

## ANALISIS KESULITAN SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL INDUKSI MATEMATIKA

Reka Ikraami Kurniawan<sup>1\*</sup>, Rizky Rosjanuardi<sup>2</sup>, Imam N Albania<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia

\*Corresponding author. Jl. Dr. Setiabudhi No.229, 40154, Bandung, Indonesia

E-mail: [rekaikraami@upi.edu](mailto:rekaikraami@upi.edu)<sup>1)\*</sup>

[rizky@upi.edu](mailto:rizky@upi.edu)<sup>2)</sup>

[albania@upi.edu](mailto:albania@upi.edu)<sup>3)</sup>

Received 13 September 2022; Received in revised form 12 December 2022; Accepted 22 December 2022

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kesulitan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika dengan induksi. Penelitian ini menggunakan jenis penelitian studi kasus dengan pendekatan kualitatif. Subjek penelitian ini adalah 2 siswi kelas XI SMA IPA. Subjek Pertama (Siswa A) merupakan siswi di salah satu SMA Negeri di Jakarta dan subjek kedua (Siswa B) merupakan siswi di salah satu *Homeschooling* di Jakarta. Instrumen penelitian yang digunakan adalah tes dan wawancara. Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan pembuktian dengan induksi matematika, hal ini terlihat dari kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan permasalahan dengan induksi matematika. Kesalahan tersebut adalah kesalahan konsep dan kesalahan operasi aljabar. Kesalahan konsep yang dilakukan adalah siswa tidak memahami makna “n” dalam induksi matematika. Siswa terbiasa menyelesaikan soal induksi matematika yang dimulai dari basis induksi  $n = 1$ . Selanjutnya pada tahap  $P(k+1)$ , kesalahan konsep yang dilakukan adalah siswa tidak memahami maksud “k+1”. Siswa melupakan tahap  $n = k$  saat menyelesaikan  $P(k+1)$  sehingga dalam menyelesaikan pembuktian tidak diperoleh hasil yang benar. Kesalahan operasi terjadi saat proses pembuktian dengan induksi. Pada tahap  $P(k+1)$ , siswa mengalami kesulitan dalam pengoperasian bentuk aljabar. Kesalahan ini terjadi karena siswa belum memahami materi operasi bentuk aljabar dengan baik.

**Kata kunci:** Induksi matematika, kesulitan siswa

### Abstract

*This study aims to describe students' difficulties in solving mathematical problems by induction. This research uses a case study research type with a qualitative approach. The subjects of this study were 2 students of class XI SMA IPA. The first subject (Student A) is a student at a public high school in Jakarta and the second subject (Student B) is a student at a Homeschool in Jakarta. The research instruments used were tests and interviews. The results showed that students still had difficulties in completing the proof by mathematical induction, this could be seen from the mistakes made by students in solving problems with mathematical induction. These errors are conceptual errors and algebraic operations errors. The conceptual error made is that students do not understand the meaning of "n" in mathematical induction. Students are accustomed to solving mathematical induction problems starting from basic induction  $n = 1$ . Then at the  $P(k+1)$  stage, the conceptual error made is that students do not understand "k+1". Students forget the step  $n = k$  when completing  $P(k+1)$  so that in the completion they do not get the correct result. operating errors that occur during the inspection process by induction. At stage  $P(k+1)$ , students have difficulty operating algebraic forms. This error occurs because students do not understand the material of algebraic operations well.*

**Keywords:** *Mathematical induction, student difficulties*



This is an open access article under the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

## PENDAHULUAN

Matematika dapat melatih siswa untuk bertindak atas dasar pemikiran secara logis, rasional, kritis, cermat, jujur, efisien, dan efektif dalam memecahkan masalah. Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan haruslah didasarkan pada kebenaran konsep atau pernyataan sebelumnya, sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan matematika bersifat konsisten (Indah & Nuraeni, 2021). Salah satu materi matematika yang membutuhkan penalaran dan kecermatan siswa adalah materi induksi matematika. Induksi matematika merupakan salah satu teknik atau metode pembuktian dasar dalam matematika yang harus dipahami sejak awal karena akan digunakan pada materi matematika selanjutnya (Hasan, 2016). Kemampuan membuktikan sangatlah penting karena hal itu dapat melatih kemampuan penalaran dan logika. Hal ini berguna untuk menyelesaikan masalah-masalah yang lebih kompleks yang membutuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Pada Kurikulum 2013, berdasarkan Permendikbud RI Nomor 59 Tahun 2014 tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah, materi induksi matematika diajarkan pada kelas XII. Selanjutnya dalam Permendikbud Nomor 37 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 24 Tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah, materi induksi matematika diajarkan pada kelas XI. Artinya, materi induksi matematika merupakan salah satu materi matematika yang harus dikuasai siswa tingkat SMA.

Kompetensi dasar materi induksi matematika dalam Kurikulum 2013 Revisi mencakup menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian. Indikator pencapaian kecakapan materi induksi meliputi (a) memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran suatu pernyataan (b) menduga dan memeriksa kebenaran dugaan (konjektur) (c) memeriksa kesahihan atau kebenaran suatu argumen dengan penalaran induksi (d) menurunkan atau membuktikan rumus dengan penalaran deduksi (e) menduga dan memeriksa kebenaran dugaan (konjektur). Hal tersebut pun sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika yang termuat dalam Permendikbud RI Nomor 59 Tahun 2014 tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah, salah satunya adalah peserta didik dapat mengomunikasikan gagasan, penalaran serta mampu menyusun bukti matematika dengan menggunakan kalimat lengkap, simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah.

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan induksi matematika menyatakan bahwa banyak siswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal induksi, sehingga siswa seringkali melakukan kesalahan dalam menyelesaikannya. Penelitian yang dilakukan oleh (Ernawati & Ilhamuddin, 2020) diperoleh hasil jenis kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan masalah induksi meliputi kesalahan konsep, prosedur, dan teknik. Jenis kesalahan yang paling banyak dilakukan siswa Sekolah Menengah dalam menyelesaikan pembuktian menggunakan induksi matematika adalah kesalahan prosedural (Fitriani et al., 2021). Selanjutnya (Ashkenazi & Itzkovitch, 2014)

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

menyatakan bahwa ada tiga masalah utama siswa dalam membuktikan dengan induksi matematika, yaitu ketidakpahaman terhadap bukti deduktif, ketidaklengkapan pemahaman terhadap makna basis induksi, dan ketidakpahaman terhadap kenaikan, maksudnya adalah jika suatu pernyataan akan dibuktikan untuk sembarang bilangan asli  $n$ , maka kenaikannya adalah 1. Penelitian yang dilakukan oleh (Ahmadi et al., 2019) tentang analisis kesalahan pembuktian matematika siswa sekolah menengah dalam induksi matematika, hasil penelitiannya yaitu sebagian besar siswa melakukan kesalahan mulai dari tahapan ketiga dan tahapan setelahnya (transformasi, keterampilan proses dan penulisan jawaban). Penyebab siswa melakukan kesulitan-kesulitan tersebut adalah siswa kurang dalam menggunakan pengasumsian pada langkah induksi.

Masalah lainnya yang dialami siswa saat menyelesaikan soal induksi matematika adalah kesalahan konsep mengenai basis induksi. Sebagian besar siswa memahami bahwa basis induksi harus dimulai dari  $n = 1$ . Hal ini terjadi karena dalam beberapa buku yang digunakan siswa untuk belajar induksi matematika menyebutkan bahwa langkah pembuktian dengan menggunakan induksi matematika terdiri dari 3 langkah, yaitu (a) Membuktikan basis induksi  $P(1)$  benar; (b) Mengasumsikan  $P(k)$ , benar; (c) Langkah pembuktian  $P(k+1)$ . Padahal untuk langkah basis induksi, nilai  $n$  tidak harus dimulai dari  $n = 1$ . Ini bertentangan dengan pernyataan yang dikemukakan oleh (Larson & Pettersson, 2018) yang menyebutkan bahwa dalam soal induksi matematika yang paling umum, langkah basis induksi berkaitan dengan  $n = 0$  atau  $n = 1$  tetapi hal ini tergantung pada apa

yang akan dibuktikan, kemudian variasi soal bisa dengan menyesuaikan titik awal (nilai  $n$ ) ke angka yang memadai atau memasukkan lebih dari satu angka dalam basis induksi.

Berdasarkan uraian tersebut, maka peneliti akan melakukan analisis kesulitan siswa dalam menyelesaikan permasalahan matematika dengan induksi dengan tipe soal yang berbeda. Masalah yang akan dianalisis adalah pernyataan matematika yang harus dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika dengan langkah basis  $n \neq 1$ .

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif kualitatif dengan pendekatan studi kasus. Pendekatan studi kasus dipilih agar dapat menggali pemahaman yang dimiliki oleh subjek mengenai konsep induksi matematika untuk memperoleh wawasan baru tentang pemahaman yang dimilikinya. Alur penelitian ini yaitu, (1) Menentukan masalah penelitian, (2) Pengumpulan data dan bahan referensi, (3) Proses pengambilan data, (4) Menganalisis data hasil penelitian, (5) Mengolah data temuan dan referensi, (6) Membahas hasil pengolahan data.

Penelitian ini dilakukan terhadap 2 siswa kelas XI IPA. Kedua subjek memiliki latar belakang yang berbeda dan tidak saling berkaitan. Subjek Pertama (Siswa A) merupakan siswi di salah satu SMA Negeri di Jakarta dan subjek kedua (Siswa B) merupakan siswi di salah satu *Homeschooling* di Jakarta. Pemilihan subjek menggunakan teknik *purposive sampling* (sampel tujuan) dengan tujuan menggali informasi dari dua subjek dengan latar belakang berbeda, yaitu sekolah formal dan sekolah non-formal. *Purposive sampling* adalah teknik pengambilan

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

sampel sumber data dengan pertimbangan tertentu (Creswell, 2014). Subjek kemudian diberi kode A untuk siswa sekolah formal dan kode B untuk siswa non-formal.

Instrumen yang digunakan yaitu satu set soal induksi matematika yang terdiri dari 3 permasalahan dan wawancara. Instrumen tes yang digunakan yaitu bertujuan untuk mengetahui kesulitan siswa dalam

menyelesaikan soal pembuktian matematika dengan induksi. Soal tes yang digunakan dalam penelitian ini sudah melalui proses validasi oleh 3 orang validator yaitu 2 dosen Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia dan seorang guru Bidang Studi Matematika di salah satu *Homeschooling* di Jakarta Barat. Bentuk soal tes dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Bentuk soal tes

No	Soal
1	Tunjukkan dimulai dari $n$ berapakah pernyataan $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ bernilai benar? Kemudian buktikan dengan induksi matematika!
2	Tunjukkan dimulai dari $n$ berapakah pernyataan $2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ bernilai benar? Kemudian buktikan dengan induksi matematika
3	Tunjukkan dimulai dari $n$ berapakah pernyataan $n^2 > n + 1$ bernilai benar? Kemudian buktikan dengan induksi matematika!

Instrumen wawancara pada penelitian ini akan berisi beberapa pertanyaan mengenai kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal tes yang telah diberikan dan akan meluas sesuai jawaban masing-masing siswa. Salah satu tujuan diadakannya tes wawancara pada penelitian ini, yaitu untuk mengkonfirmasi jawaban siswa pada tes kemampuan pembuktian matematika yang telah diberikan sebelumnya dan untuk lebih memperkuat hasil yang akan diteliti. Karena saat pengambilan data masih dalam situasi pandemi COVID-19, maka proses pengambilan data dilakukan secara *virtual meeting* dengan bantuan aplikasi sehingga antara peneliti dan subjek bisa berdiskusi. Jawaban diskusi yang dihasilkan merupakan jawaban sebenarnya dari subjek, karena hubungan peneliti dengan subjek yang cukup dekat.

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini meliputi: (1) Reduksi data, yaitu proses pemilihan, pemustan perhatian pada

penyederhanaan, pengabstrakan dan transformasi data kasar yang muncul dari catatan-catatan tertulis di lapangan diikuti dengan perekaman. (2) Penyajian data yang dilakukan dengan proses pemilihan, pemustan perhatian pada penyederhanaan, pengabstrakan dan transformasi data kasar yang muncul dari catatan-catatan tertulis di lapangan. Data yang akan disajikan berupa hasil pekerjaan siswa, dan tes hasil wawancara. (3) Penarikan kesimpulan dalam penelitian ini yaitu dilakukan dengan cara membandingkan hasil pekerjaan siswa dengan hasil wawancara, yang sehingga dapat ditarik sebuah kesimpulan mengenai kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal induksi (Rijali, 2018).

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, peneliti menganalisis hasil tes kemampuan pembuktian matematis menggunakan induksi. Kedua subjek akan dianalisis

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

letak kesulitan dalam proses pembuktian pada setiap soal berdasarkan langkah pembuktian yang ada pada materi induksi. Berikut ini penjelasannya:

a. Analisis Soal 1

Pada langkah pertama yaitu membuktikan basis induksi, diperoleh jawaban siswa pada Gambar 1 dan 2.

A. Buktikan benar untuk  $n=1$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$$

$$0 = 1 \text{ (salah)}$$

Jika  $n=2$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ (Benar)}$$

Jadi Pernyataan benar untuk  $n=2$

Jika  $n=3$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3+1}{3 \cdot 2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{6}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{4}{6} \text{ (salah)}$$

Gambar 1. Jawaban Siswa A

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Basis Induksi  $n=1$

$$\left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$$

$$0 = \frac{1}{2} \text{ (salah)}$$

Gambar 2. Jawaban Siswa B

Dari jawaban siswa A (Gambar 1) dan siswa B (Gambar 2) terlihat untuk langkah mensubstitusikan nilai  $n = 1$ , siswa A dan siswa B hanya mengganti nilai  $n$  di akhir pernyataan dengan 1, sehingga pada langkah pertama diperoleh kesimpulan pernyataan salah. Namun, siswa A melanjutkan percobaannya dengan mensubstitusikan nilai  $n$  selain 1 ke persamaan sehingga

diperoleh kesimpulan beberapa jawaban salah dan beberapa lainnya benar. Berdasarkan hasil wawancara, didapatkan informasi bahwa siswa A mengetahui bahwa basis induksi tidak selalu dimulai dengan  $n = 1$ , namun ia tidak memahami cara menyelesaikannya sehingga ia hanya mensubstitusikan beberapa nilai  $n$  ke persamaan tersebut sedangkan siswa B hanya mengetahui basis induksi selalu dimulai dengan  $n = 1$ , sehingga ketika disubstitusikan nilainya salah, ia tidak mencoba untuk nilai  $n$  yang lainnya. Ini berarti adanya ketidakpahaman terkait konsep  $n$  yang dimaksud. Ini artinya siswa B menerapkan teknik pembuktian prosedural. Kesulitan siswa dalam membuktikan pernyataan matematika menggunakan induksi yang berkaitan dengan konsep dan prosedur terjadi karena materi induksi matematika yang siswa pelajari di sekolah menengah masih sangat terbatas dan adanya ketidaklengkapan pemahaman terkait makna basis induksi (Ashkenazi & Itzkovitch, 2014).

Lebih lanjut dari hasil wawancara terlihat siswa A dan siswa B belum memahami konsep  $n$  yang dimaksud adalah nilai ke- $n$  sehingga mereka hanya mengganti nilai ke- $n$  dengan  $n$ . Ini berarti ada miskonsepsi siswa terhadap makna bilangan  $n$  yang mana ini mengakibatkan kesalahan dalam proses penyelesaian masalah. Sejalan dengan penelitian (Fitriani et al., 2021) yang menyatakan bahwa kesalahan konseptual yang dialami siswa terjadi karena siswa terpaku pada contoh soal yang diberikan, siswa kurang memahami prinsip induksi matematika, dan siswa tidak memahami sifat perkalian perpangkatan. Selanjutnya untuk tahap kedua diperoleh jawaban siswa pada Gambar 3 dan 4.

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

$$\text{b. Asumsikan untuk } n = k \\ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Gambar 3. Jawaban tahap 2 siswa A

$$\text{Langkah Induksi } n = k \\ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Gambar 4. Jawaban tahap 2 siswa B

Dari jawaban siswa A (Gambar 3) dan siswa B (Gambar 4) terlihat untuk langkah mensubstitusikan nilai  $n = k$ , baik antara siswa A dan siswa B tidak mengalami kendala atau kesalahan. Masalah muncul saat tahap akhir yaitu pembuktian dengan  $n = k + 1$ . Terdapat kesalahan konsep yang sama antara siswa A dan siswa B terkait langkah induksi ke-3, yaitu siswa hanya fokus pada suku terakhir ( $n = k+1$ ) persamaan itu. Jawaban siswa A pada tahap ketiga siswa terlihat pada Gambar 5.

$$\text{c. asumsikan untuk } n = k+1 \\ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1+1}{2(k+1)} \\ \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2k+2} \text{ (tidak terbukti)}$$

Gambar 5. Jawaban siswa A

Terlihat dari jawaban siswa A (Gambar 5), ia tidak melakukan proses induksi dengan baik, yaitu dia tidak menggunakan asumsi pernyataan sebelumnya ( $n = k$ ) ke pernyataan  $n = k + 1$ . Hal ini sesuai dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh (Ahmadi et al., 2019) yang menyimpulkan bahwa siswa tidak mengoptimalkan proses induksi matematika karena mereka tidak mengerti bagaimana menggunakan langkah hipotesis (langkah kedua)

induksi matematika pada langkah induksi (langkah ketiga). Berkaitan dengan hal ini, kesalahan siswa A termasuk dalam kategori kesalahan sistematis karena adanya prosedur penyelesaian yang tidak sesuai. Selanjutnya hasil jawaban siswa B pada tahap ketiga terlihat pada Gambar 6.

$$\text{* Untuk } n = k+1 \\ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1+1}{2(k+1)} \\ + 1 \frac{1}{k^2+2k+1} = \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k^2+2k}{k^2+2k+1} = \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k(k+2)}{k^2+2k+1} = \frac{k+2}{2k+2} \\ \text{(Tidak Terbukti)}$$

Gambar 6. Jawaban siswa B

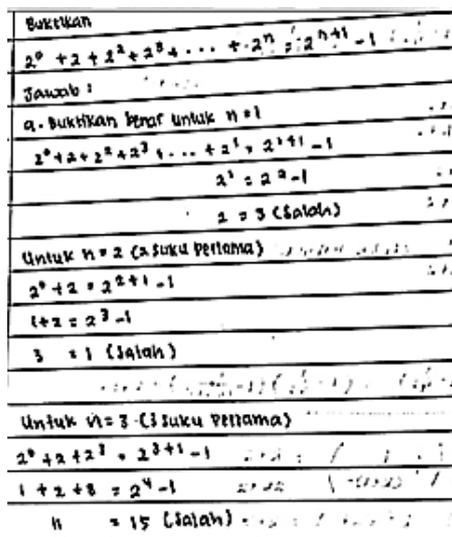
Terlihat dari jawaban siswa B (Gambar 6) bahwa ia mengalami kegagalan seperti yang dilakukan oleh siswa A. Hal ini sejalan dengan penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa faktor penyebab kesalahan mahasiswa diantaranya adalah kurangnya penguasaan konsep pada materi induksi matematika (Ardiawan, 2015). Prosedur seperti ini menimbulkan adanya kesalahan konsep mengenai prosedur pembuktian selanjutnya. Kebanyakan siswa menghafal suatu persamaan tanpa pemahaman, menghafal aturan operasi tanpa pemahaman yang cukup hanya akan merusak konsep selanjutnya (Erdoğan et al., 2014).

Menindaklanjuti kasus ini, kemudian dilakukan wawancara kepada siswa A dan siswa B untuk mengkonfirmasi jawaban mereka. Berdasarkan hasil wawancara, terlihat jika siswa A dan siswa B menerapkan teknik prosedural yang ada di buku tetapi mereka melewati 1 tahapan yaitu dengan menggunakan asumsi  $n = k$  sebelum membuktikan  $n = k + 1$ .

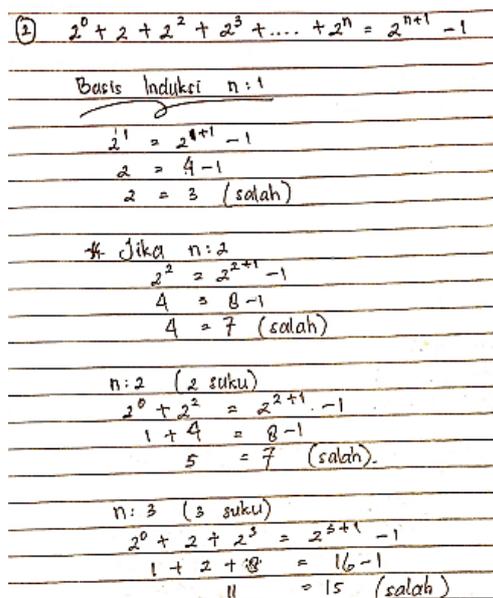
DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

**b. Analisis soal 2**

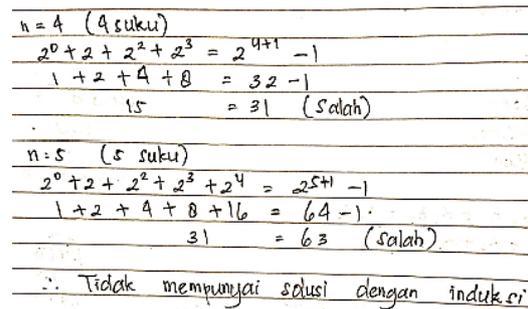
Karena pada soal nomor 1 Siswa A dan Siswa B sudah mengetahui bahwa soal induksi matematika tidak selalu dimulai dari  $n = 1$ , maka pada soal 2 baik Siswa A dan Siswa B tetap memulai basis induksi dari  $n = 1$ , kemudian jika terdapat hasil yang tidak sesuai mereka lanjutkan untuk  $n$  setelahnya. Jawaban siswa A dan siswa B dalam menuliskan basis induksi pada soal 2 terlihat pada Gambar 7 sampai 9.



Gambar 7. Jawaban siswa A

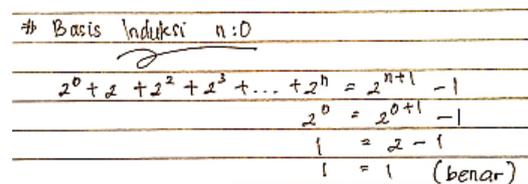


Gambar 8. Jawaban siswa B



Gambar 9. Jawaban siswa B

Dari jawaban tersebut terlihat jika siswa A (Gambar 7) memulai mencari nilai  $n$  dari  $n = 1$  sampai  $n = 3$ , sedangkan Siswa B (Gambar 8 dan 9) memulai mencari nilai  $n$  dari  $n = 1$  sampai  $n = 5$ . Ketika proses pencarian tersebut, muncul sebuah masalah baru di mana siswa B menuliskan bahwa soal 2 tidak mempunyai solusi dengan induksi. Selanjutnya dilakukan proses verifikasi kepada siswa B terkait jawabannya tersebut. Berdasarkan hasil diskusi terlihat bahwa siswa menyimpulkan tidak ada solusi dengan induksi karena Ketika mencari nilai basis induksi tidak diperoleh jawaban benar sampai nilai  $n = 5$ . Kemudian setelah proses verifikasi tersebut, peneliti memberikan sedikit pengarakan untuk mencoba Kembali mencari nilai  $n$  dengan nilai  $n$  kecil. Setelah diberikan penjelasan tersebut, siswa kemudian mencoba memulai dari  $n = 0$  dan kemudian didapatkan hasil jawaban yang benar seperti pada Gambar 10.

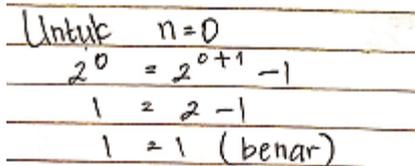


Gambar 10. Jawaban siswa B

Berbeda dengan siswa A (Gambar 7), ketika sampai  $n = 3$ , siswa A merasa kesulitan kemudian bertanya kepada peneliti melalui proses diskusi. Siswa

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

menanyakan apakah mungkin ada penyelesaiannya karena sudah  $n = 3$  namun belum diperoleh jawaban benar. Kemudian setelah mendapatkan penjelasan, siswa A melanjutkan pekerjaannya dan jawaban benar tersaji pada Gambar 11.

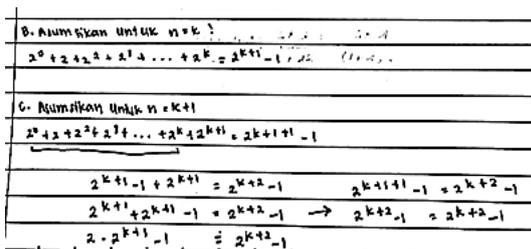


Untuk  $n=0$   
 $2^0 = 2^{0+1} - 1$   
 $1 = 2 - 1$   
 $1 = 1$  (benar)

Gambar 11. Jawaban siswa A

Berdasarkan jawaban dan hasil wawancara, terlihat bahwa siswa A dan siswa B hanya terbiasa dengan soal atau permasalahan yang umum jadi ketika diberikan soal yang tidak biasa, mereka akan kesulitan menyelesaikannya.

Selanjutnya untuk tahap  $n = k$ , siswa A dan siswa B tidak mengalami kendala atau kesalahan. Pada tahap ke-3 atau tahap pembuktian, siswa A bisa menyelesaikan permasalahan dengan baik. Siswa A mampu menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar dan terbukti. Hasil jawaban siswa A tersaji pada Gambar 12.

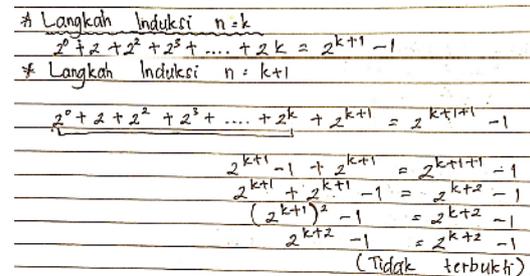


B. Asumsikan untuk  $n=k$   
 $2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$   
 C. Asumsikan untuk  $n=k+1$   
 $2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$   
 $2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$   
 $2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1 \rightarrow 2^{k+2} - 1 = 2^{k+2} - 1$   
 $2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$

Gambar 12. Jawaban Siswa A

Dari jawaban tahap akhir siswa A (Gambar 12) terlihat bahwa siswa A menjawab dengan benar dan mampu menerapkan perhitungan aljabar dengan baik. Hal ini sangat berpengaruh karena operasi perkalian aljabar merupakan salah satu konsep prasyarat penting yang harus dikuasai siswa sebelum

mempelajari materi induksi matematika. Masalah muncul pada siswa B, ia menuliskan bahwa proses pembuktian gagal atau pernyataan tidak terbukti, jawaban siswa tersaji pada Gambar 13.



\* Langkah Induksi  $n=k$   
 $2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$   
 \* Langkah Induksi  $n=k+1$   
 $2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1$   
 $2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1$   
 $2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$   
 $(2^{k+1})^2 - 1 = 2^{k+2} - 1$   
 $2^{k+2} - 1 = 2^{k+2} - 1$   
 (Tidak terbukti)

Gambar 13. Jawaban siswa B

Berdasarkan Gambar 13, terlihat jika siswa B gagal menyelesaikan pembuktian karena salah dalam pengoperasian bentuk aljabar. Hal ini sesuai dengan hasil penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal matematika adalah kesalahan konsep, kesalahan pengoperasian, dan kecerobohan dalam proses penyelesaian, dengan kesalahan yang dominan adalah kesalahan konsep (Aditya Cahyani & Sutriyono, 2018). Jawaban tersebut kemudian diverifikasi oleh wawancara dan hasilnya adalah siswa B tidak menguasai konsep aljabar dengan baik. Ia merasa kesulitan saat proses penyelesaian akhir sehingga berkesimpulan bahwa pernyataan tersebut tidak terbukti dengan induksi

### c. Analisis soal 3

Tipe soal 3 berbeda dengan 2 soal sebelumnya, karena pada soal ini siswa diminta membuktikan sebuah ketaksamaan matematika secara induksi. Namun terdapat persamaan, yaitu basis induksi tidak dimulai dari  $n = 1$ . Karena Siswa A dan Siswa B telah memahami makna “n” pada 2 soal sebelumnya, maka untuk langkah basis induksi antara siswa A dan Siswa B tidak ada

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

kendala. Tahap kedua, mengubah nilai  $n = k$  kedua siswa juga tidak mengalami kendala. Jawaban langkah basis induksi dan langkah  $n = k$  pada soal butir 3 siswa A dan Siswa B tersaji pada Gambar 14 dan 15.

a. Buktikan benar untuk  $n=1$

$$n^2 > n+1$$

$$1^2 > 1+1$$

$$1 > 2 \text{ (salah)}$$

Tika  $n=2$

$$n^2 > n+1$$

$$2^2 > 2+1$$

$$4 > 3 \text{ (Benar)}$$

Jadi nilai benar untuk  $n=2$

b. Asumsikan untuk  $n=k$

$$k^2 > k+1$$

Gambar 14. Jawaban siswa A

②  $n^2 > n+1$

untuk  $n=1 \Rightarrow 1^2 > 1+1$   
 $1 > 2 \text{ (salah)}$

$n=2 \Rightarrow 2^2 > 2+1$   
 $4 > 3 \text{ (benar)}$

$\therefore$  Jadi basis induksi mulai dari  $n=2$

\* Langkah induksi  $n=k$   
 $k^2 > k+1$

Gambar 15. Jawaban siswa B

Dari jawaban siswa A (Gambar 14) dan siswa B (Gambar 15) terlihat bahwa siswa tidak mengalami kendala pada saat langkah basis induksi dan langkah  $n = k$ . Masalah muncul saat proses pembuktian (Tahap 3 induksi), yaitu adanya cara atau langkah yang berbeda antara Siswa A dan Siswa B terhadap hasil jawaban mereka. Jawaban siswa A pada tahap 3 induksi soal butir 3 tersaji pada Gambar 16.

c. Asumsikan untuk  $n = k+1$

$$(k+1)^2 > k+1+1$$

$$(k+1)^2 > k+2$$

$$k^2+2k+2 > k+2$$

$$k(k+2)+2 > k+2$$

karena ruas kiri ada +2 maka bisa disimpulkan  
Ruas kiri lebih besar dari kanan dan pernyataan benar.

Gambar 16. Jawaban siswa A

Dari jawaban siswa A (Gambar 16) terlihat bahwa siswa A menuliskan bahwa pernyataan tersebut benar karena pada ruas kiri ada nilai +2, ini mengakibatkan hasil ruas kiri akan selalu lebih besar dari ruas kanan. Selanjutnya jawaban siswa B pada tahap 3 induksi soal butir 3 tersaji pada Gambar 17.

Untuk  $n = k+1$

$$(k+1)^2 > k+1+1$$

$$k^2+2k+1 > k+2 \text{ (Terbukti)}$$

$\therefore$  karena ruas kiri terdapat nilai  $k^2$ , ini berarti nilai tersebut akan selalu lebih besar dari pada ruas kanan.

Gambar 17. Jawaban siswa B

Dari jawaban siswa B (Gambar 17) terlihat bahwa siswa B menuliskan bahwa pernyataan tersebut benar karena pada ruas kiri ada nilai  $k^2$ , ini mengakibatkan hasil ruas kiri akan selalu lebih besar dari ruas kanan.

## PEMBAHASAN

Materi induksi matematika merupakan salah satu materi kelas 11 SMA IPA. Telah dipaparkan bahwa pembuktian sangat penting dalam pembelajaran matematika karena dapat meningkatkan keterampilan pemecahan masalah, argumentasi persuasif, penalaran, kreativitas dan pemikiran matematis (Güler, 2016). Selanjutnya, pembuktian dapat membentuk dasar matematika, memungkinkan terjadinya

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

komunikasi matematis, dan meminimalisir proses pembelajaran dengan dihapal (tanpa pemaknaan).

Faktanya bahwa banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian pernyataan matematika secara induksi. Penelitian yang dilakukan oleh (Fischbein & Engel, 1898) menunjukkan bahwa bagi banyak siswa sulit untuk membangun langkah induksi berdasarkan pernyataan yang belum terbukti, yaitu hipotesis induksi. Akibatnya, banyak siswa mengadopsi sikap yang salah seperti :

- a. Keabsahan dasar induksi menegaskan hipotesis induksi. Maksudnya adalah bagi sebagian siswa menyimpulkan kebenaran suatu hipotesis induksi diakibatkan dari beberapa basis induksi,
- b. Validitas langkah induksi menegaskan hipotesis induksi. Maksudnya adalah kebenaran  $p(k+1)$  mengakibatkan kebenaran  $p(k)$
- c. Validitas hipotesis induksi terbatas dan harus dianggap benar, kecuali telah dibuktikan sebaliknya. Maksudnya adalah asumsi kebenaran  $p(k)$  yang mengakibatkan kebenaran  $p(k+1)$  tidak berakibat kepada kebenaran dari  $p(n)$  untuk  $n > k+1$ .

Hasil penelitian dari (Perbowo & Pradipta, 2017) juga menyimpulkan bahwa beberapa alasan siswa mengalami kesulitan dalam membuktikan dengan induksi adalah (1) siswa tidak mengingat prosedur; (2) siswa belum terbiasa melakukan prosedur pembuktian matematis; dan (3) siswa tidak memahami konsep atau masalah yang diajukan. Kesulitan yang dialami Siswa A dan Siswa B dalam menyelesaikan permasalahan matematika dengan induksi matematika terdiri dari kesalahan konsep dan kesalahan operasi aljabar.

Dalam penelitian ini, diberikan 3 soal induksi matematika dan diperoleh hasil terdapat 2 jenis kesalahan yang dilakukan siswa. Kesalahan pertama yang dilakukan kedua siswa adalah kesalahan konsep. Siswa A dan siswa B tidak memahami makna “n” dalam basis induksi. Karena dalam buku teks yang digunakan siswa dituliskan bahwa basis induksi dimulai dari  $n = 1$ , maka ketika peneliti membuat soal dengan basis induksi yang dimulai dengan  $n \neq 1$  siswa mengalami kebingungan. Ernest (Astawa et al., 2020) menyatakan dalam penelitiannya mengkaji bahwa kesulitan siswa dalam masalah induksi matematika yaitu ada pada keterampilan perilaku dan pemahaman konsep. Keterampilan perilaku yang diamati berupa kemampuan membuktikan basis induksi, kemampuan membuktikan langkah induksi, dan kemampuan menunjukkan bukti induksi yang benar. (Atiqoh & M, 2021) menjelaskan bahwa siswa cenderung mengalami miskonsepsi ketika melakukan pembuktian dengan induksi pada langkah basis induksi. Siswa tidak dapat menentukan proposisi fungsi bernilai  $n$  atau tidak tepat menginterpretasi nilai  $p(n)$  dan menghilangkan pemeriksaan basis induksi.

Kesalahan selanjutnya adalah kesalahan dalam pengoperasian bentuk aljabar. Siswa yang melakukan kesalahan dalam tahap ini mengakibatkan proses pembuktian tidak berhasil. Faktor yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan ini adalah kurangnya pemahaman siswa dalam memahami materi prasyarat, dalam hal ini aljabar. Hal sejalan dengan pendapat yang dikemukakan oleh (Emeira et al., 2020) yang menyatakan bahwa siswa masih mengalami kesulitan teknis yang ditunjukkan oleh siswa yang masih melakukan kesalahan dalam melakukan

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

manipulasi aljabar pada langkah induksi. Lebih lanjut (Adinata et al., 2020) juga menyimpulkan bahwa terdapat empat miskonsepsi dalam menyelesaikan masalah induksi matematika yaitu, pertama, miskonsepsi dalam menginterpretasikan  $(n)$  pada pembuktian  $P(n)$ . Kedua, miskonsepsi dalam membuat generalisasi (induksi). Ketiga, miskonsepsi dalam prosedur pembuktian. Keempat, miskonsepsi dalam memanipulasi atau mengoperasikan. Kesulitan yang dialami siswa dalam membuktikan adalah memahami konsep pembuktian, bahasa matematika dan notasi, dan kesulitan ketika memulai pembuktian (Moore, 1990).

Temuan yang didapat dari penelitian ini, yaitu siswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah pembuktian menggunakan induksi matematika. Hal ini terlihat dari hasil jawaban siswa dalam menjawab 3 soal pembuktian pernyataan matematika menggunakan induksi, siswa cenderung gagal menyelesaikan setiap soal secara mandiri dikarenakan tipe soal yang disajikan berbeda dengan soal yang biasa dikerjakan, yaitu basis induksi tidak dimulai dari  $n = 1$ . Siswa perlu lagi dikenalkan dengan konsep dasar induksi. Selain itu, siswa perlu dilatih kembali pengoperasian bentuk aljabar.

Hal ini sejalan dengan penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa terdapat miskonsepsi siswa dalam membuktikan pernyataan matematika dengan induksi matematika yang terdapat pada langkah dasar maupun langkah induksi (Astawa et al., 2020). Miskonsepsi siswa bersumber dari kekeliruan dalam analogi atau dalam menginterpretasi notasi matematika. Disebutkan pula bahwa dalam menyelesaikan soal induksi matematika, banyak siswa yang melewati langkah dasar induksi, akibatnya siswa gagal

menyelesaikan tahapan induksi setelahnya (Dogan, 2016). Selanjutnya, diungkapkan pula bahwa kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal matematika yaitu kesalahan prosedural, kesalahan mengorganisasikan data, kesalahan dalam mengurutkan dan mengelompokkan data, kesalahan dalam menggunakan simbol, kesalahan dalam memanipulasi data, serta kesalahan dalam menarik kesimpulan (Layn & Kahar, 2017).

Keterbatasan penelitian ini yaitu hanya dilakukan dalam kelompok kecil. Hasil penelitian ini bisa dikembangkan kembali menjadi sebuah penelitian dengan jumlah subjek yang diteliti lebih banyak, kemudian dikembangkan kembali temuan-temuan yang serupa.

## KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian, dapat disimpulkan bahwa beberapa siswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan permasalahan menggunakan induksi matematika. Hal ini terlihat dari kesalahan yang dilakukan siswa dalam proses penyelesaian masalah induksi. Kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan induksi matematika adalah kesalahan konsep dan kesalahan operasi aljabar.

Kesalahan konsep yang dilakukan siswa adalah siswa tidak memahami makna " $n$ " dalam induksi matematika. Siswa terbiasa menyelesaikan soal induksi matematika yang dimulai dari basis induksi  $n = 1$ . Selanjutnya pada tahap  $P(k + 1)$ , kesalahan konsep yang dilakukan siswa adalah siswa tidak memahami maksud " $k + 1$ ". Siswa melupakan tahap  $n = k$  saat menyelesaikan  $P(k + 1)$  sehingga dalam menyelesaikan pembuktian tidak diperoleh hasil yang benar. Kesalahan operasi terjadi saat proses pembuktian

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

dengan induksi. Pada tahap  $P(k + 1)$ , siswa mengalami kesulitan dalam pengoperasian bentuk aljabar. Kesalahan ini terjadi karena siswa belum memahami materi operasi bentuk aljabar dengan baik.

Saran untuk guru pengajar matematika kelas XI, sebaiknya siswa diberikan latihan soal induksi dengan langkah basis yang tidak dimulai dari  $n = 1$  agar siswa memiliki keterampilan yang baik ketika dihadapkan pada soal induksi yang lebih kompleks. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk meneliti lebih lanjut mengenai miskonsepsi siswa terhadap makna basis induksi. Karena langkah basis induksi sangat penting dalam proses pembuktian, namun banyak siswa yang masih belum memahaminya.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Adinata, Y. C., Budiyo, B., & Indriati, D. (2020). Misconceptions in mathematical induction for eleventh-grade students - HOTS categorized items. *Journal of Physics: Conference Series*, 1469(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1469/1/012153>
- Aditya Cahyani, C., & Sutriyono, S. (2018). Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Pada Materi Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Aljabar Bagi Siswa Kelas VII SMP Kristen 2 Salatiga. *JTAM | Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika*, 2(1), 26. <https://doi.org/10.31764/jtam.v2i1.257>
- Ahmadi, Y., Kusumah, Y. S., & Jupri, A. (2019). Analysis of high school students' errors in mathematical proving: The case of mathematical induction. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012068>
- Ardiawan, Y. (2015). ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL INDUKSI MATEMATIKA DI IKIP PGRI PONTIANAK. *Jurnal Pendidikan Informatika Dan Sains*, 4(1).
- Ashkenazi, Y., & Itzkovitch, E. (2014). Proof by Mathematical Induction. *International Journal of Innovation and Research in Educational Sciences*, 1(3), 186–190. <https://doi.org/10.1201/9781003082927-4>
- Astawa, I. W. P., Sudiarta, I. G. P., & Suparta, I. N. (2020). Kesulitan Siswa dalam Membuktikan Masalah Kesamaan dan Ketidaksamaan Matematika Menggunakan Induksi Matematika. *Jurnal Elemen*, 6(1), 146–156. <https://doi.org/10.29408/jel.v6i1.1746>
- Atiqoh, K. S. N., & M, H. (2021). Miskonsepsi Mahasiswa pada Induksi Matematika Menggunakan Certainty of Response Index (CRI). *Jurnal Pedagogik*, 4(2), 43–51. <https://doi.org/10.35974/jpd.v4i2.2536>
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design Qualitative, Quantitative, and Mixed Method Approaches*.
- Dogan, H. (2016). Mathematical induction: deductive logic perspective. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 315–330.
- Emeira, G., Hapizah, & Scristia. (2020). Mathematical proof analysis using mathematical induction of grade XI students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1480(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1480/1/012044>
- Erdoğan, M., Kurudirek, A., & Akça, H. (2014). The Effect of Mathematical Misconception on Students' Success in Kinematics Teaching. *Education*

DOI: <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6106>

- Journal*, 3(2), 90–94.  
<https://doi.org/10.11648/j.edu.20140302.18>
- Ernawati, & Ilhamuddin. (2020). Deskripsi kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal matematika pokok bahasan induksi matematika. *Delta-Pi: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 9.
- Fischbein, E., & Engel, I. (1898). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 276–282.
- Fitriani, D., Halini, & Suratman, D. (2021). ANALISIS KESALAHAN SISWA DALAM PEMBUKTIAN PERNYATAAN MATEMATIKA MENGGUNAKAN INDUKSI MATEMATIKA DI SEKOLAH MENENGAH ATAS. *FKIP Untan Pontianak*.
- Güler, G. (2016). The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views. *Higher Education Studies*, 6(1), 145. <https://doi.org/10.5539/hes.v6n1p145>
- Hasan, B. (2016). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Bukti Menggunakan Induksi Matematika Berdasarkan Teori Pemrosesan Informasi. *Apotema*, 2, 33–40.
- Indah, P., & Nuraeni, R. (2021). Perbandingan Kemampuan Penalaran Deduktif Matematis Melalui Model PBL dan IBL Berdasarkan KAM. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(1). <http://journal.institutpendidikan.ac.id/index.php/mosharafa>
- Larson, N., & Pettersson, K. (2018). Proof by induction-the role of the induction basis. *NORMA* 17, 99–108.
- Layn, M. R., & Kahar, M. S. (2017). ANALISIS KESALAHAN SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL CERITA MATEMATIKA. *Jurnal Math Educator Nusantara*, 3, 95–102.
- Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). PEMETAAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS SEBAGAI PRASYARAT MATA KULIAH ANALISIS RIIL MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA. *Kalamatika - Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1).
- Moore, R. C. (1990). College students' difficulties in learning to do mathematical proofs. *University of Georgia*.
- Permendikbud. (2018). Permendikbud RI Nomor 37 tahun 2018 tentang Perubahan atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah. *Permendikbud RI Nomor 37 Tahun 2018*, 1–527.
- Permendikbud RI Nomor 59 Tahun 2014. (2014). Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan RI NO. 59 Tahun 2014 Tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah. *Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan RI NO. 59 Tahun 2014*, 328. [https://jdih.kemdikbud.go.id/arsip/Permendikbud Nomor 59 Tahun 2014.pdf](https://jdih.kemdikbud.go.id/arsip/Permendikbud%20Nomor%2059%20Tahun%202014.pdf)
- Rijali, A. (2018). Analisis Data Kualitatif. *Alhadharah: Jurnal Ilmu Dakwah*, 17(33).