

Analisis Numerik Propagasi Soliton Dalam Serat Optik

Freddy P. Zen, Wahyu Hidayat, dan Ridwan Shiddiq
Theoretical High Energy Physics Laboratory, Physics Department,
Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesa 10 Bandung, 40132
E-mail :fpzen@fi.itb.ac.id, wahyurc@student.fi.itb.ac.id

Abstrak

Dikaji karakteristik propagasi soliton dan parameter yang terkait dengan menggunakan persamaan Schroedinger nonlinear (NLS) disertai fiber loss dan suku dispersi orde tinggi, sebagai representasi dinamika dalam serat optik. Dengan memanfaatkan Split-Step Fourier Method ditunjukkan bahwa parameter nonlinear, fiber loss, dispersi orde tinggi mempengaruhi perilaku propagasi soliton dalam fiber. Dari hasil simulasi didapatkan bahwa terjadi kompensasi efek dispersi dan nonlinearitas jika skala panjang dispersi mendekati skala panjang nonlinear. Sedangkan fiber loss memperkecil intensitas dan dispersi orde tinggi mempengaruhi kesimetrian pulsa selama propagasi.

Kata kunci : persamaan Schroedinger nonlinear (NLS), Group Velocity Dispersion (GVD), Nonlinearitas, Solusi Numerik, Split-Step Fourier Method, fiber loss, dispersi orde tinggi.

Abstract

Soliton propagation and some related parameters are considered by using Nonlinear Schroedinger Equation (NLS) with fiber loss and higher order dispersion term as dynamical representation in optical fibers. By using the Split-Step Fourier Method we showed that nonlinear parameter, fiber loss, higher order dispersion term influence the soliton propagation behavior in optical fibers. From simulation result yields that dispersion effect and nonlinearity compensate each other if dispersion and nonlinear length scales nearly equal. Whereas fiber loss reduced intensity and higher order dispersion term influence symmetry profile of the pulses as long as propagation.

Keywords : Nonlinear Schroedinger Equation (NLS), Group Velocity Dispersion (GVD), Nonlinearity, Numerical Solution, Split-Step Fourier Method, fiber loss, higher order dispersion.

1. Pendahuluan

Kompleksitas permasalahan dalam memecahkan persamaan matematika secara analitik, memberikan dorongan terhadap berkembangnya alternatif lain (metode numerik). Ini adalah salah satu peranan komputer dalam lingkup kajian Fisika (Fisika Komputasi). Peranan komputer lainnya dalam Fisika, selain analisis numerik (yang telah disebutkan di atas) adalah : manipulasi simbolik, simulasi, koleksi dan analisis data, serta visualisasi.

Perkembangan komputer, baik dalam peningkatan kemampuan perangkat lunak maupun perangkat keras, memberikan optimalisasi dan akurasi yang semakin baik untuk menyelesaikan berbagai permasalahan Fisika. Maka berbagai konsentrasi pemahaman Fisika yang (karena alasan tertentu) sulit dilakukan secara eksperimen di laboratorium, dapat dilakukan dengan perhitungan atau simulasi komputer.

Paper ini merupakan *review* hasil-hasil riset tentang persamaan gelombang nonlinear (Khususnya *Nonlinear Schroedinger* atau NLS), yang banyak diaplikasikan dalam teknologi komunikasi berbasis optik, selain penambahan *fiber loss* dan suku dispersi orde tinggi. Dalam tulisan ini dimanfaatkan metode *Split Step Fourier* dalam mensimulasikan efek dispersif dan nonlinearitas *fiber* terhadap propagasi gelombang¹⁾. Dari simulasi diperoleh bahwa dengan memberikan nilai konstanta nonlinearitas tertentu untuk mengimbangi

pengaruh dispersif, diperoleh profil gelombang stabil selama penjarannya dan ini merupakan karakteristik profil gelombang soliton.

Untuk memberikan gambaran teoretis tentang parameter fisis, dan besaran terkait yang berhubungan dengan propagasi gelombang soliton, serta teknik kompensasi dispersi maka penjelasan tentang teori tersebut diberikan pada bagian 2. Bagian ini mengulas persamaan NLS, yang sering digunakan untuk menjelaskan propagasi gelombang dalam optik nonlinear. Pada bagian selanjutnya, bagian 3 tulisan ini, dibahas secara sepintas berbagai metode numerik yang dapat digunakan dalam memecahkan persamaan diferensial parsial²⁾. Fokus selanjutnya pada bagian tersebut adalah metode yang dapat kita gunakan dalam mencari solusi numerik bagi NLS. Hasil-hasil numerik ditunjukkan pada bagian 4. Kesimpulan dan pokok-pokok pembahasan diberikan pada bagian 5.

2. Propagasi Soliton NLS

Meningkatnya kebutuhan akan komunikasi masa depan, yang memiliki kapasitas data yang besar dan kecepatan transmisi yang tinggi, memacu pertumbuhan berbagai riset mengenai peningkatan *performance* sistem telekomunikasi. Prospeknya semakin baik ketika Hasegawa dan Tappert³⁾ secara teoretik menunjukkan kemungkinan dapat dimanfaatkannya soliton dalam transmisi data komunikasi serat optik. Lebih jauh dari itu, pemanfaatan EDFA (*erbium doped fiber amplifier*) pada

sistem komunikasi serat optik dapat mengeliminasi *fiber loss*, sehingga pembatasan *performance* dalam transmisi serat optik hanya *noise*, *chromatic dispersion*, dan nonlinearitas.

Chromatic dispersion menjadi masalah utama dalam transmisi kecepatan bit tinggi. Untuk mengatasi masalah ini dilakukan kompensasi dispersi. Penyeimbangan dispersi dengan nonlinearitas Kerr merupakan salah satu teknik kompensasi dispersi. Hasilnya adalah pulsa soliton. Propagasi soliton dalam sistem tersebut dengan penambahan perangkat EDFA, dijelaskan secara teoretik dengan teori *guiding center (average) solitons*. Teori ini berlaku untuk kecepatan bit yang spasi *amplifiernya* lebih pendek dari periode soliton, dan pada skala jarak *amplifier*. Dalam teori tersebut dispersi dan nonlinearitas dianggap sebagai perturbasi, karena yang berpengaruh selanjutnya adalah *fiber loss* dan amplifikasi periodik. Dispersi dan nonlinearitas berperan hanya pada jarak yang sangat jauh dari jangkauan spasi *amplifier*. Osilasi amplitudo soliton dan lebar pulsanya sebagai akibat *fiber loss* dan amplifikasi periodik menyebabkan soliton mengalami *stable breather*. Teknik kompensasi dispersi lainnya yaitu membuat dispersi *fiber* periodik sepanjang jarak propagasi pulsa (*dispersion-managed system*)^{4,6}, penggunaan *chirped fiber gratings* dan penggunaan semikonduktor sebagai perangkat *waveguide*.

Dalam makalah ini dibahas teknik kompensasi dispersi dalam sistem *fiber* yang mendukung kompensasi nonlinearitas dan dispersif, yakni *fiber soliton*. Untuk lebih jelasnya dalam bagian 2 ini dipaparkan karakteristik serat optik. Perumusan persamaan NLS dan solusi analitiknya dibahas kemudian.

2.1. Karakteristik Serat Optik

2.1.1. Fiber Loss

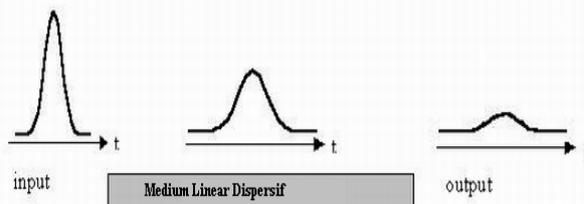
Selama propagasi pulsa dalam serat optik terjadi pengurangan daya (*power loss*). Beberapa faktor yang menyebabkan adanya *loss* yaitu penyerapan (*absorpsi*), hamburan *Rayleigh*, *bending losses*, *boundary losses*, dan *splice loss*¹. Penyerapan cahaya (*absorpsi*) muncul karena adanya cacat (*defect*) atom dalam komposisi serat optik, impuritas atom-atom (*absorpsi* ekstrinsik) contohnya ion OH, material dasarnya yang juga dapat menyerap cahaya (*absorpsi* intrinsik). Secara total perhitungan *loss* melibatkan juga *loss* yang diakibatkan hamburan *Rayleigh*, profil fiber yang terlipat (*bending losses*), akibat hamburan cahaya pada batas *core-cladding (boundary losses)*, dan *loss* yang diakibatkan oleh sambungan serat optik (*splice loss*).

Parameter yang digunakan untuk menyatakan hilangnya atau tidak kekalnya besaran fisika dalam *fiber* dinamakan *fiber loss*. Secara matematika, *fiber loss* (α) direlasikan dengan daya masukan (P_0), panjang serat optik (L), dan daya yang telah dikirimkan, $P_T = P_0 \exp(-\alpha L)$. Dalam teknisnya, satuan yang digunakan untuk *fiber loss* adalah dB/km. Nilai *fiber loss* menjadi minimum ketika digunakan gelombang pembawa pada panjang gelombang $\lambda=1.55 \mu\text{m}$, yang direpresentasikan oleh hasil pengukuran

loss. Pemanfaatan EDFA sebagai penguat dalam sistem komunikasi optik dapat membantu mengatasi *fiber loss*.

2.1.2. Dispersi

Pada Gambar 1 nampak penjalaran pulsa pada sistem linear dan medium yang dispersif. Untuk keperluan peningkatan *performance* dalam sistem komunikasi maka efek dispersi ini perlu dieliminasi. Maka perlu digunakan teknik kompensasi dispersi yang telah dijelaskan sebelumnya.



Gambar 1. Perubahan bentuk pulsa akibat pengaruh dispersi

Secara matematika efek dispersi *fiber* dihitung dengan ekspansi konstanta β (mode-propagasi/bilangan gelombang) dalam deret Taylor di sekitar frekuensi pusat ω_0 ¹, dan diperoleh hubungan bahwa

$$\beta_1 = \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{n}{c} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{V_g}, \tag{2.1a}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} = \frac{\lambda}{2\pi c^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \right), \tag{2.1b}$$

$$\beta_3 = \frac{\partial^3 \beta}{\partial \omega^3} = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^3} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^3 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \right) \tag{2.1c}$$

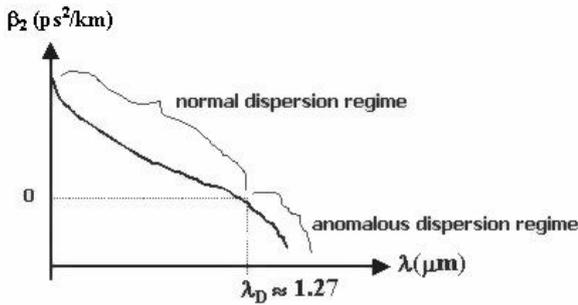
Parameter β_1 terkait dengan kecepatan grup (V_g). Parameter β_2 karena memiliki bentuk turunan dari kecepatan grup $\left(\beta_2 = -\frac{1}{V_g^2} \frac{\partial V_g}{\partial \omega} \right)$ dinamakan Dispersi

Kecepatan Grup atau *Group Velocity Dispersion (GVD)*¹, yang berhubungan erat dengan gejala pelebaran pulsa. Parameter lain yang didefinisikan dengan

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$$

merupakan besaran yang lazim digunakan dibandingkan dengan β_2 ; parameter D ini dinamakan parameter dispersi. Tanda dan besarnya D (atau β_2) sangat menentukan kontribusinya terhadap perilaku propagasi gelombang dalam fiber (lihat Gambar 2). Daerah dimana $\lambda < \lambda_D$ atau berarti $\beta_2 > 0$ ($D < 0$), diistilahkan dengan *normal dispersion regime*. Pada kondisi ini solusinya disebut *dark soliton*. Sebaliknya daerah $\lambda > \lambda_D$ atau berarti $\beta_2 < 0$ ($D > 0$), yang diistilahkan dengan *anomalous dispersion regime* memungkinkan didapatkannya solusi *bright soliton* (soliton ini digunakan dalam komunikasi serat optik).

Pada Gambar 2 diperlihatkan nilai $\beta_2(\lambda)$, dan $\beta_2(\lambda)=0$ terjadi ketika λ mendekati harga $1.27 \mu\text{m}$, yang sering dinamakan *zero dispersion wavelength* (λ_D).



Gambar 2. Variasi β_2 terhadap panjang gelombang

Daerah panjang gelombang di sekitar *zero dispersion wavelength* (λ_D), saat ini menjadi perhatian intensif, mengingat pada panjang gelombang tersebut GVD menjadi nol. Secara teknis memang sulit membuat *laser* dengan panjang gelombang λ_D . Namun secara teoretik, banyak dikaji berbagai kemungkinan perilaku sistem yang terjadi disekitar λ_D , termasuk kemungkinan munculnya pengaruh dispersi orde 3 (β_3) yang harus diamati hati-hati.

2.1.3 Nonlinearitas

Laser yang memiliki intensitas tinggi menyebabkan gerak tidak harmonik pada elektron yang terikat dalam *fiber*. Ini adalah respon terhadap medan yang diberikan ke *fiber*, akibatnya polarisasi terinduksi \vec{P} dipol-dipol listrik berelasi secara tidak linear (nonlinear) terhadap input medan listrik \vec{E} . Dalam bentuk tensor hubungan di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_i(\vec{r}, t) = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad (2.2)$$

dengan χ adalah suseptibilitas.

Efek nonlinear orde terendah dalam serat optik berasal dari suseptibilitas orde ke-3, yang dapat mengakibatkan fenomena indeks bias nonlinear,

$$\bar{n}(\omega, |E|^2) = n(\omega) + n_2 |E|^2, \quad (2.3)$$

$n(\omega)$ adalah indeks bias linear yang dihitung dari persamaan Sellmeier¹⁾, $|E|^2$ intensitas optik, dan n_2 koefisien indeks bias nonlinear yang relasinya dengan $\chi^{(3)}$ adalah $n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)})$. Koefisien n_2 dalam aplikasi

berharga $\approx 1.2 \times 10^{-22} \text{ m}^2/\text{V}^2$ untuk SiO_2 , dan koefisien tersebut dinamakan pula Koefisien Kerr. Efek Kerr sebagai kontribusi koefisien Kerr, bersama-sama dengan stimulasi Brillouin dan hamburan Raman merupakan penentu nonlinearitas selubung (*envelope*) gelombang cahaya. Salah satu akibat dari kehadiran suku nonlinearitas adalah fenomena perubahan fasa gelombang terhadap waktu yang dikenal sebagai *self phase modulation* (SPM).

2.2. Persamaan Schroedinger Nonlinear (NLS)

Persamaan Schroedinger nonlinear dapat diturunkan dari persamaan Maxwell¹⁾. Dengan memperhitungkan *loss* (α), dispersi orde tinggi (β_3), serta suku nonlinear orde tinggi, maka didapat

$$\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{\alpha}{2} A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = iY \left[|A|^2 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right], \quad (2.4)$$

dengan A adalah selubung gelombang, $T = t - Z/V_g$ adalah *retarded time* yaitu waktu yang diukur pada kerangka acuan yang bergerak dengan kecepatan grup $V_g = 1/\beta_1$, Z jarak propagasi, α adalah *fiber loss*, γ adalah koefisien nonlinear yang didefinisikan

$$\text{dengan } \gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}}, T_R \text{ berhubungan dengan } \textit{raman gain}.$$

Persamaan (2.4) sering dinamakan persamaan NLS yang diperluas.

Dengan meninjau lebar pulsa (*width*) $T_0 \geq 1$ ps sehingga $\omega_0 T_0 \gg 1$ dan $T_R/T_0 \ll 1$, maka suku *raman gain* dan suku nonlinear orde tinggi dapat diabaikan, sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{i\alpha}{2} A - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{i}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (2.5)$$

Sifat propagasi gelombang berdasarkan pengaruh GVD dan SPM, dapat dikelompokkan menjadi 4 kategori berdasarkan harga relatif skala panjang L (panjang fiber), L_D (panjang dispersi), L_{NL} (panjang nonlinear). Skala L_D menunjukkan munculnya pengaruh dispersi secara berarti setelah gelombang melalui jarak sejauh L_D , begitu pula pengaruh nonlinear terhadap gelombang akan dominan setelah gelombang berjalan sejauh L_{NL} . Secara matematika L_D dan L_{NL} memiliki kebergantungan terhadap nilai awal pulsa, T_0 (lebar pulsa) dan P_0 (daya

$$\text{maksimum/peak power), } L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \text{ dan } L_{NL} = \frac{1}{P_0}.$$

Agar lebih terlihat pengaruh skala L_D dan L_{NL} dapat dilakukan transformasi terhadap T menjadi skala waktu ternormalisasi oleh lebar pulsa T_0 , $\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - Z/V_g}{T_0}$.

Definisikan $U(Z, \tau)$ sebagai amplitudo ternormalisasi dengan

$$A(Z,) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{Z}{2}\right) U(Z, \tau). \quad (2.6)$$

Suku eksponensial dalam persamaan (2.6) mengandung perhitungan *fiber loss* (α). Substitusi persamaan (2.6) ke persamaan (2.5) menghasilkan

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6} \frac{\beta_3}{T_0^3} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \frac{\exp(-\alpha Z)}{L_{NL}} |U|^2 U, \quad (2.7)$$

dimana $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ tergantung dari tanda parameter GVD (β_2).

Ketika panjang fiber $L \ll L_D$ dan $L \ll L_{NL}$, efek dispersif dan efek nonlinear tidak memberikan pengaruh yang berarti, sehingga ruas kanan persamaan (2.7) dapat diabaikan dan ini berarti gelombang memiliki solusi $U(Z, \tau) = U(0, \tau)$ artinya pulsa stabil. Dalam keadaan ini jika *fiber loss* diperhitungkan maka pulsa mengalami reduksi intensitas. Untuk itulah perlu adanya *amplifier* agar pulsa tetap menjalar dengan amplitudo yang sama dengan amplitudo awalnya.

Ketika pulsa menjalar dalam sistem *fiber* dimana $L \ll L_{NL}$ tetapi GVD dominan ($L \geq L_D$), secara matematika ruas kanan dalam persamaan (2.7) mengabaikan suku terakhir dan akibatnya evolusi pulsa didominasi oleh pengaruh GVD. Sistem seperti ini akan menyebabkan pulsa secara drastis mengalami atenuasi dan pelebaran pulsa (akibat GVD) dan ketaksimetrian profilnya (akibat β_3). Ini terjadi jika terpenuhi relasi

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{P_0 T_0^2}{|2|} \ll 1, \text{ (karena } L_{NL} \gg L_D). \quad (2.8)$$

Sebaliknya, ketika nonlinearitas (SPM) berperan dominan terhadap efek dispersif (GVD), yaitu ketika dipenuhi $L \ll L_D$ tetapi $L \geq L_{NL}$, ini berarti persamaan (2.7) mengabaikan dispersi. Sistem seperti ini akan mengakibatkan kompresi lebar pulsa dan peningkatan amplitudo pulsa. Dominasi SPM terhadap GVD terjadi di sepanjang fiber jika terpenuhi relasi

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{P_0 T_0^2}{|2|} \gg 1, \text{ (karena } L_D \gg L_{NL}). \quad (2.9)$$

Sifat terakhir propagasi pulsa dalam serat optik, berdasarkan harga relatif skala panjang L, L_D, L_{NL} , yaitu ketika $L \geq L_D$ dan $L \geq L_{NL}$. Dalam sistem seperti ini efek GVD dan SPM bekerja bersama-sama, secara kualitatif sifat penjalaran pulsa berbeda dibandingkan jika efek tersebut bekerja sendiri-sendiri. Dalam sistem seperti ini jika pulsa menjalar pada *anomalous dispersion* maka soliton dimungkinkan terbentuk, namun jika dispersinya adalah *normal dispersion* maka efek GVD dan SPM dapat digunakan untuk kompresi pulsa.

Secara analitik solusi NLS masih dimungkinkan dicari dengan meninjau beberapa kasus khusus dan selama sistem yang ditinjau adalah *integrable*. Metode analitik yang dapat digunakan salah satunya adalah *inverse scattering method*. Masih berkaitan dengan pencarian solusi analitik NLS, dalam sistem *dispersion-managed* NLS (salah satu teknik kompensasi efek dispersif)⁴⁻⁶ pekerjaan analitik memiliki keterbatasan, karena sistem persamaannya tidak *integrable*. Walaupun begitu, dengan menggunakan kondisi awal pulsa *gaussian* sebagai *ansatz* dan metode variasi, sistem NLS dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa yang mendeskripsikan evolusi amplitudo dan lebar pulsa. Selanjutnya untuk menggambarkan dengan detail bentuk evolusi, baik lebar pulsa maupun intensitas pulsa terhadap jarak propagasi dibutuhkan bantuan numerik (semi analitik).

3. Analisis Numerik

Formulasi matematika yang melibatkan laju perubahan suatu besaran fisika, yang bergantung kepada dua atau lebih variabel bebas, biasanya merepresentasikan waktu, panjang atau sudut berbentuk persamaan diferensial parsial. Secara umum persamaan diferensial parsial orde-2 dan berdimensi 2 dapat ditulis²⁾

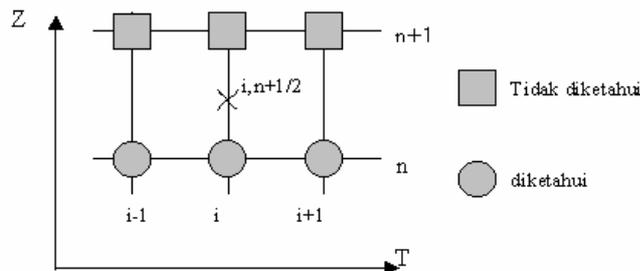
$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0, \quad (3.1)$$

dengan a, b, c, d, e, f dan g dapat berupa fungsi variabel bebas x dan y dan atau variabel terikat ϕ . Persamaan (3.1) dapat diklasifikasikan ke dalam tiga jenis, sesuai dengan harga $b^2 - 4ac$. Ketika $b^2 - 4ac < 0$, maka persamaan (3.1) dikatakan persamaan eliptik. Contoh persamaan eliptik adalah persamaan Laplace dan Poisson. Ketika $b^2 - 4ac = 0$, persamaan (3.1) disebut persamaan parabolik, contohnya persamaan konduksi kalor. Jika harga $b^2 - 4ac > 0$, persamaan (3.1) disebut persamaan hiperbolik, contohnya persamaan gelombang. Berkaitan dengan pendefinisian klasifikasi diatas, dikenal beberapa jenis metode numerik yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik persamaan diferensial parsial yaitu :

- a). persamaan eliptik : *direct method, Gauss-Seidel method, SOR method, ADI method,*
- b). persamaan parabolic : *forward time control space (FTCS) method, Crank-Nicolson method,*
- c). persamaan hiperbolik : *central time central space (CTCS) method, Method of characteristic (MOC).*

Berkaitan dengan pembahasan utama dalam paper ini, yaitu mencari solusi numerik dari NLS. Karena persamaan NLS merupakan persamaan parabolik untuk evolusi kuantitas kompleks A , pada persamaan (2.5), metode Crank-Nicolson (CN) dapat digunakan^{4,6)}. Metode ini menggunakan formulasi standar *Finite Difference Methods*, dengan akurasi yang lebih baik, karena berlaku untuk semua nilai $F = \frac{\Delta Z}{(\Delta T)^2}$, (sebagai

bandingan dalam metode Euler $0 < F < 1/2$), dimana ΔT adalah *time step*, dan ΔZ adalah *distance step*. Formulasi metode CN mengajukan penggunaan *mid point scheme*, Gambar 3, sehingga aproksimasi yang diperoleh untuk $A(Z, T)$,



Gambar 3. Pola *finite-difference* untuk metode CN.

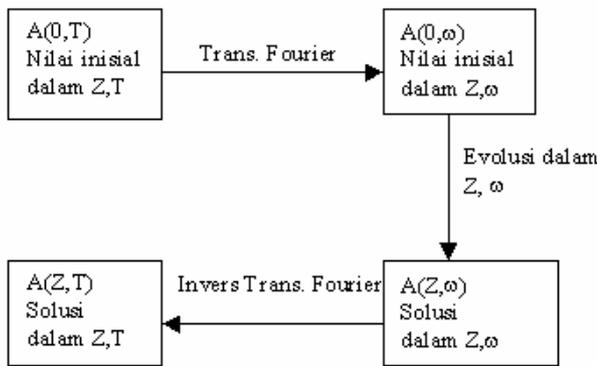
$$\left(\frac{\partial A}{\partial Z}\right) \approx \frac{1}{\Delta Z} \{A_{i,n+1} - A_{i,n}\}, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right) \approx \frac{1}{2(\Delta T)^2} \{A_{i+1,n+1} - 2A_{i,n+1} + A_{i-1,n+1} + A_{i+1,n} - 2A_{i,n} + A_{i-1,n}\} \quad (3.3)$$

Persamaan (2.5) dapat diaproksimasi dengan rumus iterasi (3.2) dan (3.3). Jika *loss* dan dispersi orde tiga tidak ditinjau, maka persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{i}{\Delta Z} \{A_{i,n+1} - A_{i,n}\} - \frac{\beta_2}{4(\Delta T)^2} \{A_{i+1,n+1} - 2A_{i,n+1} + A_{i-1,n+1} + A_{i+1,n} - 2A_{i,n} + A_{i-1,n}\} + \gamma \left| \frac{A_{i,n+1} + A_{i,n}}{2} \right|^2 \left(\frac{A_{i,n+1} + A_{i,n}}{2} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Pekerjaan selanjutnya adalah mengubah formula (3.4) kedalam listing program. Algoritma *Fast Fourier Transform* (FFT) digunakan untuk menyederhanakan perhitungan dalam teknik pemrograman. Secara umum peranan FFT dapat dijelaskan dalam Gambar 4.

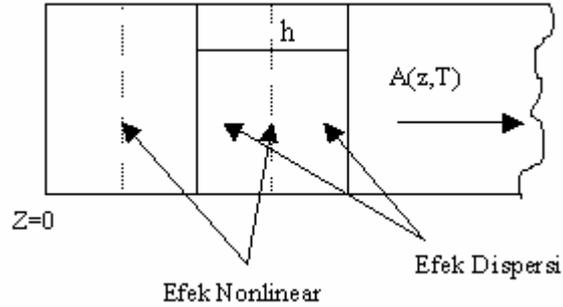


Gambar 4. Peranan FFT dalam algoritma yang digunakan untuk menghitung persamaan (3.4).

Selain metode CN di atas, diperkenalkan metode *split step fourier*¹⁾ sebagai alternatif untuk mendapatkan solusi numerik persamaan diferensial nonlinier (NLS) dalam optik nonlinear. Metode yang terakhir disebutkan ini, menjadi fokus perhatian selanjutnya. Keunggulan algoritma ini, selain sederhana dalam pembuatan program dan proses perhitungan (efisien), juga karena suku dispersi dan nonlinear orde tinggi dalam persamaan NLS dapat dengan mudah dimasukkan dalam perhitungan dengan mengubah-ubah operator \hat{D} dan \hat{N} . Keunggulan lainnya, dengan akurasi yang sama dengan metode *finite difference*, secara umum metode *split step Fourier* lebih cepat¹⁾.

Dasar pemikiran metode ini adalah analisis masalah-masalah struktural, dalam hal ini perilaku gelombang dalam serat optik yang mengalami efek dispersif dan nonlinearitas disegmentasi. Segmentasi

pengaruh kedua unsur tersebut dapat dilihat dalam Gambar 5.



Gambar 5. Ilustrasi metode split-step fourier yang digunakan untuk simulasi numerik. Pengaruh dispersi dan nonlinear secara simetri bergantian di dalam fiber.

Tinjau kembali persamaan (2.5), dan tuliskan dalam bentuk

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} A + i\gamma |A|^2 A, \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \left[-\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} + i\gamma |A|^2 \right] A, \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = [\hat{D} + \hat{N}] A, \quad (3.5c)$$

dengan $\hat{D} = -i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2}$ dan $\hat{N} = i\gamma |A|^2$.

Operator \hat{D} memuat perhitungan dispersi dan *loss*, sedangkan operator \hat{N} menentukan efek nonlinearitas fiber. Dalam metode ini solusi NLS diaproksimasi oleh

$$A(Z+h,T) \approx e^{h\hat{D}} e^{h\hat{N}} A(Z,T). \quad (3.6)$$

Dengan memanfaatkan formula Baker-Hausdorff dan mengabaikan suku nonkomut, persamaan (3.6) dapat ditulis menjadi

$$A(Z+h,T) = e^{h(\hat{D} + \hat{N})} A(Z,T). \quad (3.7)$$

Operasi dari operator $e^{h\hat{D}}$ dapat dikeluarkan dari persamaan (3.7) dengan relasi

$$e^{h\hat{D}} B(Z,T) = \left\{ F^{-1} e^{h\hat{D}(i\omega)} F \right\} B(Z,T), \quad (3.8)$$

disini $B(Z,T) = \exp(h\hat{N})A(Z,T)$, F dan F^{-1} adalah operator transformasi Fourier dan inversnya. $\hat{D}(i\omega)$ dihitung dari operator \hat{D} dengan mengganti operator diferensial $\frac{\partial}{\partial T}$ dengan $i\omega$, dan ω adalah frekuensi dalam domain Fourier.

Dalam makalah ini dibahas solusi numerik persamaan (2.5) dengan menimbang aproksimasi pada

persamaan (3.7). Solusi numeriknya diperoleh dengan algoritma sebagai berikut⁷⁾ :

- i Menentukan parameter serat optik yang digunakan : GVD (β_2), parameter nonlinier (γ). Gunakan setengah lebar pulsa sebesar T_0 . Berikan input gelombang awal (*initial condition*) $A(0,T)$.
- ii Tentukan besarnya perubahan z ($h=\Delta z$), total banyaknya iterasi z (M), banyaknya *grid* (N). Nilai N ini menentukan banyaknya titik pada sumbu waktu yang akan di cuplik. Interval waktu pencuplikan (dt) dihitung dengan $dt=T_0/N$. Jadi perubahan waktu pada sumbu T berkisar dari $T = -\frac{T_0}{2}, -\frac{T_0}{2} + dt, \dots, \frac{T_0}{2}$.

iii Hitung sebanyak iterasi M terhadap $A(z+h,T) = [F^{-1}e^{h\hat{D}(i\omega)}F]e^{h\hat{N}}A(z,T)$,
dimana

$$\hat{D}(i\omega) = -i\frac{\beta_2}{2}(i\omega)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(i\omega)^3 - \frac{\alpha}{2} \tag{3.9}$$

dan

$$\hat{N} = i\gamma|A|^2, \tag{3.10}$$

plot solusi numerik A terhadap koordinat Z dan T .

4. Propagasi Pulsa Hasil Analisis Numerik

Bagian ini membahas hasil-hasil analisis numerik persamaan (2.5) dengan metode *split step Fourier*. Dipilih $\beta_2 < 0$, karena pada nilai ini soliton (bright soliton) terjadi. Simulasi yang dibuat⁷⁾ menggunakan parameter yang telah dicapai Mollenauer dalam eksperimennya (1980)¹⁾. Mollenauer mendapatkan profil soliton dengan memilih nilai $\beta_2 = -20.4 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\gamma = 1.3 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$, $T_0 = 4 \text{ ps}$, dan P_0 kira-kira 1 W .

Terlebih dahulu, tinjau asumsi propagasi pulsa dalam sistem ketika $L \ll L_D$ dan $L \ll L_{NL}$. Pilih parameter *fiber* yang standar dengan $\beta_2 = -20.4 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\gamma = 1.3 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$. Jika kita inginkan efek dispersif dan nonlinearitas dalam *fiber* yang kita rancang, berpengaruh setelah pulsa menajlar sejauh 100 km , maka kita pilih T_0 dan P_0 adalah

$$L_D = \frac{T_0^2}{|k_2|} \geq 100$$

$$\frac{T_0^2}{|-20.4|} \geq 100 \tag{4.1}$$

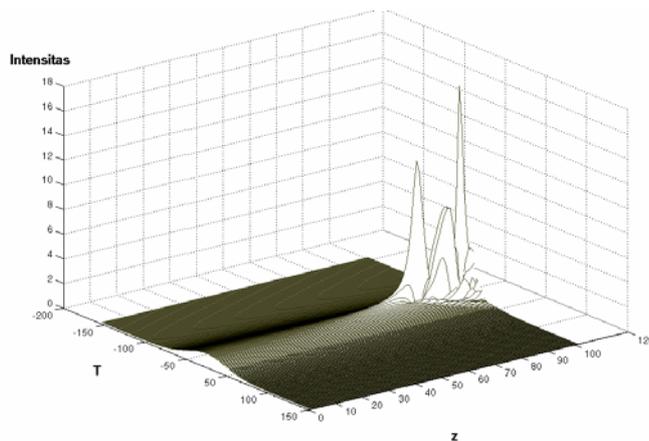
$$T_0 \geq 45.166 \text{ ps},$$

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \geq 100$$

$$\frac{1}{1.3P_0} \geq 100 \tag{4.2}$$

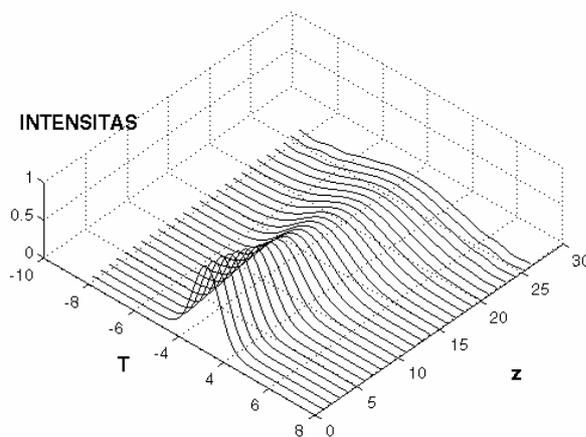
$$7.69 \text{ mW} \geq P_0.$$

Gambar 6 menunjukkan bahwa efek dispersif dan nonlinear dominan mempengaruhi pulsa setelah 100 km menajlar dengan pemilihan $T_0 = 46 \text{ ps}$, dan $P_0 = 1 \text{ mW}$.



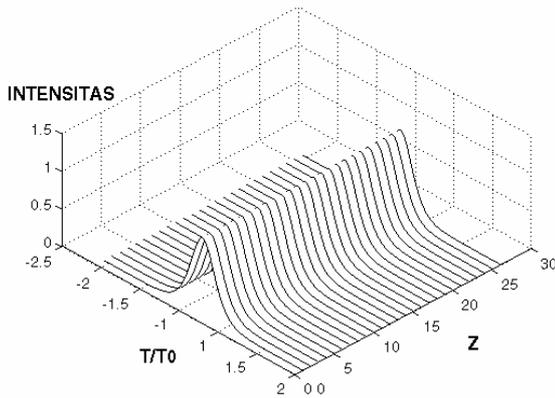
Gambar 6. Hasil simulasi langsung dari persamaan (2.5) dengan ansatz Gaussian dan *loss* serta β_3 untuk sementara diabaikan.

Deskripsi profil pulsa selama propagasi dengan efek GVD dominan akan menyebabkan pulsa mengalami pelebaran. Ini terjadi jika terpenuhi persyaratan persamaan (2.8). Hasil simulasi⁷⁾ pulsa berbentuk *secant* hiperbolik lebih tahan terhadap pengaruh dispersif dari pada Gaussian.



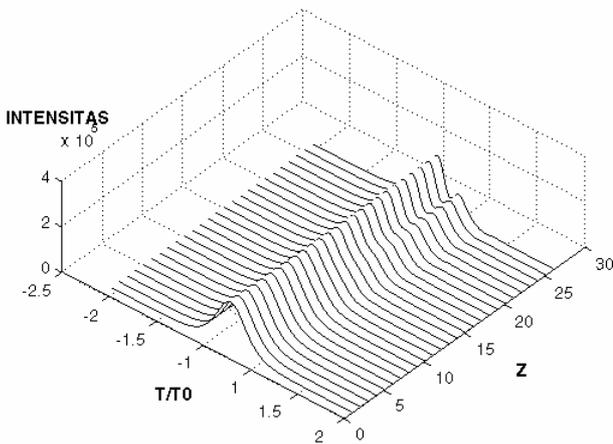
Gambar 7. Hasil simulasi langsung dari persamaan (2.5) dengan ansatz Gaussian dengan *loss* serta β_3 untuk sementara diabaikan. Dipilih $T_0 = 4 \text{ ps}$, $P_0 = 1 \text{ mW}$, $\beta_2 = -20.4 \text{ ps}^2/\text{km}$ dan $\gamma = 0.0001 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$.

Dalam tinjauan dimana efek dispersif dikompensasi dengan efek nonlinear, simulasi yang telah dikembangkan⁷⁾ menunjukkan solusi pulsa stabil (soliton) terbentuk. Nilai-nilai parameter yang dipilih disesuaikan dengan apa yang pernah dicapai Mollenauer.



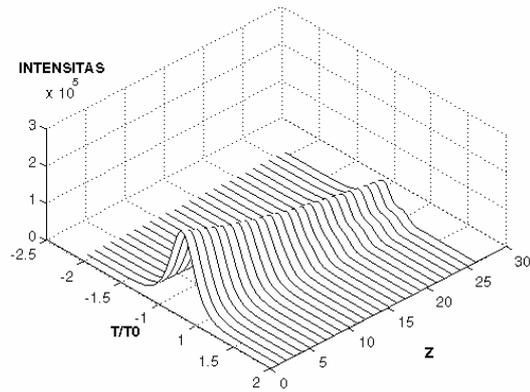
Gambar 8. Profil soliton orde pertama dengan ansatz *sech*, hasil simulasi numerik persamaan (2.5) dengan suku *loss* serta β_3 untuk sementara diabaikan. Dipilih $T_0 = 4$ ps , $P_0 = 1$ W, $\beta_2 = -20.4$ ps²/km dan $\gamma = 1.3$ W⁻¹km⁻¹

Pengaruh dispersi orde tinggi (β_3) dalam sistem soliton akan menyebabkan profil pulsa tidak simetri (lihat Gambar 9). Tanda positif atau negatif β_3 hanya merubah letak osilasi (ketaksimetriannya) pada arah berlawanan. Simulasi yang dirancang menggunakan asumsi, bahwa munculnya dispersi orde tinggi ketika digunakan panjang gelombang disekitar λ_D , dimana pada daerah panjang gelombang ini β_2 kecil atau hampir nol. Tanda positif atau negatif β_2 dalam kondisi seperti ini tidak terlalu berpengaruh.



Gambar 9. Profil pulsa dengan ansatz *sech*, hasil simulasi numerik persamaan (2.5) dengan suku *loss* untuk sementara diabaikan. Dipilih $T_0 = 4$ ps , $P_0 = 1$ W, $\beta_2 = 0.0001$ ps²/km, $\beta_3 = -10$ ps³/km dan $\gamma = 1.3$ W⁻¹km⁻¹

Pengaruh *fiber loss* terhadap profil pulsa yaitu akan mengurangi intensitas pulsa. Apabila ini dikaji bersamaan dengan pengaruh dispersi orde tinggi maka didapatkan profil pulsa tidak simetri dengan terjadi penurunan intensitasnya (lihat Gambar 10).



Gambar 10. Profil pulsa dengan ansatz *sech*, hasil simulasi numerik persamaan (2.5).Dipilih $T_0 = 4$ ps , $P_0 = 1$ W, $\beta_2 = 0.0001$ ps²/km, $\beta_3 = -10$ ps³/km, $\gamma = 1.3$ W⁻¹km⁻¹, dan $\alpha = 0.0414$ km⁻¹.

5. Kesimpulan

Telah ditunjukkan peranan metode numerik dalam mencari solusi persamaan Schrodinger nonlinear. Simulasi yang telah dikembangkan berdasarkan metode *split step Fourier* membuktikan berbagai pengaruh parameter seperti : GVD (β_2), nonlinearitas (γ), dispersi orde 3 (β_3), dan *fiber loss* (α). Dhasilkan pula solusi stabil soliton dengan pemilihan parameter seperti yang dikerjakan Mollenauer *et.al*. Parameter dispersi orde tinggi muncul ketika panjang gelombang yang digunakan mendekati λ_D . Ini hanya mempengaruhi kesimetrian profil pulsa. Diperlihatkan pula bahwa dalam tinjauan yang lengkap (dimasukan suku β_3 dan α), profil pulsa mengalami pengurangan intensitas dan terjadi osilasi pada ekor pulsa sesuai tanda β_3 .

Daftar Pustaka

1. Agrawal, G. P., *Nonlinear Fiber Optics*, 2th edition, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1995.
2. Smith, G. D. (1985), *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 3th edition, Oxford University Press, New York, 1985.
3. Hasegawa, A. and Tappert, F.D., *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171-172, (1973)
4. Zen, F. P., Akhmediev, N., Dobson, B., Chu, P., *Pulse-pulse Interaction in Dispersion-Managed System with Nonlinear Amplifier*, Proc. ACOFT, Canberra, Australia, June 2000.
5. Zen, F.P., Rokhmat, M., Hidayat, W., Shiddiq, R., *Gaussian Breathers Pulse Dynamics in Coupled Dispersion Managed Systems*, 6th ASTW Conf., Brunei Darussalam, September 2001.
6. Akhmediev, N. , Zen, F. P., Chu, P., *Optics Comm.* **201**, 217-221, (2002).
7. Hidayat, W., *Aplikasi Metode Numerik untuk Investigasi Karakteristik Solusi Persamaan NLS dalam Sistem Komunikasi Soliton dan Dispersi Periodik*, Tugas Akhir S1, Departemen Fisika, ITB, Juni 2002.