi(g)$ berikut.

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \rho(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \rho(g_1^{-1}gg_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(g_m^{-1}gg_1) & \cdots & \rho(g_m^{-1}gg_m) \end{pmatrix}$$

dengan setiap $\rho(g_i^{-1}gg_j)$ merupakan blok matriks berukuran $n \times n$ yang muncul pada posisi ke-i,j dari $\Phi(g)$ dan didefinisikan sebagai blok matriks nol jika $g_i^{-1}gg_j \notin H$.

Lemma 4.14. Derajat dari representasi terinduksi $Ind_H^G \rho$ sama dengan hasil kali deg ρ dan indeks $[G : H]$ dari H.

Contoh 4.15. Diketahui $H = \{1, s, r^3, sr^3\} \leq G = D_{12}$ dan $\psi : H \to GL_2(\mathbb{R})$ representasi atas lapangan $\mathbb{Q}$. Jika basis dari $\mathbb{R}^2$ adalah w_1, w_2 maka representasi matriks dari ψ didefinisikan sebagai berikut.

$$\psi(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A, \psi(r^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B,$$

$$\psi(sr^3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C,$$

sehingga diperoleh $n = 2$ dan $m = 3$ dan derajat dari representasi Terinduksi Φ adalah $mn = 6$. Pilih perwakilan dari koset kiri dari H di G yaitu $g_1 = 1, g_2 = r$ dan $g_3 = r^2$ atau dapat ditulis $g_k = r^{k-1}$. Jadi,

$$g_i^{-1}rg_j = r^{-(i-1)+1+(j-1)} = r^{j-i+1}, \text{ dan}$$
$$g_i^{-1}sg_j = sr^{(i-1)+(j-1)} = sr^{i+j-2}.$$

Dengan kata lain, matriks berukuran 6×6 untuk representasi terinduksi $Ind_H^{D_{12}}\,\psi$ adalah

$$\Phi(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \Phi(s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix}$$

dengan A, B, C matriks yang diberikan sebelumnya, I matriks identitas dan 0 matriks nol berukuran 2×2.

Lemma 4.16. Diberikan subgrup $H \leq G$ dan karakter dari representasi ρ dari H adalah χ_ρ. Didefinisikan karakter terinduksi $Ind_H^G\,\chi_\rho$ pada G yaitu

$$Ind_H^G\,\chi_\rho(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^{m} \chi_\rho(g_i^{-1}gg_i)$$

dengan $\chi_\rho(g_i^{-1}gg_i) = 0$,untuk $g_i^{-1}gg_i \notin H$.

Berikut ini diberikan teorema yang menegaskan tentang ketunggalan dan eksistensi dari representasi terinduksi.

Teorema 4.17. Diketahui $\rho : H \to GL\,(W)$ representasi dari H. Terdapat representasi terinduksi $Ind_H^G\,\rho : G \to GL\,(V)$ dari G dan bersifat tunggal *up to* isomorfisma.

Selanjutnya karakter terinduksi juga dapat disajikan dalam bentuk tabel karakter seperti berikut.

Teorema 4.18. Diketahui $Ind_H^G \chi_\varphi$ karakter terinduksi dari grup G dan (1) kelas konjugasi trivial dari G. Karakter terinduksi pada (1) adalah $Ind_H^G \chi_\varphi\,(1) = [G : H]\chi_\varphi(1)$.

Teorema 4.19. Diketahui $H \leq G$ grup hingga dan $\varphi : G \to GL\,(V)$ dengan $\chi_\varphi \in Z\,(L\,(G))$. Diketahui juga $C \in Cl\,(G)$ kelas konjugasi. Jika $D_1, \ldots, D_k$ kelas-kelas konjugasi dari H yang termuat di C maka

$$Ind_H^G \chi_\varphi\,(C) = \frac{[G:H]}{|C|}\sum_{i=1}^{k} |\,D_i\,|\ \chi_\varphi\,(D_i)\ . \qquad (2)$$

Lebih lanjut, jika $k > 1$ maka kelas konjugasi C terpisah.

Contoh 4.20. Diketahui $H = S_2 \leq G = S_3$ dan $\rho: H \to GL_2(C)$ representasi. Jika kelas konjugasi dari S_2 adalah $Cl\ (S_2) = \{(1)\ ,$ $(1\ 2)\}$ maka tabel karakter yang terkait karakter iredusibel dari S_2 adalah sebagai berikut.

Tabel 5. Tabel Karakter Terinduksi S_3

$Cl(S_3)$	1	(1 2)	(1 2 3)
$\lvert C\rvert$	1	3	2
$S_2 : \lvert D_i\rvert$	1:1	(1 2):1	
$\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}\chi_{triv}$	3	1	0
$\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}\chi_{\varepsilon}$	3	-1	0

Korespondensi dari Karakter Terrestriksi dan Karakter Terinduksi

Hubungan antara representasi terrestriksi dan representasi terinduksi akan berimbas pada korespondensi dari masing masing karakternya. Relasi adjoin antara homomorfisma Res_H^G dan Ind_H^G mengakibatkan karakter terrestriksi dan karakter terinduksi bersifat saling asing seperti terangkum dalam teorema berikut.

Teorema 4.21. (Timbal Balik Frobenius). Diketahui H subgrup G. Jika χ_ρ karakter dari representasi H dan χ_φ karakter dari representasi G maka persamaan berikut berlaku.

$$\left\langle Ind_H^G\, \chi_\rho, \chi_\varphi \right\rangle = \langle \chi_\rho, Res_H^G \chi_\varphi \rangle$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa jika dipunyai representasi ρ dari $H \leq G$ yangdiinduksi ke dalam grup G dan direstriksi kembali ke H maka dari sini dapat diperoleh korespondensi antara representasi terrestriksi dan terinduksi. Korespondensi tersebut mendeskripsikan apakah representasi tersebut dapat didekomposisikan atau iredusibel.

Teorema 4.22. (Dekomposisi Mackey). Jika H dan K subgrup G serta S himpunan dari perwakilan koset ganda $H \backslash G \,/\, K$ maka untuk setiap $\in Z\left(L\ (K)\right)$,

$$Res_H^G Ind_K^G f = \sum_{s \in S} Ind_{H \cap K^s}^H\ Res_{H \cap K^s}^{K^s} f^s$$

dengan $K^s = sKs^{-1}$ dan f^s merupakan representasi dari K^s yang didefinisikan oleh $f\ (sks^{-1}) = f^s(k)$.

Jika tidak dapat didekomposisikan maka korespondensi antara representasi terrestriksi dan terinduksi menghasilkan representasi iredusibel meskipun hal tersebut jarang sekali terjadi. Pada teorema berikut akan diberikan kondisi kapan suatu korespondensi tersebut menghasilkan representasi iredusibel.

Teorema 4.23. (Kriteria Iredusibilitas Mackey). Diketahui H subgrup G dan $\rho: H \to GL\,(V)$ representasi. Representasi Ind_H^G iredusibel jika dan hanya jika dua kondisi berikut dipenuhi.

(1) representasi ρ iredusibel, dan
(2) untuk setiap $g \in G/H$ kedua representasi $Res_{Hg}^H\, \rho$ dan $Res_{Hg}^H\, \rho^g$ tidak mempunyai konstituen iredusibel yang sama atau dengan kata lain produk Hermit keduanya sama dengan nol.

KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Ketunggalan dekomposisi represen-tasi ke dalam jumlahan langsung berhingga representasi iredusibel diperoleh dari produk Hermit karakter iredusibelnya.
2. Banyaknya representasi iredusibel dari G (*up to isomorfisma*) sama dengan banyaknya kelas konjugasi dari G sehingga

dengan adanya relasi orthogonal diperoleh bahwa tabel karakter tersebut invertibel.

3. Untuk mendapatkan representasi baru, operasi restriksi dilakukan pada domain yang lebih kecil sementara operasi induksi dilakukan dengan memperluas domain. Karakter yang terkait juga dapat direstriksi dan diinduksi pada kelas kon-jugasinya.
4. Korespondensi antara karakter ter-restriksi dan terinduksi bersifat saling adjoin dan representasi yang terkait bersifat iredusibilitas.

DAFTAR PUSTAKA

Dummit, D. S., 2004, *Abstract Algebra*, John Wiley and Sons, Inc., USA.

Isaacs, I. M., 1976, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York.

Kosmann, S., 2010, *Groups and Sym-metries,* Universitext, Springer, New York.

Serre, J. P., 1977, *Linear Represen-tations of Finite Groups* Springer-Verlag, New York.

Steinberg, B., 2012, *Representation Theory of Finite Groups*, Springer, New York.