STABILISASI PADA *DOUBLE INVERTED* PENDULUM MENGGUNAKAN METODE *LQR - BAT ALGORTHM*

Achmad Komarudin[1)], Mas Nurul Achmadiah, Leonardo Kamajaya
Politeknik Negeri Malang
[1)]akomarudin1957@yahoo.co.id

Abstrak

Sistem *double inverted pendulum* digunakan untuk mengkaji metode kontrol dari sistem nonlinear yang kompleks. Pada sistem tersebut ditemukan tiga permasalahan, yaitu *swing-up*, stabilisasi, dan *tracking*. Pada penelitian ini digunakan metode LQR-*Bat Algorithm* untuk mengoptimasi kestabilan pada sebuah *double inverted pendulum*. Hasil penelitian menunjukkan penggunaan *Bat Algorithm* pada metode LQR dapat menyelesaikan permasalahan stabilisasi. Pada iterasi ke 300-400 terjadi pengurangan nilai *fitness* yang menghasilkan fungsi SSE bernilai semakin kecil.
Kata-kata kunci: *double inverted pendulum, Bat-Algorithm, LQR*

Abstract

The double inverted pendulum system is used to examine the control methods of complex nonlinear systems. *In the system three problems were found, namely swing-up, stabilization, and tracking. In this study, the LQR-Bat Algorithm method is used to optimize stability in a double inverted pendulum. In this study, the LQR-Bat Algorithm method is used to optimize stability in a double inverted pendulum. The results show that the use of Bat Algorithm in the LQR method can solve stabilization problems. n the 300-400 iteration there is a decrease in fitness value which results in a smaller value SSE function.*
Keywords: *double inverted pendulum, Bat-Algorithm, LQR*

1. PENDAHULUAN

Sistem pendulum-kereta adalah salah satu dari *plant nonlinear* yang memiliki karakteristik yang sederhana, namun sulit untuk dikontrol [1]. Bagian utama dari sistem pendulum-kereta adalah kereta yang dapat bergerak horizontal pada lintasan yang terbatas dan pendulum yang dapat berayun bebas terhadap porosnya. *Double inverted pendulum* adalah modifikasi dari sebuah pendulum terbalik, yaitu dengan cara menambahkan satu pendulum lagi yang disambungkan dengan pendulum sebelumnya. *Double inverted pendulum* biasa digunakan untuk menguji suatu metode kontrol sehingga metode kontrol tersebut dapat diterapkan pada berbagai aplikasi dari sistem nonlinear yang lebih kompleks. Terdapat tiga permasalahan kontrol pada *Double inverted pendulum*, yaitu *swing-up*, stabilisasi, dan *tracking*. *Swing-up* adalah usaha yang dilakukan untuk mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung ke posisi terbaliknya. Stabilisasi adalah usaha yang dilakukan untuk menjaga batang pendulum tetap stabil pada posisi terbaliknya. *Tracking* adalah usaha yang dilakukan untuk memaksa agar bergerak mengikuti sinyal referensi dengan tetap mempertahankan batang pendulum pada posisi terbaliknya. Suatu sistem *nonlinear* seperti *Double inverted pendulum*, apabila tidak dikontrol akan mempengaruhi kestabilan sistem. Oleh karena itu digunakan suatu metode kontrol yang bersifat *robust* untuk menjaga kestabilan sistem.

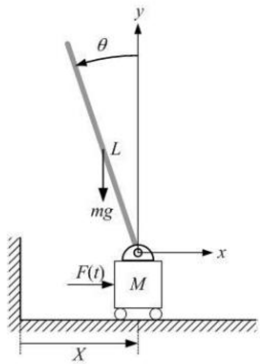
Pada [2], telah dilakukan perbandingan dengan menggunakan metode LQR dan *pole placement* untuk penyelesaian permasalahan kestabilan pada *inverted pendulum.* Dan hasil yang diperoleh, penggunaan LQR memiliki hasil lebih baik dibandingkan menggunakan *pole placement*. Namun pada [2] juga dikatakan, jika penambahan metode *heuristic* dapat memperbaiki hasil respon sistem. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan penggunaan LQR dapat memperbaiki respon sistem double inverted pendulum, Sehingga dapat diusulkan penggunaan metode *heuristic* untuk perbaikan respon sistem pada sistem *double inverted pendulum*.

Pada [3], telah dilakukan penelitian pada *double inverted pendulum* menggunakan *optimal control* yaitu kontrol LQR. Hasil yang didapatkan adalah, kontrol LQR mampu memperbaiki *step response* pada sistem. Kelemahan penelitian ini adalah penentuan konstanta matrik Q dan R dilakukan secara trial dan error. Seperti pada [2], penentuan secara trial dan error dapat diperbaiki dengan penambahan metode *heuristic*. Sehingga pada penelitian ini, diusulkan sebuah metode kontrol kestabilan pada sebuah *double inverted pendulum* menggunakan LQR-*Bat algorithm*.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1. Perbandingan dari LQR dan *pole Placement Design Controllers* sebagai pengendali *Inverted Pendulum*

Penelitian ini membandingkan penggunaan metode LQR dan metode *pole placement* untuk mengontrol sebuah *inverted pendulum.*



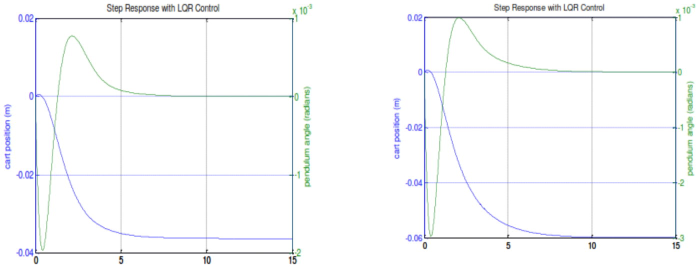
Gambar 1. Inverted Pendulum

Tahapan desain pada penelitian ini adalah :

1. Menentukan parameter matriks Q dan R dengan menggunakan trial dan error. Dalam penelitian ini nilai R yang digunakan adalah :
$$R = 0.1, 0.033, 0.044, 0.088, 0.090$$
dan nilai Q adalah tetap dengan nilai :
$$Q = [1\ 0\ 0\ 0; 0000; 0\ 0\ 1\ 0; 0\ 0\ 0\ 0]$$
2. Mendapatkan nilai P dengan Menyelesaikan persamaan aljabar riccati dengan menggunakan simulasi MATLAB. Didapatkan nilai :
$$P = [-55.7078, -3.4947 + 10.5695i, -3.4947 - 10.5695i, 5.3027 + 0.0000i].$$
3. Mendapatkan nilai optimal dengan menyelesaikan persamaan.

$$u = -R^{-1} B^T Px$$

Beberapa hasil yang didapatkan dengan merubah nilai Q dan R adalah

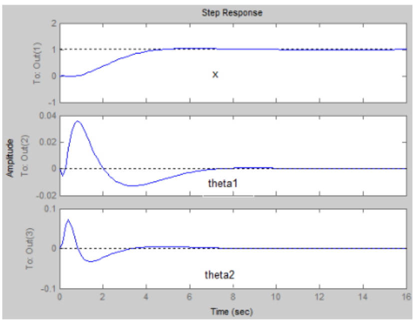


Gambar 2. (A) Respon Lqr Untuk R = 0.033 Dan (B) Respon Lqr Untuk R = 0.090

Dari penelitian [2], dikatakan bahwa penggunaan metode *heuristic* dapat memperbaiki respon sistem pada sistem *double inverted pendulum.*

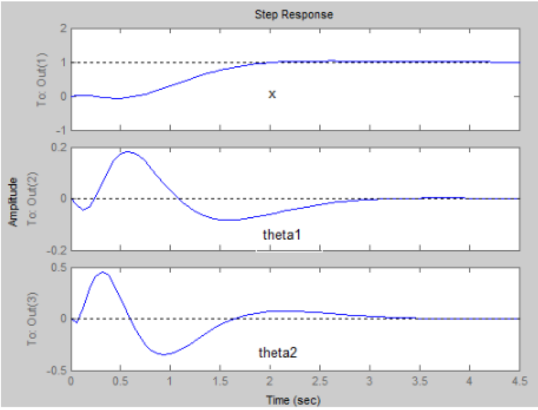
2.2. Optimasi kontrol dari Double Inverted Pendulum menggunakan LQR Controller

Penelitian ini bertujuan untuk mengontrol sebuah *double inverted pendulum* menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Pada metode LQR baik dan buruknya respon sistem ditentukan oleh matriks pembobot Q dan R. Pengujian dilakukan secara simulasi menggunakan software MATLAB. Hasil yang didapatkan dengan $Q = diag(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$ dan $R = 1$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3. Hasil Respon *Double Inverted Pendulum* Menggunakan Metode LQR Dengan $Q = diag(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$ Dan $R = 1$

Dan dengan mengganti nilai Q menjadi $Q = diag(100\ 0\ 100\ 0\ 100\ 0)$ dan memberikan nilai R yang sama yaitu $R = 1$ maka didapatkan hasil.



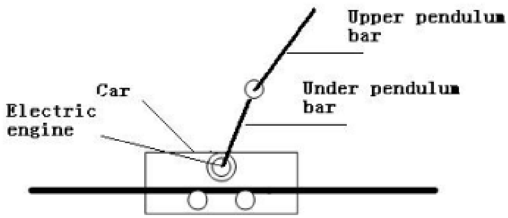
Gambar 4. Hasil Respon *Double Inverted Pendulum* Menggunakan Metode Lqr Dengan $\boldsymbol{Q = diag(100\ 0\ 100\ 0\ 100\ 0)}$ Dan $\boldsymbol{R = 1}$

Kesimpulan yang didapatkan adalah, dengan merubah nilai matriks pembobot Q dan R, maka mempengaruhi nilai *settling time* dan *rise time* pada sistem. Dari penelitian [2] dan [3], dapat disimpulkan perlu adanya metode tambahan seperti metode *heuristic* untuk memperbaiki respon sistem dengan menentukan nilai Q dan R yang optimal sehingga hasil yang didapatkan menjadi optimal.

3. METODE

3.1. Permodelan Matematika Double Inverted Pendulum

Double inverted pendulum adalah sistem yang terdiri dari kereta pendulum bagian atas (*upper pendulum*) dan pendulum bagian bawah (*under pendulum*). Pendulum bagian atas dan bawah dihubungkan dengan engsel, begitu juga pendulum bagian bawah dan kereta juga dihubungkan dengan engsel. Kereta dapat bergerak bebas sepanjang rel namun hanya sebatas kekanan dan kekiri [1]. Gambar 3 merupakan gambar *double inverted pendulum* [1] .



Gambar 5. Double Inverted Pendulum

Pada penelitian ini persamaan state yang digunakan mengacu pada penelitian [1], dan disajikan pada persamaan (1):

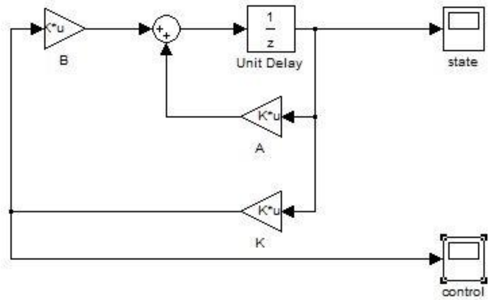
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&-1.6224&0&0.1803&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&54.5719&0&-25.6635&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&-76.9906&0&67.3545&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.3902\\0\\-1.0033\\0\\0.3344\end{bmatrix}u \qquad (1)$$

3.2. Linear Quadratik Regulator

Linear Quadratic Control merupakan salah satu metode dalam perancangan sistem kontrol optimal. Kelebihan penggunaan formulasi *Linear Quadratic* adalah pada kemudahan analisa dan pengimplementasiannya. Metode optimasi dengan *Linear Quadratic Regulator* (LQR) adalah dengan menentukan sinyal masukan yang akan memindahkan suatu state sistem linear dari kondisi (t_0) menuju ke suatu kondisi akhir $x(t)$ yang akan meminimumkan suatu indeks untuk kerja performansi quadratik [2]. Dengan fungsi performa indeks seperti pada persamaan (2):

$$J=\frac{1}{2}x^T(T)x(T)+\frac{1}{2}\int_0^T(x^Tx+ru^2)dt \qquad (2)$$

Dimana Q adalah faktor pembobot state (matriks semi difinit positif) dan R adalah bobot faktor variable kontrol (matriks definit positif). Blok diagram Metode optimasi dengan LQR disajikan pada gambar 6.



Gambar 6. Gambaran Metode *Linear Quadratic Regulator*

3.3. Ekolokasi Kelelawar

Prinsip kerja ekolokasi kelelawar adalah dengan memancarkan frekuensi suara yang sangat keras dan mendengarkan gema yang memantul kembali dari objek disekitarnya. Frekuensi yang dipancarkan bisa bervariasi dalam sifat dan dapat dikorelasikan dengan strategi berburu mereka, tergantung pada spesies kelelawar tersebut. Kebanyakan kelelawar menggunakan gelombang pendek dan menggunakan frekuensi konstan untuk sinyal ekolokasi [4].

Meskipun setiap frekuensi suara yang dipancarkan leh kelelawar hanya berlangsung sangat singkat yaitu sekitar seperseribu detik, namun frekuensinya konstan yaitu diantara $25\,KHz$ sampai $150\,KHz$. Setiap suara yang dipancarkan oleh kelelawar hanya berlangsung antara 5 sampai $20\,ms$, dan kelelawar kecil dapat memancarkan sekitar 10 sampai 20 gelombang suara tersebut setiap detiknya. Namun ketika berburu tingkat gelombang suara yang dipancarkan dapat melesat hingga sekitar 200 gelombang suara perdetik ketika mereka terbang didekat mangsanya [4].

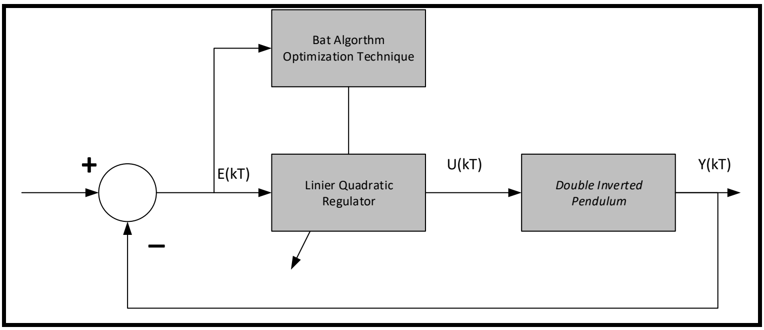
3.4. Karakteristik Algoritma Kelelawar

Algoritma kelelawar adalah algoritma optimasi berdasarkan dari perilaku ekolokasi kelelawar. Dari beberapa karakteristik ekolokasi kelelawar, dapat dikembangkan menjadi algoritma kelelawar. Untuk menyederhanakan perilaku dari kelelawar, maka aturan dari perilaku dapat diasumsikan sebagai berikut [4] :

1. Semua kelelawar menggunakan ekolokasi untuk merasakan jarak, dan mereka juga mengetahui perbedaan antara makanan dan keadaan sekitar.
2. Kelelawar terbang secara acak dengan kecepatan v_i dan pada posisi x_i dengan frekuensi f_{min} tetap, panjang gelombang λ dan kenyaringan A_0 untuk mencari mangsa.
3. Selain asumsi sederhana diatas, secara umum frekuensi f berada dalam range f_{max} dan f_{min}.

3.5. Blok Diagram Sistem

Blok diagram desain LQR dengan pendekatan algoritma kelelawar untuk tunning parameter matriks Q dan R pada sebuah *double inverted pendulum* disajikan pada gambar 7.



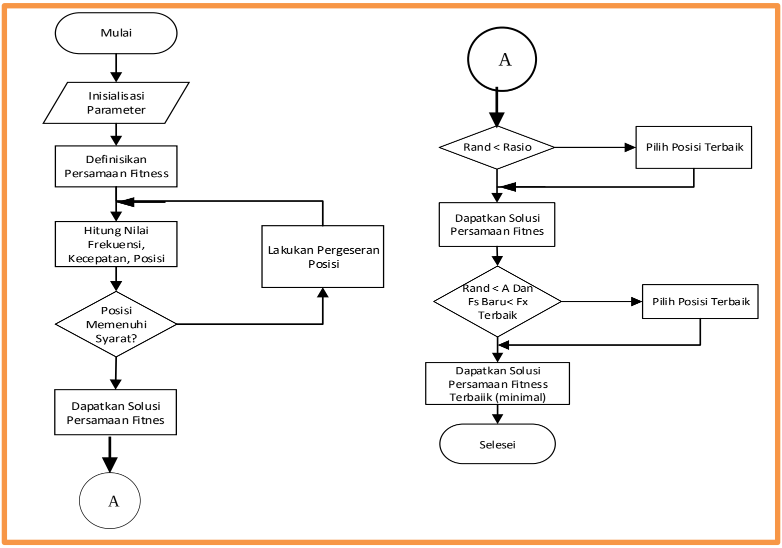
Gambar 7. Blok Diagram Sistem

3.6. Diagram Alir Perancangan Algoritma Kelelawar

Diagram alir perancangan algoritma kelelawar disajikan dalam gambar 8. Fungsi *fitness* didefinisikan menggunakan SSE (*Sum Square Error*). Persamaannya (3) merupakan fungsi *fitness* untuk penelitian ini.

$$f = \sum_{k=1}^{n} \left(R_d(kT) - R_{act}(kT)\right)^2 + \left(\theta_{1d}(kT) - \theta_{1act}(kT)\right)^2 + (\theta_{2d}(kT) - \theta_{2act}(kT))^2 \quad (3)$$

Dengan R_d posisi yang diinginkan R_{act} posisi aktual, θ_{1d} sudut antara pendulum bagian bawah dengan arah vertikal yang diinginkan, sedangkan θ_{1act} merupakan sudut aktualnya. Dan θ_{2d} sudut yang diinginkan antara pendulum bagian atas dengan arah vertikal θ_{2act} merupakan sudut aktualnya.



Gambar 8. Diagram Alir Algoritma Kelelawar

3.7. Perancangan Metode LQR – BA

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai perancangan metode LQR –BA. Penjelasan pada masing - masing diagram alir adalah sebagai berikut :

1. Inisialisasi parameter yang terdiri dari :
   a. Jumlah kelelawar/ bats yang digunakan
   b. Jumlah iterasi maksimal yang digunakan
   c. Jumlah dimensi
   d. Posisi minimal dan maksimal
   e. Dimensi matriks batas atas dan batas bawah

   f. Minimal dan maksimal frekuensi kelelawar
   g. Rasio pemancaran getaran
   h. Tingkat kebisingan
2. Untuk mendapatkan persamaan *fitness*, terlebih dahulu harus didefinisikan persamaan fitness yang digunakan pada permasalahan.
3. Pemilihan parameter dengan menggunakan algoritma kelelawar pada matriks Q dan R harus memenuhi persyaratan yaitu error yang dihasilkan adalah minimal. Sehingga perhitungan diulangi sebanyak iterasi yang diberikan sehingga didapatkan nilai parameter matriks Q dan yang optimal.
4. Hitung nilai gain K dengan menggunakan nilai Q dan R yang telah dipilih.
5. Nilai K pada poin 4 akan digunakan sebagai gain LQR yang akan di simulasikan menggunakan Matlab simulink.

Langkah – langkah pengujian metode *Linier Quadratic Regulator* (LQR) menggunakan algoritma kelelawar sebagai tuning parameter matriks Q dan R untuk mendapatkan error yang terkecil. adalah sebagai berikut :

1. Inisialisasi parameter

Pemberian nilai pada masing – masing parameter dilakukan dengan menggunakan m-file pada Matlab seperti pada gambar 9.

```
%_________________________Inisialisasi Parameter____________________
Bat = 20;           %Jumlah kelelawar
iterasi = 200;      %Jumlah maksimal iterasi
Dimensi = 7;        %Jumlah dimensi
minPosisi = 0;      %Posisi minimal dari fungsi yang akan dihitung
maksPosisi = 100;   %Posisi maksimal dari fungsi yang akan dihitung
minFrek = 0;        %Batas minimal frek
maksFrek = 2;       %Batas maksimal frek
rasio = 0.5;        %Rasio pemancaran getaran kelelawar
tingkatKebisingan = 0.5;%Tingkat kebisingan
%__________________________________________________________________
```

Gambar 9. Inisialisasi Parameter Pada Matlab

2. Dapatkan persamaan *fitness*

Untuk mendapatkan persamaan fitness dari permasalahan, terlebih dahulu rubah state dalam diskrit, sehingga didapatkan matriks A dan B dalam bentuk diskrit. Seperti pada gambar 10.

```
    %Merubah dalam bentuk diskrit%
%_____matriks A(dalam kontinyu)____
A=[0 1      0       0     0       0;...
   0 0 -1.6224      0 0.1803      0;...
   0 0      0       1     0       0;...
   0 0 54.5719      0 -25.6635    0;...
   0 0      0       0     0       1;...
   0 0 -76.9906 0 67.3545     0];
%_____matriks B(dalam kontinyu)____
B=[0;0.3902;0;-1.0033;0;0.3344];
%____Ubah dari continue to diskrit____
[G,H]=c2d(A,B,0.1);
%matriks G ==> matriks A dalam bentuk diskrit
%matriks H ==> matriks A dalam bentuk diskrit
```

Gambar 10. Merubah Matriks Dalam Bentuk Diskrit

3. Dapatkan parameter matriks Q dan R menggunakan algoritma kelelawar untuk memperoleh gain K.

Terlebih dahulu dapatkan solusi persamaan *fitness* yang memiliki nilai minimal sehingga didapatkan parameter matriks Q dan R yang digunakan untuk menghitung nilai K sebagai gain pada metode LQR. Langkah – langkah algoritma kelelawar adalah sebagai berikut:

a. Inisialisasi kelelawar pada posisi acak

```
%inisialisasi kelelawar pada posisi acak
for i=1:Bat,
    daftarBat(i,:) = Lb + (Ub-Lb) .* rand(1,Dimensi);
    nilaiFungsi(i) = fitness(daftarBat(i,:));
end
```

Gambar 11. Inisialisasi Posisi Acak

dengan L_b merupakan matriks batas bawah dan U_b merupakan matriks batas atas dimensi. setelah didapatkan nilai posisi acak kelelawar, maka nilai tersebut digunakan untuk menyelesaikan fungsi *fitness*.

b. Dapatkan posisi terbaik sementara

```
%Posisi terbaik sementara
[fsBest,I] = min(nilaiFungsi);
    xbest = daftarBat(I,:);
```

Gambar 12. Posisi Terbaik Sementara

dengan x_{best} merupakan posisi terbaik sementara.

c. Lakukan perhitungan frekuensi, kecepatan dan posisi yang baru sebanyak jumlah iterasi.

```
%Tentukan nilai acak frekuensi yang digunakan
frekuensi(i) = minFrek + (minFrek-maksFrek) * rand;
%Hitung kecepatan perpindahan kelelawar ke posisi yang baru
kecepatan(i,:) = kecepatan(i,:) + (daftarBat(i,:) - xbest) * frekuensi(i);
%Hitung posisi baru
posisiBatBaru(i,:) =abs( daftarBat(i,:) + kecepatan(i,:));
```

Gambar 13. Perhitungan Frekuensi Kecepatan Dan Posisi Baru

4. Lakukan pengecekan kembali pada posisi dari kelelawar, apakah masih dalam batas yang diperbolehkan.

```
%cek kembali
tmpPosisi=posisiBatBaru(i,:);
I=tmpPosisi<Lb;
tmpPosisi(I)=Lb(I);
J=tmpPosisi>Ub;
tmpPosisi(J)=Ub(J);
posisiBatBaru(i,:)=tmpPosisi;
```

Gambar 14. Pengecekkan Kembali Posisi Kelelawar

5. Bandingkan nilai acak dengan rasio getaran, jika lebih besar maka lakukan pergeseran posisi kelelawar.

```
if rand > rasio
    posisiBatBaru(i,:) = xbest + 0.001 * randn(1,Dimensi);
end
```

Gambar 15. Membandingkan Nilai Acak Dengan Rasio Getaran

6. Lakukan perhitungan pada fungsi yang baru

```
%Hitung nilai fungsi pada posisi yang baru
nilaiFungsiBaru = fitness(posisiBatBaru(i,:));
```

Gambar 16. Perhitungan Fungsi Baru

7. Tentukan nilai acak untuk dibandingkan nilai acak dengan tingkat kebisingan, jika nilai fungsi baru lebih baik dibanding fungsi sebelumnya dan nilai acak kurang dari batas maksimal

tingkat kebisingan, maka ambil posisi yang baru sebagai posisi terbaik.

```
        if (nilaiFungsiBaru < nilaiFungsi(i)) && (rand<tingkatKebisingan),
            daftarBat(i,:) = posisiBatBaru(i,:);
            nilaiFungsi(i) = nilaiFungsiBaru;
```

Gambar 17. Menentukan Nilai Acak

8. Lakukan perbandingan fungsi baru dan fungsi terbaik untuk mencari posisi terbaik.

```
        %Kemudian lakukan perbandingan dengan nilai fungsi terbaik
        if nilaiFungsiBaru < fsBest,
            xbest = posisiBatBaru(i,:);
            fsBest = nilaiFungsiBaru;
        end
```

Gambar 18. Membandingkan Fungsi Baru Dengan Fungsi TerbaIK

Setelah mendapatkan nilai fungsi terbaik yang merupakan solusi dari persamaan *fitness* maka tahap selanjutnya adalah menghitung gain K untuk selanjutnya digunakan pada simulasi LQR pada *double inverted pendulum*. Untuk mencari nilai K menggunakan persamaan berikut :

$$K_k = \left(H_k^T S_{k+1} H_k + R_k\right)^{-1} H_k^T S_{k+1} G_k \qquad (4)$$

dengan G dan H merupakan matriks A dan B dalam diskrit, dan S merupakan solusi aljabar ricati dengan menyelesaikan persamaan :

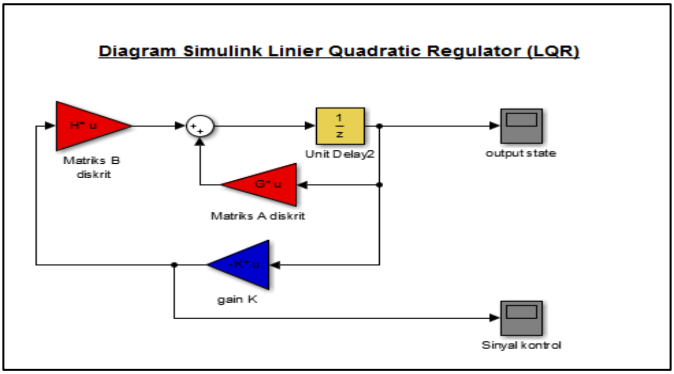
$$A^T S + SA - ABR^{-1}B^T S + Q = 0 \qquad (5)$$

Namun keseluruhan proses dilakukan dengan menggunakan perhitungan komputasi dengan kode program pada matlab seperti pada gambar 19.

```
[s,~,~]=dare(G,H,Q,R);
K=inv(H'*s*H+R)*H'*s*G;
```

Gambar 19. Perhitungan Komputasi

Dengan menggunakan nilai gain K hasil iterasi menggunakan algoritma kelelawar, maka dapat dilakukan simulasi LQR dengan algoritma kelelawar dengan diagram simulink diberikan pada gambar 20.

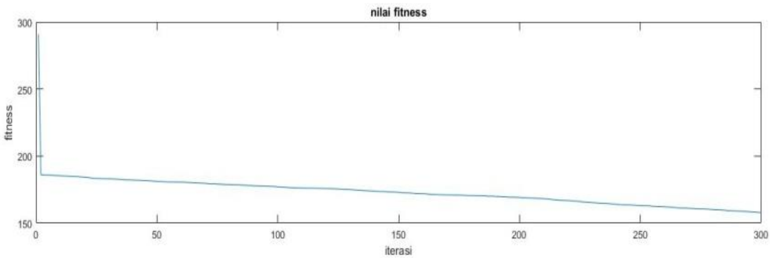


Gambar 20. Diagram Simulink LQR - BA

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Pengujian Dengan Iterasi 300

Pengujian pertama dilakukan dengan menggunakan iterasi sebanyak 300. Hasil dari pengujian ditunjukkan dalam gambar 21.

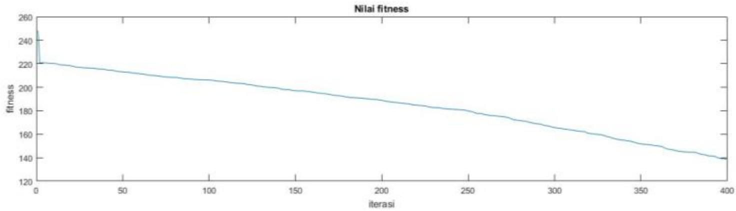


Gambar 21. Nilai Fitness Pada Saat Iterasi = 300

Gambar 21 menunjukkan bahwa pada iterasi ke 300 nilai Q dan R yang didapatkan merupakan nilai yang optimal dengan perolehan nilai fitness yang minimal.

4.2. Pengujian pada iterasi ke 400

Pengujian pertama dilakukan dengan menggunakan iterasi sebanyak 400. Hasil dari pengujian ditunjukkan dalam gambar 22.

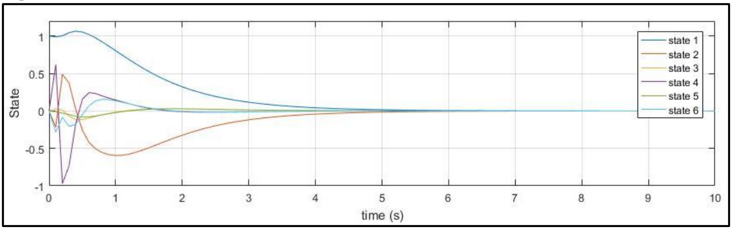


Gambar 22. Nilai Fitness Pada Saat Iterasi = 400

Gambar 22 menunjukkan bahwa pada iterasi ke 300 nilai Q dan R yang didapatkan merupakan nilai yang optimal dengan perolehan nilai fitness yang minimal.

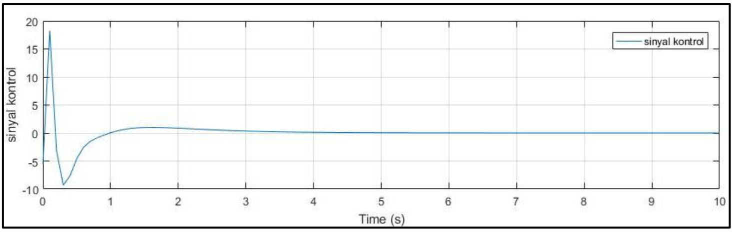
4.3. Pengujian respon state dan sinyal kontrol

Hasil pengujian respon pada masing – masing state diberikan pada gambar 23.



Gambar 23. Hasil Pengujian Respon State

Hasil pengujian respon sinyal kontrol diberikan pada gambar 24.



Gambar 24. Grafik Respon Sinyal Kontrol

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Penggunaan algoritma kelelawar pada metode Linier Quadratic Regulator sebagai tunning parameter matriks Q dan R yang diterapkan pada double inverted pendulum dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan permasalahan stabilisasi.
2. Pada percobaan iterasi ke 300 diperoleh nilai fitness sekitar $150 - 200$ dan pada iterasi ke 400 didapatkan nilai *fitness* sebesar 140. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pada rentang $300 - 400$ terjadi pengurangan nilai fitness, yang berarti fungsi SSE (*sum of square error*) bernilai semakin kecil.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Tanzania, N., F., Agustinah, T., "Stabilisasi Pada Sistem Pendulum Kereta dengan Menggunakan Metode Fuzzy-sliding Mode Control", Institute Teknologi Sepuluh Nopember, 2014.

[2] Razmjooy, N., Alikhani, H., "Comparison of LQR and Pole Placement Design Controllers for Controlling the Inverted Pendulum", Tafresh University, 2014.

[3] Yadav, S., K., Sharma, S., Singh, N., "Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller" International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, 2012.

[4] Novian, T., "Pencarian Solusi pada permasalahan sistem persamaan nonlinier menggunakan metode bat algorthm",UIN jakarta, 2015.

[5] Yadav, S., Sharma, S., Singh, M., N., "Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controler", IJARCSSE, 2012.