

PENENTUAN PREMI TAHUNAN BERSIH ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP *JOINT LIFE* DENGAN MODEL *COPULA* CLAYTON DAN *COPULA* GUMBEL

L. Q. Fikriyah¹, *I. G. P. Purnaba², W. Erliana³, B. Setiawaty⁴ dan D. C. Lesmana⁵

¹⁾Mahasiswa S1 Program Studi Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
laila_qudrah@apps.ipb.ac.id.

^{2,3,4,5)}Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
purnaba@apps.ipb.ac.id **corresponding author*
windi@apps.ipb.ac.id, berlianse@apps.ipb.ac.id, donnylesmana@apps.ipb.ac.id

Abstrak

Asuransi jiwa seumur hidup adalah bentuk pengalihan risiko atas kerugian keuangan oleh tertanggung kepada penanggung yang disebabkan oleh hilangnya jiwa seseorang setelah polis disepakati. Pada status *joint life* pasangan suami istri, pembayaran premi akan berhenti jika salah satu peserta asuransi yang tertanggung dalam polis tersebut meninggal selama periode polis. Premi dibayarkan setiap tahun dan pembayaran manfaat dilakukan pada akhir tahun kematian pertama. Biasanya risiko kematian pasangan suami istri diasumsikan saling bebas, namun dalam kenyataannya kerap kali pasangan suami istri memiliki risiko bersama. Pada karya ilmiah ini, dilakukan penghitungan premi bersih tahunan dari asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri menggunakan dua asumsi: (1) kebebasan mortalitas dan (2) ketidakbebasan mortalitas dengan model *copula* Clayton dan *copula* Gumbel. Berdasarkan hasil perhitungan untuk contoh kasus yang spesifik, premi tahunan yang dihitung menggunakan asumsi kebebasan mortalitas lebih besar jika dibandingkan dengan menggunakan asumsi ketidakbebasan mortalitas. Hasil ini berlaku juga untuk suku bunga yang bervariasi.

Kata kunci: asuransi jiwa, *copula* Clayton, *copula* Gumbel, *joint life*

1. Pendahuluan

Asuransi merupakan suatu kesepakatan antara pihak penyedia jasa asuransi sebagai penanggung dan pemegang polis sebagai tertanggung. Menurut Nina [8], asuransi jiwa adalah asuransi yang membantu tertanggung dengan cara mengalihkan kerugian finansial dikarenakan terjadinya kematian. Apabila terjadi risiko kematian dalam jangka waktu yang telah disepakati dalam kontrak asuransi, maka ahli warisnya akan mendapatkan dana pertanggungan atau santunan sebagai manfaat dari produk asuransi. Untuk itu, peserta asuransi wajib membayar sejumlah uang kepada perusahaan asuransi setiap jangka waktu tertentu sebagai konsekuensi atas pengalihan risiko, yang biasa disebut premi.

Asuransi jiwa seumur hidup merupakan salah satu produk asuransi jiwa, di mana produk ini akan memberikan santunan kepada ahli waris apabila pemegang polis meninggal setelah polis disepakati kapanpun kematian tersebut terjadi. Berdasarkan banyaknya tertanggung, asuransi jiwa dibedakan menjadi dua, yaitu asuransi jiwa perorangan (*single life*) dan asuransi jiwa bersama (*multiple life*). Asuransi jiwa bersama terdiri atas lebih dari satu orang tertanggung. Asuransi jiwa bersama dikelompokkan menjadi dua status, yaitu status *joint life* dan status *last survivor*. Pada asuransi jiwa seumur hidup dengan status *joint life*, premi yang dibayarkan oleh peserta asuransi akan berhenti jika salah satu peserta asuransi yang tertanggung dalam polis tersebut meninggal selama periode polis dan kemudian ahli warisnya akan mendapatkan dana pertanggungan dari perusahaan asuransi. [2] telah membahas perhitungan premi tahunan untuk asuransi jiwa *endowment joint life* dengan suku bunga stokastik.

Pada penelitian ini dibahas asuransi seumur hidup *joint life* untuk pasangan suami istri. Risiko kematian pasangan suami istri sering diasumsikan saling bebas. Namun dalam dunia nyata, kerap kali pasangan suami istri memiliki risiko bersama, di antaranya adalah bencana umum, gaya hidup bersama, penyakit menular atau *stress cardiomyopathy* (Asih dan Widana [3]). Salah satu pendekatan untuk memodelkan struktur ketakbebasan sebaran waktu hidup pasangan suami istri tersebut adalah dengan menggunakan *copula*. *Copula* dapat dilihat melalui dua sudut pandang. Sudut pandang pertama *copula* sebagai fungsi yang menggabungkan atau memasangkan fungsi distribusi marjinal ke fungsi distribusi multivariatnya, sedangkan sudut pandang kedua *copula* merupakan fungsi distribusi multivariat yang marjinalnya ada pada interval (0,1) (Nelsen [8]).

Pada karya ilmiah ini, dilakukan pemodelan premi tahunan bersih pada asuransi jiwa *multiple life* untuk status *joint life* pasangan suami istri dengan kontrak seumur hidup dan manfaat sebesar 1 satuan dengan menggunakan keluarga *Archimedean copula*, yaitu *copula* Clayton yang menggambarkan *lower tail dependence* dan *copula* Gumbel yang menggambarkan *upper tail dependence*. Premi yang dihitung pada karya ilmiah ini merupakan premi bersih tahunan dan pembayaran manfaat dilakukan pada akhir tahun kematian pertama.

2. Metode Penelitian

2.1 Data dan Asumsi

Simulasi yang digunakan adalah suatu polis asuransi jiwa seumur hidup *joint life* dengan peserta pasangan suami istri dengan selisih usia satu tahun di mana usia suami lebih tua 1 tahun dibanding usia istri. Kontrak asuransi dimulai saat suami dan istri menjadi peserta asuransi di usia (28, 27) tahun hingga di usia (55, 54).

Asuransi jiwa seumur hidup *joint life* berlaku selama semua anggota kelompok/peserta polis bertahan dan gagal setelah terjadi kematian pertama. Asumsi bunga yang digunakan adalah konstan sebesar 5%, 6%, 7%, 8%, 9%, dan 10%. Peluang kegagalan yang digunakan adalah Tabel Mortalitas Indonesia IV [1].

2.2 Asuransi *Joint Life* dan *Copula*

Terdapat dua orang peserta asuransi jiwa seumur hidup *joint life* berusia x dan y . Peluang yang menyatakan kedua individu (x) dan (y) tersebut akan bertahan hidup

hingga t tahun ke depan selama periode polis asuransi jiwa seumur hidup *joint life* disebut dengan peluang bertahan hidup *joint life* dan dinotasikan dengan ${}_t p_{xy}$ menurut Bowers *et al.* [4] dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{\overline{xy}}, \quad (1)$$

dengan ${}_t p_x$ dan ${}_t p_y$ berturut-turut menyatakan peluang (x) dan (y) bertahan hidup sampai t tahun ke depan, serta ${}_t p_{\overline{xy}}$ menyatakan peluang pasangan individu (x, y) bertahan hidup t tahun ke depan pada model *last survivor*.

Peluang yang menyatakan kematian pertama antara individu x dan y dalam kurun waktu t tahun ke depan selama periode polis asuransi jiwa seumur hidup *joint life* disebut dengan peluang kematian *joint life* dan dinotasikan dengan ${}_t q_{xy}$ menurut Bowers *et al.* [4] dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} {}_t q_{xy} &= 1 - {}_t p_{xy} \\ &= 1 - ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{\overline{xy}}) \\ &= 1 - \left((1 - {}_t q_x) + (1 - {}_t q_y) - (1 - {}_t q_{\overline{xy}}) \right) \\ &= 1 - (1 - {}_t q_x - {}_t q_y + {}_t q_{\overline{xy}}) \\ &= {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{xy}}, \end{aligned} \quad (2)$$

dengan ${}_t q_x$ dan ${}_t q_y$ berturut-turut menyatakan peluang (x) dan (y) meninggal sampai t tahun, serta ${}_t q_{\overline{xy}}$ menyatakan peluang pasangan individu (x, y) meninggal t tahun ke depan pada model *last survivor*.

Misalkan T_{xy} adalah peubah acak sisa waktu hidup pasangan individu (x, y) pada kasus *joint life*. Peluang bahwa peserta asuransi (x, y) akan bertahan hidup n tahun ke depan dan kemudian meninggal sebelum mencapai $n + 1$ tahun yang dinotasikan dengan ${}_n | q_{xy}$ menurut Bowers *et al.* [4] dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} {}_n | q_{xy} &= Pr(n < T_{xy} \leq n + 1), n \geq 0 \\ &= {}_n p_{xy} - {}_{n+1} p_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Anuitas *joint life* adalah suatu rangkaian pembayaran oleh dua tertanggung atau lebih, di mana pembayaran terhenti apabila salah satu tertanggung meninggal dunia (Kamal *et al.* [7]). Nilai sekarang aktuarial dari pembayaran sebesar 1 satuan pada anuitas hidup diskret untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayar di awal tahun selama (x, y) keduanya masih hidup dinotasikan dengan \ddot{a}_{xy} menurut Bowers *et al.* [4] dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{xy}, \quad (4)$$

di mana v menyatakan tingkat diskon.

Nilai sekarang aktuarial dari manfaat sebesar 1 satuan pada asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang diberikan di akhir tahun kematian pertama dari peserta asuransi (x, y) dinotasikan dengan A_{xy} menurut Cunningham *et al.* [5] dinyatakan dengan

$$A_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k ({}_{k-1} p_{xy} - {}_k p_{xy}). \quad (5)$$

Dengan menggunakan prinsip kesetaraan, besar premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayar tiap awal tahun bagi peserta asuransi (x, y) dengan uang pertanggungan sebesar 1 satuan yang dibayarkan di akhir tahun kematian pertama dari peserta asuransi (x, y) adalah

$$P_{xy} = \frac{A_{xy}}{\ddot{a}_{xy}}. \quad (6)$$

Copula menurut Nelsen [8] adalah fungsi yang menghubungkan sebaran kumulatif marginal peubah tunggal menjadi sebaran kumulatif peubah ganda. Jika terdapat fungsi $\phi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ yang bersifat kontinu, monoton turun, dan merupakan fungsi konveks sedemikian hingga $\phi(1) = 0$ dan $\phi(0) = \infty$, maka terdapat invers dari ϕ yaitu ϕ^{-1} dengan $\phi^{-1}: [0, \infty] \rightarrow [0,1]$.

Teorema Sklar adalah pusat dari teori *copula* dan menjadi dasar dari banyak teori statistika. Teorema Sklar mengembangkan *copula* dalam perannya membentuk sebaran peubah ganda dan sebaran marginalnya.

Teorema Sklar (Nelsen [8])

Misalkan H adalah suatu fungsi sebaran bersama dengan sebaran marginal F_1 dan F_2 , maka terdapat sebuah *copula* C sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$H_{X,Y}(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) = C_{U,V}(u, v). \quad (7)$$

dengan $u = F_1(x)$ dan $v = F_2(x)$.

Jika F_1 dan F_2 kontinu, maka C adalah unik atau tunggal. Jika tidak, maka C ditentukan secara unik oleh *range* $F_1 \times \text{range } F_2$. Sebaliknya, jika C adalah suatu *copula*, F_1 dan F_2 masing-masing adalah sebaran marginal, maka fungsi H adalah sebuah fungsi sebaran dengan fungsi sebaran marginalnya adalah F_1 dan F_2 . Dalam skala kuantil, *copula* dapat dituliskan dengan

$$H(F_1^{-1}(x), F_2^{-1}(y)) = C(x, y), \quad (8)$$

dengan $F_1^{-1}(x)$ dan $F_2^{-1}(y)$ merupakan invers dari F_1 dan F_2 (Nelsen [8]).

Archimedean copula merupakan salah satu kelas *copula* yang mudah dikonstruksikan, banyak variasi keluarga *copula* yang masuk ke dalam kelas ini, struktur *dependencenya* bervariasi, serta sering digunakan di berbagai bidang aplikasi, di antaranya pada bidang keuangan dan bidang asuransi (Nelsen [8]). Keluarga *Archimedean copula* yang digunakan pada karya ilmiah ini adalah *copula* Clayton dan *copula* Gumbel. Fungsi pembangkit, parameter, dan fungsi *copula* bivariat dari keluarga *copula* Clayton dan *copula* Gumbel menurut Nelsen [8] disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Fungsi pembangkit, parameter, dan fungsi *copula* bivariat.

Keluarga <i>Copula</i>	Fungsi Pembangkit ($\phi(u)$)	Parameter (θ)	Fungsi <i>Copula</i> Bivariat ($C(u, v; \theta)$)
Clayton	$\phi(u) = \frac{u^{-\theta} - 1}{\theta}$	$\theta > 0$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$
Gumbel	$\phi(u) = (-\ln u)^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$	$\exp\left[-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right]$

Pendugaan parameter (θ) *Archimedean copula* menurut Nelsen [8] dapat dilakukan menggunakan korelasi *Kendall's tau*, θ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi_\theta(t)}{\phi_\theta'(t)} dt. \quad (9)$$

Salah satu cara yang digunakan untuk membandingkan kesesuaian antar model *copula* yang diterapkan pada suatu data bisa menggunakan AIC, di mana semakin kecil nilai AIC, semakin baik model *copula*-nya (Fang *et al.* [6]). AIC didefinisikan sebagai berikut.

$$AIC = 2K - \log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) \quad (10)$$

dengan K menyatakan banyaknya parameter model dan $\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)$ menyatakan fungsi *likelihood*.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Penentuan Premi Tahunan Asuransi Jiwa Seumur Hidup *Joint Life* dengan Asumsi Kebebasan Mortalitas

Peluang hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) hingga t tahun ke depan dapat dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = 1 - {}_t q_x - {}_t q_y + {}_t q_{\overline{xy}} \quad (11)$$

dengan asumsi kebebasan mortalitas, ${}_t p_{xy}$ dapat dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = 1 - {}_t q_x - {}_t q_y + {}_t q_x {}_t q_y. \quad (12)$$

Peluang kematian *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) dalam kurun waktu t tahun ke depan dapat dinyatakan dengan

$${}_t q_{xy} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{xy}} \quad (13)$$

dengan asumsi kebebasan mortalitas, ${}_t q_{xy}$ dapat dinyatakan dengan

$${}_t q_{xy} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y. \quad (14)$$

Nilai sekarang aktuarial dari manfaat 1 satuan untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) dengan asumsi kebebasan mortalitas dapat dinyatakan dengan

$$A_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k (({}_{k-1} p_x {}_{k-1} p_y) - ({}_k p_x {}_k p_y)). \quad (15)$$

Nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* dengan pembayaran tahunan sebesar 1 satuan bagi sepasang suami istri (x, y) dengan asumsi kebebasan mortalitas dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k ({}_k p_x {}_k p_y). \quad (16)$$

Premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun untuk pasangan suami istri (x, y) dengan manfaat 1 satuan dan menggunakan prinsip kesetaraan berdasarkan asumsi kebebasan mortalitas dapat dinyatakan dengan

$$P_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} v^k (({}_{k-1} p_x {}_{k-1} p_y) - ({}_k p_x {}_k p_y))}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k ({}_k p_x {}_k p_y)}. \quad (17)$$

3.2 Penentuan Premi Tahunan Asuransi Jiwa Seumur Hidup *Joint Life* dengan Model *Copula Clayton*

Peluang kematian sepasang suami istri (x, y) dalam kurun waktu t tahun ke depan $({}_tq_{\overline{xy}})$ untuk asumsi ketidakbebasan mortalitas bisa dihitung menggunakan model *copula Clayton* dengan memisalkan $u = {}_tq_x$ dan $v = {}_tq_y$, sehingga diperoleh

$${}_tq_{\overline{xy}} = ({}_tq_x^{-\theta} + {}_tq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (18)$$

Dengan demikian peluang hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) hingga t tahun ke depan berdasarkan *copula Clayton* menjadi

$${}_tp_{xy} = 1 - {}_tq_x - {}_tq_y + ({}_tq_x^{-\theta} + {}_tq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (19)$$

Peluang kematian *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) dalam kurun waktu t tahun ke depan berdasarkan *Copula Clayton* dapat dituliskan sebagai

$${}_tq_{xy} = {}_tq_x + {}_tq_y - ({}_tq_x^{-\theta} + {}_tq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (20)$$

Nilai sekarang aktuarial dari manfaat 1 satuan untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) berdasarkan *copula Clayton* dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} A_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[\left(1 - {}_{k-1}q_x - {}_{k-1}q_y + ({}_{k-1}q_x^{-\theta} + {}_{k-1}q_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - {}_kq_x - {}_kq_y + ({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[{}_kq_x + {}_kq_y + ({}_{k-1}q_x^{-\theta} + {}_{k-1}q_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right. \\ &\quad \left. - {}_{k-1}q_x - {}_{k-1}q_y - ({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* dengan pembayaran tahunan sebesar 1 satuan bagi sepasang suami istri (x, y) berdasarkan *copula Clayton* dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left[1 - {}_kq_x - {}_kq_y + ({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (22)$$

Premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun bagi sepasang suami istri (x, y) dengan manfaat 1 satuan dan menggunakan prinsip kesetaraan berdasarkan *copula Clayton* dapat dinyatakan dengan

$$P_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[{}_kq_x + {}_kq_y - ({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right. \left. - {}_{k-1}q_x - {}_{k-1}q_y + ({}_{k-1}q_x^{-\theta} + {}_{k-1}q_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \left[1 - {}_kq_x - {}_kq_y + ({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \right]}. \quad (23)$$

3.3 Penentuan Premi Tahunan Asuransi Jiwa Seumur Hidup *Joint Life* dengan Model *Copula* Gumbel

Peluang kematian sepasang suami istri (x, y) dalam kurun waktu t tahun ke depan (${}_tq_{\overline{xy}}$) untuk asumsi ketidakbebasan mortalitas bisa dihitung menggunakan model *copula* Gumbel dengan memisalkan $u = {}_tq_x$ dan $v = {}_tq_y$, sehingga diperoleh

$${}_tq_{\overline{xy}} = \exp \left[- \left[(-\ln {}_tq_x)^\theta + (-\ln {}_tq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (24)$$

Dengan demikian, peluang hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) hingga t tahun ke depan berdasarkan *copula* Gumbel menjadi

$${}_tp_{xy} = 1 - {}_tq_x - {}_tq_y + \exp \left[- \left[(-\ln {}_tq_x)^\theta + (-\ln {}_tq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (25)$$

Peluang kematian *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) dalam kurun waktu t tahun ke depan berdasarkan *Copula* Gumbel dapat dituliskan sebagai

$${}_tq_{xy} = {}_tq_x + {}_tq_y - \exp \left[- \left[(-\ln {}_tq_x)^\theta + (-\ln {}_tq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (26)$$

Nilai sekarang aktuarial dari manfaat 1 satuan untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi sepasang suami istri (x, y) berdasarkan *copula* Gumbel dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} A_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[\begin{aligned} & \left(1 - {}_{k-1}q_x - {}_{k-1}q_y \right. \\ & \left. + \exp \left[- \left[(-\ln {}_{k-1}q_x)^\theta + (-\ln {}_{k-1}q_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \right) \\ & - \left(1 - {}_kq_x - {}_kq_y + \exp \left[- \left[(-\ln {}_kq_x)^\theta + (-\ln {}_kq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \right) \end{aligned} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[\begin{aligned} & {}_kq_x + {}_kq_y + \left({}_{k-1}q_x^{-\theta} + {}_{k-1}q_y^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ & - \left({}_{k-1}q_x - {}_{k-1}q_y - \left({}_kq_x^{-\theta} + {}_kq_y^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right) \end{aligned} \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup untuk asuransi jiwa seumur hidup *joint life* dengan pembayaran tahunan sebesar 1 satuan bagi sepasang suami istri (x, y) berdasarkan *copula* Gumbel dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left[1 - {}_kq_x - {}_kq_y + \exp \left[- \left[(-\ln {}_kq_x)^\theta + (-\ln {}_kq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \right]. \quad (28)$$

Premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun bagi sepasang suami istri (x, y) dengan manfaat 1 satuan dan menggunakan prinsip kesetaraan berdasarkan *copula* Gumbel dapat dinyatakan dengan

$$P_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} v^k \left[\begin{array}{c} {}_kq_x - {}_{k-1}q_x + {}_kq_y - {}_{k-1}q_y \\ + \exp \left[- \left[(-\ln {}_{k-1}q_x)^\theta + (-\ln {}_{k-1}q_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \\ - \exp \left[- \left[(-\ln {}_kq_x)^\theta + (-\ln {}_kq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \end{array} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \left[1 - {}_kq_x - {}_kq_y + \exp \left[- \left[(-\ln {}_kq_x)^\theta + (-\ln {}_kq_y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right] \right]} \quad (29)$$

3.4 Pendugaan Parameter (θ) Copula Clayton dan Copula Gumbel

Pendugaan parameter (θ) copula Clayton dapat dilakukan dengan menentukan korelasi Kendall's tau (τ) dan dengan menggunakan fungsi pembangkit copula serta turunan pertamanya, sehingga θ dapat diperoleh melalui persamaan

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}. \quad (30)$$

Untuk $\tau = 0.933$, maka diperoleh nilai $\theta = 28$.

Pendugaan parameter (θ) copula Gumbel dapat dilakukan dengan menentukan korelasi Kendall's tau (τ) dan dengan menggunakan fungsi pembangkit copula serta turunan pertamanya, sehingga θ dapat diperoleh melalui persamaan

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta}. \quad (30)$$

Untuk $\tau = 0.94$, maka diperoleh nilai $\theta = 17$.

3.5 Pendugaan Model Copula Terbaik

Pendugaan model copula terbaik dilakukan dengan membandingkan nilai AIC dari kedua copula dengan data pada Tabel Mortalitas Indonesia IV serta parameter (θ) dari masing-masing model copula yang disajikan pada Tabel 2. Nilai AIC yang lebih kecil menunjukkan model yang lebih baik. Meskipun demikian dalam tulisan ini dibahas keduanya, karena bentuk sebaran kedua copula tersebut memiliki karakteristik yang berbeda.

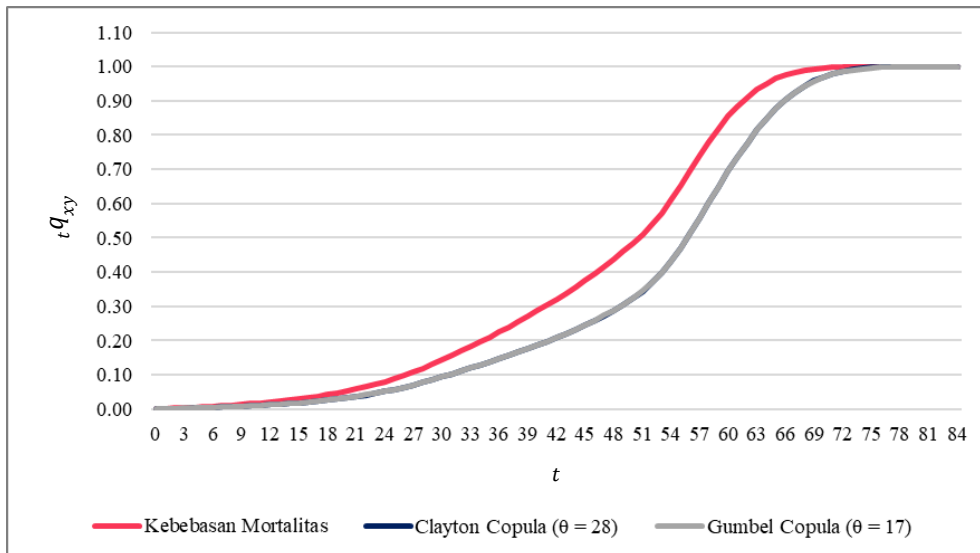
Tabel 2. Nilai AIC model copula.

Model	AIC
Copula Clayton	2002.625
Copula Gumbel	1294.040

3.6 Simulasi Perhitungan

Peluang kematian joint life bagi sepasang suami istri (28,27) dengan model kebebasan mortalitas, copula Clayton, dan copula Gumbel serta suku bunga konstan 5% ditampilkan pada Gambar 1. Gambar tersebut menunjukkan bahwa peluang kegagalan status joint life sepasang suami istri (28,27) dalam kurun waktu t tahun ke depan dengan asumsi kebebasan mortalitas memberikan hasil yang terbesar. Hal tersebut terjadi karena peluang kematian bersamanya memiliki nilai yang lebih kecil. Selain itu, terlihat bahwa

penghitungan peluang kegagalan *joint life* dari pasangan suami istri (28,27) dalam kurun waktu t tahun ke depan menggunakan model *copula* Clayton ($\theta = 28$) dan *copula* Gumbel ($\theta = 17$) memiliki laju peningkatan dan besar peluang yang hampir mirip, terlihat dari grafiknya yang saling tumpang tindih. Namun sebenarnya perhitungan dengan *copula* Gumbel ($\theta = 17$) menghasilkan besar peluang yang sedikit lebih besar daripada penghitungan dengan *copula* Clayton ($\theta = 28$) untuk kurun waktu $t = 1$ hingga $t = 58$, dan untuk kurun waktu $t = 59$ dan seterusnya, berlaku sebaliknya.



Gambar 1. Peluang kegagalan *joint life* bagi pasangan suami istri (28,27).

Penghitungan nilai sekarang aktuarial dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang diasumsikan sebesar 1 satuan bagi pasangan suami istri dilakukan untuk usia masing-masing (28, 27) tahun hingga (55, 54) tahun menggunakan suku bunga konstan 5% disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3 menunjukkan bahwa perhitungan nilai sekarang aktuarial dari manfaat 1 satuan yang terbesar diperoleh dengan menggunakan asumsi kebebasan mortalitas, dan yang terkecil diperoleh dengan menggunakan model *copula Clayton* ($\theta = 28$).

Penghitungan nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri dilakukan untuk usia masing-masing (28,27) tahun hingga (55,54) tahun menggunakan suku bunga konstan 5% disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 menunjukkan bahwa perhitungan nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup yang terbesar diperoleh dengan menggunakan model *copula Clayton* ($\theta = 28$), dan yang terkecil diperoleh dengan menggunakan asumsi kebebasan mortalitas. Nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup menggunakan *copula Clayton* dan *copula Gumbel* tidak terlalu berbeda.

Tabel 3. Nilai sekarang aktuarial dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri (x, y) .

A_{xy}	Kebebasan Mortalitas	<i>Copula Clayton</i> ($\theta = 28$)	<i>Copula Gumbel</i> ($\theta = 17$)
$A_{28:27}$	0.1318255	0.1029039	0.1031899
$A_{29:28}$	0.1374596	0.1074690	0.1077500
$A_{30:29}$	0.1433134	0.1122210	0.1124970
$A_{31:30}$	0.1493991	0.1171698	0.1174409
$A_{32:31}$	0.1557128	0.1223174	0.1225826
$A_{33:32}$	0.1622674	0.1276743	0.1279331
$A_{34:33}$	0.1690767	0.1332519	0.1335036
$A_{35:34}$	0.1761470	0.1390621	0.1393047
$A_{36:35}$	0.1834771	0.1451004	0.1453334
$A_{37:36}$	0.1910662	0.1513710	0.1515935
$A_{38:37}$	0.1989141	0.1578700	0.1580824
$A_{39:38}$	0.2070211	0.1646022	0.1648043
$A_{40:39}$	0.2153726	0.1715481	0.1717419
$A_{41:40}$	0.2239620	0.1787046	0.1788918
$A_{42:41}$	0.2327758	0.1860688	0.1862504
$A_{43:42}$	0.2418085	0.1936304	0.1938083
$A_{44:43}$	0.2510405	0.2013871	0.2015620
$A_{45:44}$	0.2604599	0.2093215	0.2094954
$A_{46:45}$	0.2700486	0.2174241	0.2175988
$A_{47:46}$	0.2797743	0.2256779	0.2258551
$A_{48:47}$	0.2896058	0.2340740	0.2342543
$A_{49:48}$	0.2995539	0.2426115	0.2427967
$A_{50:49}$	0.3096102	0.2512903	0.2514821
$A_{51:50}$	0.3197604	0.2600957	0.2602972
$A_{52:51}$	0.3299911	0.2690360	0.2692491
$A_{53:52}$	0.3402763	0.2780909	0.2783187
$A_{54:53}$	0.3505846	0.2872408	0.2874873
$A_{55:54}$	0.3609108	0.2964877	0.2967580

Penghitungan premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun bagi pasangan suami istri, sejak menjadi peserta polis hingga terjadi kematian pertama, dilakukan untuk usia masing-masing (28,27) tahun hingga (55,54) tahun menggunakan asumsi suku bunga 5% disajikan pada Tabel 5.

Tabel 4. Nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri (x, y) .

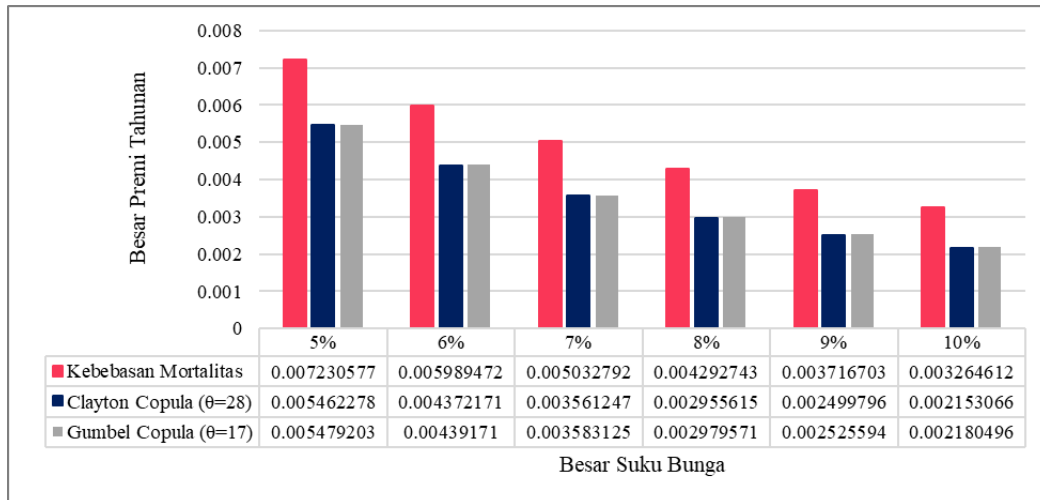
\ddot{a}_{xy}	Kebebasan Mortalitas	Copula Clayton ($\theta = 28$)	Copula Gumbel ($\theta = 17$)
$\ddot{a}_{28:27}$	18.23167	18.83902	18.83301
$\ddot{a}_{29:28}$	18.11335	18.74315	18.73725
$\ddot{a}_{30:29}$	17.99042	18.64336	18.63756
$\ddot{a}_{31:30}$	17.86262	18.53943	18.53374
$\ddot{a}_{32:31}$	17.73003	18.43133	18.42576
$\ddot{a}_{33:32}$	17.59238	18.31884	18.31341
$\ddot{a}_{34:33}$	17.44939	18.20171	18.19642
$\ddot{a}_{35:34}$	17.30091	18.07970	18.07460
$\ddot{a}_{36:35}$	17.14698	17.95289	17.94800
$\ddot{a}_{37:36}$	16.98761	17.82121	17.81654
$\ddot{a}_{38:37}$	16.82280	17.68473	17.68027
$\ddot{a}_{39:38}$	16.65256	17.54335	17.53911
$\ddot{a}_{40:39}$	16.47718	17.39749	17.39342
$\ddot{a}_{41:40}$	16.29680	17.24720	17.24327
$\ddot{a}_{42:41}$	16.11171	17.09255	17.08874
$\ddot{a}_{43:42}$	15.92202	16.93376	16.93003
$\ddot{a}_{44:43}$	15.72815	16.77087	16.76720
$\ddot{a}_{45:44}$	15.53034	16.60425	16.60060
$\ddot{a}_{46:45}$	15.32898	16.43409	16.43042
$\ddot{a}_{47:46}$	15.12474	16.26076	16.25704
$\ddot{a}_{48:47}$	14.91828	16.08445	16.08066
$\ddot{a}_{49:48}$	14.70937	15.90516	15.90127
$\ddot{a}_{50:49}$	14.49818	15.72290	15.71888
$\ddot{a}_{51:50}$	14.28503	15.53799	15.53376
$\ddot{a}_{52:51}$	14.07019	15.35024	15.34577
$\ddot{a}_{53:52}$	13.85420	15.16009	15.15531
$\ddot{a}_{54:53}$	13.63772	14.96794	14.96277
$\ddot{a}_{55:54}$	13.42087	14.77376	14.76808

Tabel 5 menunjukkan bahwa perhitungan premi tahunan bersih yang terbesar diperoleh dengan menggunakan asumsi kebebasan mortalitas, dan yang terkecil diperoleh dengan menggunakan model *copula Clayton* ($\theta = 28$). Besar premi tahunan bersih menggunakan *copula Clayton* dan *copula Gumbel* tidak terlalu berbeda. Semakin tinggi umur dari pasangan suami istri saat memulai kontrak, maka premi tahunan bersih yang dibayarkan akan semakin tinggi.

Tabel 5. Premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri (x, y) .

P_{xy}	Kebebasan Mortalitas	<i>Copula Clayton</i> ($\theta = 28$)	<i>Copula Gumbel</i> ($\theta = 17$)
$P_{28:27}$	0.007230577	0.005462278	0.005479203
$P_{29:28}$	0.007588855	0.005733773	0.005750577
$P_{30:29}$	0.007966095	0.006019352	0.006036035
$P_{31:30}$	0.008363787	0.006320034	0.006336597
$P_{32:31}$	0.008782432	0.006636382	0.006652784
$P_{33:32}$	0.009223730	0.006969562	0.006985761
$P_{34:33}$	0.009689550	0.007320845	0.007336802
$P_{35:34}$	0.010181374	0.007691618	0.007707206
$P_{36:35}$	0.010700260	0.008082288	0.008097474
$P_{37:36}$	0.011247389	0.008493867	0.008508584
$P_{38:37}$	0.011824076	0.008926908	0.008941173
$P_{39:38}$	0.012431793	0.009382595	0.009396391
$P_{40:39}$	0.013070967	0.009860510	0.009873959
$P_{41:40}$	0.013742701	0.010361367	0.010374588
$P_{42:41}$	0.014447618	0.010885959	0.010899012
$P_{43:42}$	0.015187048	0.011434578	0.011447610
$P_{44:43}$	0.015961219	0.012008152	0.012021212
$P_{45:44}$	0.016771034	0.012606504	0.012619753
$P_{46:45}$	0.017616863	0.013230060	0.013243654
$P_{47:46}$	0.018497797	0.013878674	0.013892758
$P_{48:47}$	0.019412812	0.014552816	0.014567453
$P_{49:48}$	0.020364836	0.015253639	0.015269014
$P_{50:49}$	0.021355104	0.015982433	0.015998736
$P_{51:50}$	0.022384303	0.016739342	0.016756875
$P_{52:51}$	0.023453209	0.017526493	0.017545493
$P_{53:52}$	0.024561239	0.018343615	0.018364437
$P_{54:53}$	0.025706972	0.019190399	0.019213517
$P_{55:54}$	0.026891756	0.020068537	0.020094555

Perhitungan premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun bagi pasangan suami istri (28,27), sejak menjadi peserta polis hingga terjadi kematian pertama, dengan asumsi suku bunga 5%, 6%, 7%, 8%, 9%, dan 10% disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup *joint life* bagi pasangan suami istri (28,27).

Gambar 2 menunjukkan bahwa semakin besar nilai suku bunga yang diterapkan, maka semakin kecil premi tahunan bersih asuransi jiwa seumur hidup status *joint life* yang dibayarkan tiap awal tahun bagi pasangan suami istri (28,27) semenjak bergabung menjadi peserta polis hingga terjadi kematian pertama. Terlihat bahwa penurunan premi tidak bersifat linear.

4. Simpulan

Hasil perhitungan untuk contoh kasus yang spesifik, menunjukkan bahwa peluang kematian *joint life*, nilainya lebih besar pada saat menggunakan asumsi kebebasan mortalitas. Hasil dugaan peluang kegagalan dengan menggunakan *copula* Gumbel memberikan hasil yang lebih baik jika dibandingkan dengan menggunakan *copula* Clayton.

Nilai sekarang aktuarial dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang tertinggi diperoleh dari penghitungan dengan model kebebasan mortalitas, diikuti hasil dengan menggunakan *copula* Gumbel, dan *copula* Clayton. Selain itu, nilai sekarang aktuarial dari anuitas hidup asuransi jiwa seumur hidup *joint life* yang tertinggi diperoleh dari penghitungan dengan model *copula* Clayton, selanjutnya model *copula* Gumbel dan model kebebasan mortalitas. Oleh karena itu, premi tahunan bersih yang terbesar diperoleh dari perhitungan menggunakan model kebebasan mortalitas, selanjutnya dengan *copula* Gumbel, dan *copula* Clayton.

Semakin tinggi umur dari pasangan suami istri saat memulai kontrak, maka premi tahunan bersih yang dibayarkan akan semakin tinggi. Semakin besar suku bunga yang diterapkan, maka premi tahunan bersih yang dibayarkan akan semakin rendah.

Daftar Pustaka

- [1] [AAJI] Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia. 2019. Tabel Mortalitas Indonesia IV. Jakarta (ID): AAJI.
- [2] Alwi W, Ariani A, Abdal AM. 2019. Perhitungan premi tahunan untuk asuransi jiwa *endowment joint life* dengan suku bunga stokastik. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika Serta Aplikasinya)*. 7(1):11-17. doi: 10.24252/msa.v7i1.7617.
- [3] Asih NM, Widana IN. 2018. Evaluasi premi *joint life* pasangan suami istri menggunakan *copula* Frank. *Jurnal Matematika*. 8(1):57-62. doi:10.24843/JMAT.2018.v08.i01.p97.

- [4] Bowers NL, Gerber HU, Hickman JC, Jones DA, Nesbitt CJ. 1997. *Actuarial Mathematics. 2nd Ed.* Schaumburg (US): The Society of Actuaries.
- [5] Cunningham RJ, Herzog TN, London RL. 2012. *Models for Quantifying Risk. 5th Ed.* Winsted Connecticut (US): ACTEX Publications, Inc.
- [6] Fang Y, Madsen L, Liu L. 2014. Comparison of Two Methods to Check Copula Fitting. *IAENG: International Journal of Applied Mathematics*. 44(1):53-61. ISSN:1992-9986.
- [7] Kamal I, Devianto D, Yanuar F. 2014. Penentuan premi tahunan pada asuransi *joint life* dengan menggunakan anuitas *reversionary*. *Jurnal Matematika UNAND*. 3(4):112-120. ISSN:2303-291X.
- [8] Nelsen RB. 2006. *An Introduction to Copulas. 2nd Ed.* New York (US): Springer Publishing.
- [9] Nina MK. 2011. *Jurus Pintar Asuransi – Agar Anda Tenang, Aman, dan Nyaman*. Yogyakarta (ID): ANDI G-Media.