

Analisis Pengendalian Kualitas Menggunakan Bagan Kendali Bivariat dengan Copula pada Industri Manufactur di Indonesia

Tika Endah Lestari¹
Sri Susilawati Islam²

^{1,2} Faculty of Engineering, Sampoerna University Jakarta
¹Email: tika.lestari@sampoernauniversity.ac.id

Abstract. Product quality control is an important factor for the industrial world because good quality control and carried out continuously will be able to detect abnormal production results quickly, so that anticipatory action can be taken immediately. Quality is a major factor in consumer decision making before buying goods / services. The problem that occurs at this time in manufacturing companies in Indonesia is how the statistical quality control process can be applied properly. The purpose of this statistical analysis is to find out the statistical quality control process that is applied to manufacturing companies in Indonesia using bivariate control charts with copula. Copula is a function that combines a multivariate distribution function with a uniform one-dimensional marginal distribution function, in this condition the Copula used is the Archimedean Copula group. The method used in this data collection is a simple random sampling with the sample used are three manufacturing companies in Indonesia which covers the areas of Jakarta, Bandung and Makassar. The implementation of Copula in this control chart results in Frank Copula being the best Copula, this supports that the use of Copula in the quality control process has a good role.

Keywords: Statistical Quality Control, Control Chart, Copula

INDONESIAN JOURNAL OF FUNDAMENTAL SCIENCES (IJFS)

E-ISSN: 2621-6728

P-ISSN: 2621-671X

Submitted: December, 4th 2019

Accepted: February, 2nd 2020



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

PENDAHULUAN

Perkembangan industri menyebabkan terjadinya persaingan yang cukup ketat antar perusahaan dalam menarik perhatian konsumen untuk menggunakan produk yang dihasilkan. Salah satu faktor yang mempengaruhi keputusan konsumen dalam memilih suatu produk adalah kualitas produk tersebut (Agustini, 2017; Fure dkk., 2015; Amilia, 2017). Mengingat pentingnya peranan kualitas produk dalam setiap perusahaan maka pengendalian kualitas produk sangat dibutuhkan dalam suatu proses produksi untuk menjaga kestabilan kualitas. Dalam pengendalian kualitas sering digunakan pengendalian proses statistic (Tanjong, 2013; Bakhtiar dkk., 2013; Ratnadi & Suprianto, 2020). Salah satu teknik pengendalian proses statistik adalah bagan kendali (Montgomery, 2009).

Pembuatan bagan kendali pada umumnya selalu didasarkan pada asumsi bahwa suatu proses produksi berdistribusi normal. Namun dalam kenyataannya, karakteristik kualitas proses produksi tidak selalu berdistribusi normal, oleh karena itu perlu dikembangkan alternatif bagan kendali. Pengendalian kualitas memiliki peranan penting dalam meningkatkan kualitas produk. Salah satu metode statistik yang digunakan dalam mengendalikan produk adalah penggunaan bagan kendali Copula. Pendekatan Copula adalah metode populer untuk pemodelan multivariat yang diterapkan di beberapa bidang; ini mendefinisikan ukuran ketergantungan non-parametrik antara variabel acak (Verdier, 2013).

METODE PENELITIAN

Bagan Kendali Univariat

Bagan kendali adalah suatu alat yang secara grafis digunakan untuk memonitor dan mengevaluasi apakah suatu proses berada dalam pengendalian kualitas secara statistika atau tidak, sehingga dapat memecahkan masalah dan menghasilkan perbaikan kualitas. Bagan kendali digunakan untuk membantu mendeteksi adanya penyimpangan dengan cara menetapkan batas-batas kendali. Batas – batas kendali pada bagan kendali antara lain batas kendali atas yang merupakan garis batas untuk suatu penyimpangan dari karakteristik sampel, garis pusat atau tengah merupakan garis yang melambangkan tidak adanya penyimpangan dari karakteristik sampel dan batas kendali bawah yang merupakan garis batas bawah untuk suatu penyimpangan dari karakteristik sampel.

Jika titik – titik sampel berada diantara batas kendali maka proses tersebut dikatakan in control. Titik pada suatu sampel yang berada di luar batas kendali menjadi sebuah tanda bahwa proses tersebut berada di luar kendali atau out of control. Jika proses produksi berada dalam keadaan tidak terkendali maka dibutuhkan suatu tindakan untuk menemukan dan mengeliminasi suatu penyebab.

Bagan Kendali Prediksi dengan Copula

Pembuatan bagan kendali identik dengan pembuatan selang kepercayaan. Pada bagan kendali prediksi hal serupa pun diterapkan, bahwasanya pembuatan bagan kendali prediksi pun dibuat berdasarkan asumsi selang prediksi. Pada penerapannya bagan kendali prediksi ini diharapkan dapat mengontrol proses apakah proses tersebut ada atau tidak dalam kondisi in control sesuai dengan konsep

bagian kendali pada umumnya, maka dari itu sebelum membuat bagian kendali prediksi ada beberapa tahap yang digunakan antara lain melakukan penaksiran parameter pada bagian kendali. Bagian kendali prediksi dibangun berdasarkan asumsi distribusi normal, maka dari itu penaksiran parameter menggunakan metode maksimum likelihood. Langkah pertama yang dilakukan yaitu menentukan fungsi likelihood dari tiap model. Dengan memaksimumkan fungsi tersebut, kita dapat menaksir parameternya. Pembuatan bagian kendali identik dengan pembuatan selang kepercayaan. Pada bagian kendali prediksi hal serupa diterapkan, bahwasannya pembuatan bagian kendali prediksi dibuat berdasarkan asumsi selang prediksi. Pada penerapannya bagian kendali prediksi ini diharapkan dapat mengontrol proses apakah proses tersebut ada atau tidak dalam kondisi in control sesuai dengan konsep bagian kendali pada umumnya, maka dari itu sebelum membuat bagian kendali prediksi ada beberapa tahap yang digunakan, penjelasan mengenai pembuatan bagian kendali dijelaskan pada sub bab berikut. Chen dkk., (1996) mengungkapkan Selang Prediksi merupakan prediksi nilai observasi masa depan yang berada di suatu selang yang memiliki batas atas dan batas bawah dengan suatu tingkat peluang tertentu. Penentuan keakuratan selang prediksi dapat dilakukan melalui peluang cakupan. Misalkan Y adalah peubah acak yang berdistribusi normal baku dan mempunyai fungsi distribusi $F_X(\cdot)$ dan $G_Y(\cdot)$, maka perhitungan selang prediksi pada tingkat peluang $1 - \alpha$ adalah sebagai berikut:

$$U_{\hat{\theta}(X)} = \hat{\mu} + (k \cdot \hat{\sigma}) = \hat{\mu} + \left(F_X^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) = \hat{\mu} + \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) \quad (1)$$

$$L_{\hat{\theta}(X)} = \hat{\mu} + (k \cdot \hat{\sigma}) = \hat{\mu} + \left(F_X^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) = \hat{\mu} + \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) \quad (2)$$

$$U_{\hat{\theta}(Y)} = \hat{\mu} + (k \cdot \hat{\sigma}) = \hat{\mu} + \left(F_Y^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) = \hat{\mu} + \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) \quad (3)$$

$$L_{\hat{\theta}(Y)} = \hat{\mu} + (k \cdot \hat{\sigma}) = \hat{\mu} + \left(F_Y^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) = \hat{\mu} + \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \hat{\sigma} \right) \quad (4)$$

Pemilihan Copula Terbaik yang digunakan dalam prediksi bagian kendali

Copula merupakan alat yang dapat digunakan untuk menganalisa kebergantungan peubah-peubah acak dalam struktur yang digambarkan oleh fungsi gabungan tersebut. Copula adalah suatu fungsi distribusi multivariate dimana setiap variable acaknya berdistribusi seragam pada interval $[0,1]$. Sklar menjelaskan untuk setiap fungsi distribusi bivariat $H(x,y)$ dengan distribusi marginal $G_X(x)$ and $G_Y(y)$, akan ada Copula $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ sehingga dapat didefinisikan sebagai :

$$H(x, y) = C(G_X(x), G_Y(y)) \quad (5)$$

Misalkan $U = F_X(x)$ and $V = G_Y(y)$ maka

$$C(F_X(x), G_Y(y)) = C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= P(F_X(X) \leq u, G_Y(Y) \leq v) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq G_Y^{-1}(v)) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y) = H(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

Misalkan $u = F_X(x)$ dan $v = G_Y(y)$, akan dicari distribusi dari U dan V menggunakan metode transformasi distribusi. Maka dapat diperoleh menjadi $F_U(u) = P(U \leq u) = P(F_X(X) \leq u) = P(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$. Pemilihan jenis Copula yang digunakan berasal dari kelas Archimedean Copula. Archimedean Copula didefinisikan sebagai $C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)] \forall u, v \in [0, 1]$ dimana $\varphi(t)$ adalah fungsi generator (Nelsen, 2006). Dalam penelitian ini kita mempertimbangkan dua copulas Archimedes yaitu Clayton dan Gumbel. Penaksiran parameter dari kelas Archimedean Copula dapat dikaitkan dengan ukuran asosiasi Kendall's Tau. Ukuran asosiasi ini bisa mengukur asosiasi baik linear ataupun nonlinear. Kendall's Tau dapat digunakan untuk mengestimasi parameter pada Copula, pada kasus ini contohnya pada Copula Clayton ($\hat{\theta}_c$) dan Gumbel ($\hat{\theta}_g$). Kendall's tau untuk vector variabel acak $(X, Y)^T$ didefinisikan sebagai :

$$\tau(X, Y) = P\{(X - \hat{X})(Y - \hat{Y}) > 0\} - P\{(X - \hat{X})(Y - \hat{Y}) < 0\} \quad (8)$$

Sebagai langkah terakhir pemilihan copula terbaik ini dapat ditentukan salah satunya dengan metode Mean Square Error (MSE). Metode ini merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk menghitung besarnya perbedaan antara nilai yang dihasilkan sebuah estimator dengan nilai sebenarnya. Misalkan $H_{X,Y}(x, y)$ adalah fungsi distribusi bersama dan prediksi vektor dari data dengan ukuran sampel n $\widehat{H}_{X,Y}$. Oleh karena itu MSE dapat didefinisikan sebagai

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{H}_{X,Y} - H_{X,Y}(x, y))^2 \quad (9)$$

Proses pengambilan data ini dilakukan menggunakan metode teknik pengambilan sample, *simple random sampling* dengan sampel yang digunakan adalah 3 perusahaan manufaktur di Indonesia yang meliputi daerah Jakarta, Bandung dan Makassar dengan target populasi pada penelitian ini adalah hasil produksi dari perusahaan manufaktur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bidang industri, banyak perusahaan memerlukan upaya untuk memantau atau mengontrol proses pengendalian mutu agar mampu menghasilkan produk berkualitas optimum. Pemantauan karakteristik kualitas secara mandiri sangatlah memungkinkan untuk dilakukan, akan tetapi hal itu dapat menimbulkan kesalahan pada produk. Proses pemantauan masalah di mana beberapa variabel terkait secara kolektif dikenal sebagai proses kontrol statistik multivariat. Suatu proses atau produk dengan variabel multivariat yang dipantau atau dikendalikan menyebabkan timbulnya masalah dalam pengendalian mutu. Ketika variabel-variabel tersebut berkorelasi, pendekatan yang lebih tepat akan diperlukan untuk memonitor mereka pada saat yang sama. Variabel akan dikorelasikan dengan jumlah yang besar dari variabel yang berkorelasi yang dikumpulkan. Sehingga, bagan kendali multivariat diperlukan untuk memantau dan mendiagnosis tujuan dalam sistem manufaktur modern. Copula Archimedean terbagi dalam tiga kelas, yaitu copula Clayton, copula Frank, dan copula Gumbel. Copula Archimedean didefinisikan dengan fungsi

$\phi: [0,1]$ merupakan fungsi generator bernama, yang memiliki dua turunan kontinu pada $(0,1)$ dan memenuhi kondisi berikut: $\phi(1) = 1$, dan inversnya ϕ^{-1} sehingga. Setiap angka dari kelas ini menghasilkan fungsi distribusi multivariat (Nelsen, 2005). Fungsi copula Archimedean didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) = \Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u}_1) + \dots + \Phi(\mathbf{u}_m))$$

Perbedaan yang signifikan dari fungsi copula Clayton, Frank dan Gumbel dapat dilihat dari jenis *tail* dependensi. Copula Clayton cenderung memiliki *tail* dengan dependensi terletak di bagian bawah. Pada copula Frank, tidak terdapat *tail* dependensi. Sedangkan pada jenis copula Gumbel, *tail* dependensi terletak pada bagian atas.

Table 1. Fungsi Copula Archimedean Clayton, Frank dan Gumbel

Kelas Copula	Generator $\phi_\theta(\mathbf{u})$	Fungsi Copula $C_\theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$	Parameter θ
Clayton	$\theta^{-1}(u^{-\theta} - 1)$	$\left[\sum_{i=1}^m (u_i^{-\theta} + m - 1) \right]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta > 0$
Frank	$-\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^m [e^{-\theta v} - 1]}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$\theta \in (-\infty, \infty)$ untuk $m = 2$ $\theta > 0$ untuk $m \geq 3$
Gumbel	$(-\ln u)^\theta$	$\exp \left(- \left[\sum_{i=1}^m (-\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)$	$\theta > 1$

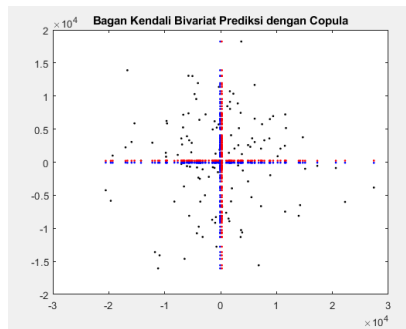
Pada proses pembuatan bagan kendali, dilakukan metode untuk pemilihan model Copula terbaik. Terdapat beberapa metode pemilihan model Copula terbaik, diantaranya adalah Mean Square Error (MSE). MSE adalah Mean Square Error dan merupakan metrik kualitas model. Lebih dekat ke nol lebih baik. Metrik MSE mengukur rata-rata kuadrat kesalahan atau penyimpangan. MSE mengambil jarak dari titik ke garis regresi (jarak ini adalah "kesalahan") dan kemudian kuadratkan mereka untuk menghilangkan tanda-tanda negatif. MSE menggabungkan varians dan bias prediktor. Mean square error (MSE) menyediakan statistik yang memungkinkan bagi para peneliti untuk membuat klaim. MSE hanya mengacu pada rata-rata perbedaan kuadrat antara parameter yang diprediksi dan parameter yang diamati. Secara formal, ini dapat didefinisikan sebagai:

$$E[(\hat{\theta}^n - \theta)^2]$$

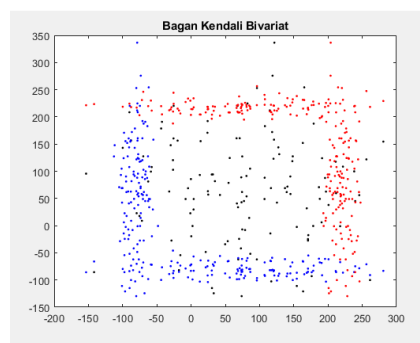
Dalam Persamaan di atas, E merupakan nilai yang diharapkan dari perbedaan kuadrat antara perkiraan parameter yang tidak diketahui ($\hat{\theta}^n$) dan nilai yang diamati aktual (θ) dari parameter. Dalam hal ini, nilai yang diharapkan dari MSE hanya

mengacu pada kesalahan rata-rata (error). Dengan mengaplikasikan metode ini pada 3 perusahaan manufaktur, hasil yang ditunjukkan adalah sebagai berikut :

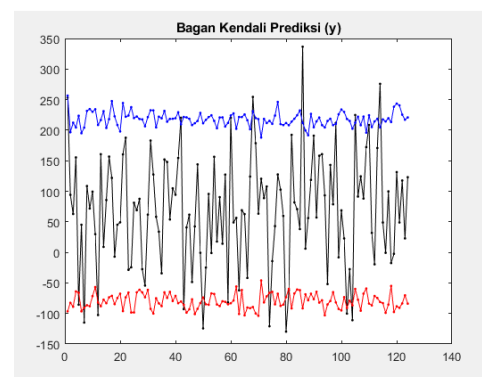
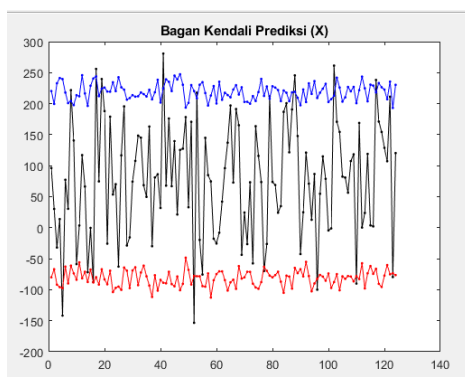
Penggunaan Copula Frank dalam menganalisis pengendalian kualitas produksi perusahaan manufaktur A di Indonesia.



Gambar 1. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur A dengan Copula-Frank

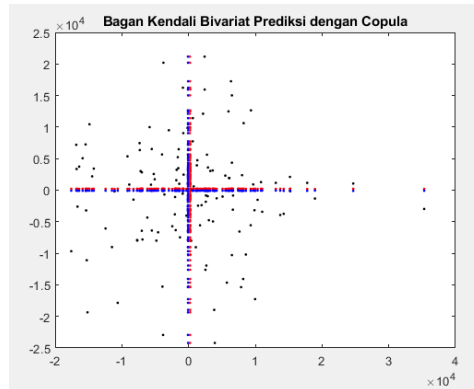


Gambar 2. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur B dengan Copula-Frank

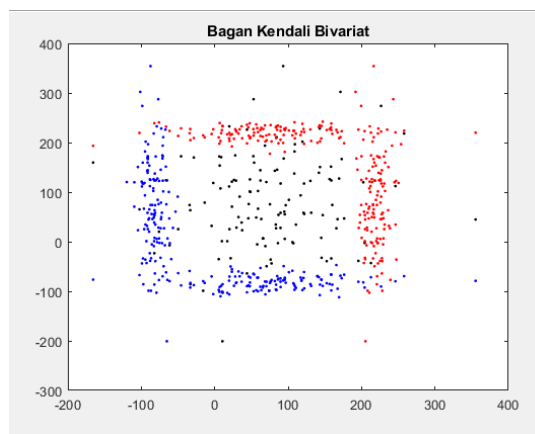


Gambar 3. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur C dengan Copula-Frank

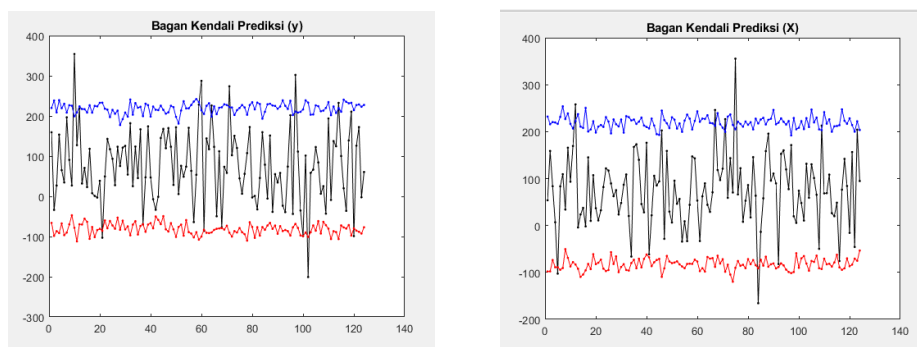
Sementara untuk Copula Clayton hasil yang didapat untuk aplikasi pada data manufaktur adalah sebagai berikut :



Gambar 4. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas dengan Copula-Clayton pada industry manufaktur A

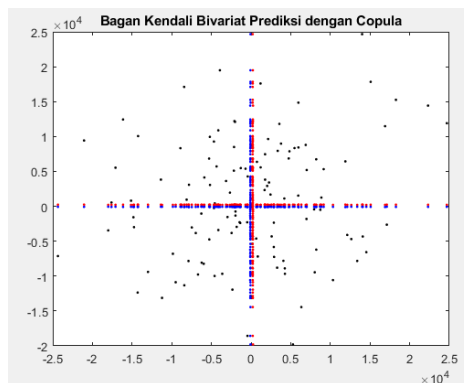


Gambar 5. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas dengan Copula-Clayton pada industry manufaktur B

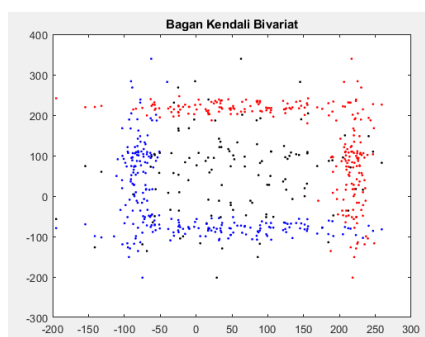


Gambar 6. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur C dengan Copula-Clayton

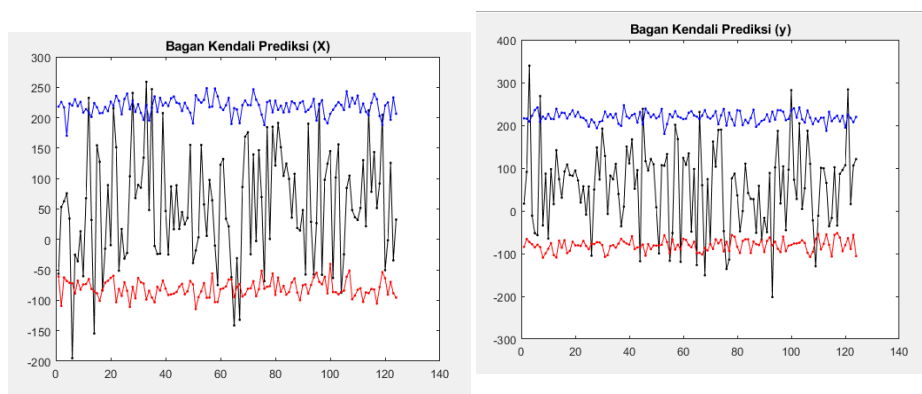
Sementara untuk Copula Clayton hasil yang didapat untuk aplikasi pada data manufaktur adalah sebagai berikut :



Gambar 7. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur A dengan Copula-Gaussian



Gambar 8. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur B dengan Copula-Gaussian



Gambar 9. Bagan Kendali Pengendalian Kualitas Produksi Perusahaan Manufaktur C dengan Copula-Gaussian

Dengan menerapkan 3 Copula tersebut, terlampir hasil pada saat menggunakan MSE diperoleh nilai MSE sebagai berikut :

Tabel 2. Nilai MSE Copula

Nilai MSE		
Frank Copula	Clayton Copula	Gaussian Copula
0.0013 , 0.0142	0.0016, 0.0145	0.0026, 0.0155

Dari hasil MSE pada tabel 2. Diperoleh Copula Frank yang memiliki hasil yang lebih maksimal untuk mengukur pengendalian kualitas hasil produksi pada suatu perusahaan manufaktur. Penggunaan Copula ini lebih spesifik dibandingkan dengan bagan kendali multivariat lainnya.

KESIMPULAN

Secara umum, bagan kontrol yang digunakan untuk kasus multivariat adalah bagan kendali Hotelling T₂ (Durante & Sempi, 2015), tetapi bagan kendali ini tidak cukup untuk dapat menafsirkan ketergantungan antara karakteristik kualitas. Hasil simulasi dengan studi kasus menunjukkan beberapa kesimpulan bersama dengan saran yang berguna untuk pengembangan dan penelitian lebih lanjut. Hasil pembuatan peta kendali multivariat menggunakan Hotelling T₂. Untuk data simulasi dan data nyata, ini menunjukkan bahwa diagram kontrol kurang mampu menafsirkan masalah yang melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas. Sedangkan pada diagram kendali prediktif dengan Copula, perilaku sasaran proses dengan mempertimbangkan adanya ketergantungan antara karakteristik kualitas yang terlihat. ini didukung dengan hasil dari penggunaan Copula lebih akurat dibandingkan dengan bagan kendali lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustini, N. K. D. A. (2017). Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Keputusan Membeli di Online Shop Mahasiswa Jurusan Pendidikan Ekonomi Angkatan Tahun 2012. *Jurnal Pendidikan Ekonomi Undiksha*, 9(1), 127-136.
- Fure, F., Lopian, J., & Taroreh, R. (2015). Pengaruh brand image, kualitas produk dan harga terhadap keputusan pembelian konsumen di j. co Manado. *Jurnal EMBA: Jurnal Riset Ekonomi, Manajemen, Bisnis dan Akuntansi*, 3(1).
- Amilia, S. (2017). Pengaruh Citra Merek, Harga, dan Kualitas Produk terhadap Keputusan Pembelian Handphone Merek Xiaomi di Kota Langsa. *Jurnal Manajemen dan Keuangan*, 6(1), 660-669.
- Ratnadi, R., & Suprianto, E. (2020). Pengendalian Kualitas Produksi Menggunakan Alat Bantu Statistik (Seven Tools) Dalam Upaya Menekan Tingkat Kerusakan Produk. *Jurnal Industri Elektro dan Penerbangan*, 6(2).
- Bakhtiar, S., Tahir, S., & Hasni, R. A. (2013). Analisa pengendalian kualitas dengan menggunakan metode statistical quality control (SQC). *Industrial Engineering Journal (IEJ)*, 2(1).
- Tanjong, S. D. (2013). Implementasi pengendalian kualitas dengan metode statistik pada pabrik spareparts CV Victory Metallurgy Sidoarjo. *Jurnal Ilmiah Mahasiswa Universitas Surabaya*, 2(1), 1-13
- Durante, F., & Sempi, C. (2015). *Principles of copula theory*. CRC press.

- Montgomery, D. C. (2007). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons.
- Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.
- Verdier, G. (2013). Application of copulas to multivariate control charts. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 143(12), 2151-2159.
- Chen, C., Davis, R. A., & Brockwell, P. J. (1996). Order determination for multivariate autoregressive processes using resampling methods. *Journal of multivariate analysis*, 57(2), 175-190.