PENYELESAIAN *CHINESE POSTMAN PROBLEM* PADA GRAF BERARAH DENGAN METODE HEURISTIK

PERMADI, A. S.[1], F. HANUM[2], DAN T. BAKHTIAR[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

[2]Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Penelitian ini membahas salah satu masalah penentuan rute optimal yang dapat diformulasikan sebagai masalah *arc routing*, yaitu *Chinese Postman Problem* (CPP). Masalah ini mencari rute perjalanan dengan biaya minimum sehingga setiap sisi/jalan harus dilewati minimal satu kali. CPP dapat diterapkan pada graf tak berarah ataupun graf berarah dan dapat diselesaikan dengan beberapa cara. Dalam penelitian ini, CPP diterapkan pada graf berarah dan diselesaikan dengan metode heuristik. Metode ini terdiri atas beberapa tahap dan menggunakan beberapa algoritme. Dalam penelitian ini, CPP diimplementasikan dalam masalah pembuangan sampah.

Kata Kunci: *Chinese Postman Problem*, graf berarah, metode heuristik,

1. PENDAHULUAN

Chinese Postman Problem (CPP) pertama kali dikemukakan oleh Meigu Guan atau Kwan Meiko, seorang pakar matematika dari Universitas Shangtun, Cina, yang sehari-harinya menggunakan sebagian dari waktu luangnya untuk bekerja di kantor pos pada waktu revolusi kebudayaan Cina (Korte). "Tukang pos harus melewati semua sektor yang ditugaskan kepadanya sebelum kembali ke kantor pos. Permasalahannya adalah bagaimana menentukan jarak terpendek untuk tukang pos tersebut" Guan (1962) di dalam Eiselt *et al.* (1995). Dalam kasus ini, permasalahan yang muncul adalah bagaimana menentukan jarak minimum dengan kondisi setiap ruas jalan harus dilewati paling tidak satu kali. Pada dasarnya CPP memiliki banyak jenis yaitu *undirected* CPP (CPP yang tidak berarah), *directed* CPP (CPP yang berarah), dan *mixed* CPP (CPP gabungan antara tidak berarah dan berarah). Dalam perkembangannya ternyata masalah CPP ini bisa diaplikasikan tidak hanya dalam pengiriman pos saja, tetapi dalam hal lainnya seperti pengumpulan sampah berdasarkan rute terpendeknya, pemindahan salju dengan biaya yang minimum, penentuan rute tercepat untuk bis sekolah, dll. CPP dapat dipandang sebagai masalah penentuan sirkuit Euler pada digraf yang balans. Sirkuit Euler dijamin ada jika digrafnya adalah digraf balans.

Dalam penelitian ini akan dibahas prosedur untuk mencari sirkuit Euler pada digraf yang tidak balans, dengan terlebih dahulu menjadikan digraf tersebut menjadi digraf balans dan kemudian menyelesaikannya dengan menggunakan dua macam algoritme.

2 PEMBAHASAN

2.1 Sirkuit Euler dan Graf Euler: Beberapa terminologi dalam teori graf yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Vasudev 2006) dan (Chartrand & Zhang 2009).

Pada suatu digraf (graf berarah), sirkuit berarah adalah *walk* berarah yang tertutup di mana barisannya dimulai dan diakhiri pada verteks yang sama dengan tidak ada sisi yang diulang. Semi sirkuit adalah sirkuit pada *underlying graph D*, tetapi bukan merupakan sirkuit berarah pada digraf D. Graf berarah D disebut *arborescence* jika: (i) D tidak memiliki sirkuit maupun semi sirkuit, (ii) pada D terdapat tepat satu verteks v_r yang memiliki $d^-(v_r) = 0$. Verteks v_r disebut akar *arborescence*.

Lintasan Euler adalah lintasan yang melewati semua sisi pada graf G tepat satu kali. Sirkuit Euler adalah lintasan Euler yang tertutup. Graf atau digraf yang memiliki sirkuit Euler disebut graf atau digraf Euler. Selanjutnya akan diberikan teorema-teorema yang digunakan sebagai dasar pengerjaan penelitian ini.

Teorema 1 Suatu graf G merupakan graf Euler jika dan hanya jika setiap verteks pada graf G berderajat genap (Chartrand & Zhang 2009).

Teorema 2 Misalkan D suatu digraf terhubung yang takkosong, maka D adalah digraf Euler jika dan hanya jika derajat-keluar dari verteks v_i sama dengan derajat-masuknya, yaitu $d^+(v_i) = d^-(v_i)$, untuk setiap verteks v_i pada digraf D (digraf balans) (Chartrand & Zhang 2009).

2.2 Metode Penyelesaian: Dalam kasus *Chinese Postman Problem* baik yang berarah (*directed*) maupun yang tidak berarah (*undirected*) permasalahan yang muncul adalah bagaimana menemukan sirkuit Euler yang merepresentasikan rute terpendek yang melewati setiap sisi tepat satu kali pada suatu graf terhubung.

Pencarian sirkuit Euler pada sebuah digraf dalam karya ilmiah ini dilakukan dengan dua metode, yaitu dengan algoritme Fleury yang diadopsi dari kasus UCPP (Balakrishnan 1997) dan menggunakan algoritme van Aardenne-Ehrenfest -de Bruijn yang dibahas di dalam Eiselt *et al.* (1995). Pada dasarnya dalam mencari sirkuit Euler pada suatu digraf D bisa langsung dicari dengan algoritme Fleury atau algoritme van Aardenne-Ehrenfest-de Bruijn, asalkan digrafnya merupakan digraf yang balans. Tentunya jika suatu digraf merupakan digraf Euler, maka digraf tersebut pasti memiliki sirkuit Euler yang merupakan solusi optimalnya. Pada kasus digraf yang tidak balans, agar sirkuit Euler bisa didapatkan maka perlu ada penambahan sisi terhadap verteks yang tidak balans. Prosedur penambahan sisi berarah tambahan pada sebuah digraf yang tidak balans dapat dilakukan dengan cara menformulasikan masalah DCPP sebagai masalah transportasi (Eiselt *et al.* 1995).

2.2.1 DCPP sebagai masalah transportasi: Berikut ini akan dijelaskan perumusan masalah transportasi untuk mencari *path* tambahan yang perlu dilewati agar ditemukan sirkuit Euler pada suatu digraf yang tidak *balance*.

Misalkan:

$I = \{v_i\}$ = himpunan verteks dengan derajat masuk lebih banyak dari derajat keluarnya.

$J = \{v_j\}$ = himpunan verteks dengan derajat keluar lebih banyak dari derajat masuknya.

c_{ij} = panjang *path* terpendek dari v_i menuju v_j.

s_i = selisih antara derajat masuk dan derajat keluar pada v_i.

d_j = selisih antara derajat keluar dan derajat masuk pada v_j.

x_{ij} = menyatakan banyaknya *path* berarah terpendek dari i ke j yang harus ditambahkan

Formulasi masalah transportasinya adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan: } \sum_{v_i \in I} \sum_{v_j \in J} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{Kendala : } \sum_{v_j \in J} x_{ij} = s_i \qquad (v_i \in I) \tag{2}$$

$$\sum_{v_i \in I} x_{ij} = d_j \qquad (v_j \in J) \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (v_i \in I, v_j \in J) \tag{4}$$

Fungsi objektif pada masalah transportasi pada persamaan (1) menyatakan bahwa nilai objektif dari permasalahan ini adalah jumlah dari panjang *path* terpendek dikalikan dengan banyaknya *path* yang harus dilewati. Persamaan (2) menyatakan banyaknya *path* berarah dari suatu verteks ke verteks v_i yang harus ditambahkan adalah sama dengan kelebihan derajat keluarnya. Persamaan (3) menyatakan banyaknya *path* berarah dari verteks v_i ke verteks lain yang harus ditambahkan adalah sama dengan kelebihan derajat masuknya. Pertaksamaan (4) menyatakan bahwa setiap variabel harus bernilai taknegatif.

2.2.2 Algoritme Fleury dan Algoritme van Aardenne-Ehrenfest-de Bruijn: Dua algoritme ini dapat digunakan untuk menentukan sirkuit Euler pada digraf yang balans.

(a) Algoritme Fleury

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung yang semua verteksnya berderajat genap.

LANGKAH 1. Inisialisasikan $i = 0$. Dimulai dari v_0 dan didefinisikan $T_0 : v_0$.

LANGKAH 2. Kemudian dimisalkan $T_i = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ e_3 \ldots e_i\ v_i$ sebagai *trail* di antara v_0 dan v_i pada iterasi ke-i, lalu dipilih sebuah sisi e_{i+1} yang menghubungkan v_i dengan v_{i+1} yang bukan merupakan *bridge* dari himpunan sisi $E_i = E - \{e_1,e_2,..,e_i\}$. Jika e_{i+1} adalah *bridge* pada subgraf yang didapat dari G setelah menghapus sisi yang dimiliki E_i dari E, dan tidak ada pilihan lain yang bisa diambil, maka sisi tersebut dimasukkan ke dalam *trail* $T_i = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ e_3 \ldots e_i\ v_i\ e_{i+1}$. Jika tidak ada sisi lagi yang bisa dipilih maka proses berhenti.

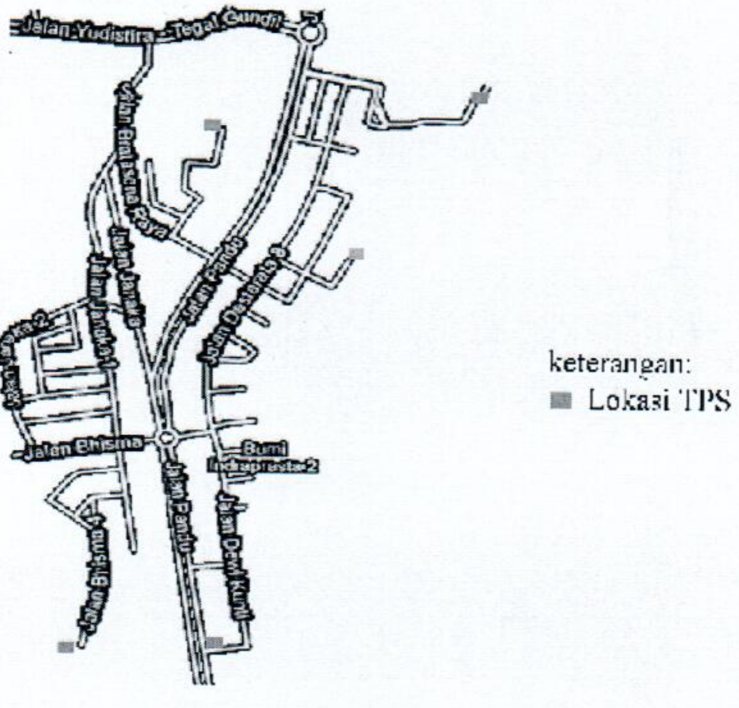
LANGKAH 3. Kemudian i diganti menjadi i+1, lalu kembali ke Langkah 2.
Trail yang terbentuk dari urutan sisi yang diambil merupakan sirkuit Euler pada graf G.

(b) Algoritme van Aardenne-Ehrenfest-de Bruijn

Misalkan diberikan suatu digraf yang balans
LANGKAH 1. Dibangun sebuah *spanning arborescence* yang berakar di v_r.
LANGKAH 2. Sisi berarah yang keluar dari v_r dan verteks-verteks lain diurutkan dan dilabeli sedemikian hingga sisi berarah terakhir yang dilabeli adalah sisi berarah pada *arborescence*.
LANGKAH 3. Dimulai dari sembarang verteks; sisi berarah dengan label terendah yang belum dilewati dipilih untuk sampai ke verteks berikutnya. Prosedur ini dilanjutkan hingga semua *arc* telah dilewati.

3 IMPLEMENTASI MODEL

Pada penelitian ini akan dibahas implementasi DCPP ke dalam masalah penentuan rute pengambilan sampah di daerah Kampung Wayang . Gambar 1 merupakan peta dari kondisi lingkungan daerah tersebut.



Gambar 1. Peta lokasi TPS di Kampung Wayang.

Pada Gambar 1 yang disebut jalan utama adalah jalan yang diberi nama tokoh wayang, sedangkan jalan yang lainnya yang tidak bernama disebut jalan atau blok pendek. Lokasi TPS (Tempat Pembuangan sementara) pada tiap bloknya diperlihatkan dengan gambar "kotak". Asumsi yang digunakan dalam masalah pengambilan sampah di lingkungan ini ialah sebagai berikut:

i. blok atau jalan yang pendek digabung menjadi satu jalan dengan jalan utamanya,

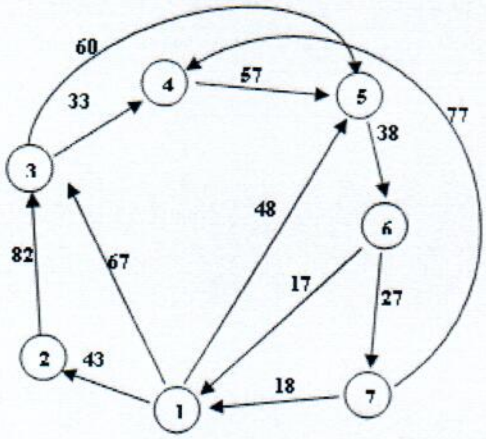
ii. setiap jalan harus dilewati tanpa kecuali, agar keberadaan sampah yang ada di setiap tempat sampah rumah warga dapat diketahui,

iii. setiap jalan utama seperti jalan Bhisma, jalan Janaka, jalan Bratasena, jalan Dewi Kunti, jalan Destarata, dan jalan Pandu Raya memiliki TPS masing-masing sehingga petugas harus memeriksa juga setiap TPS tersebut,

iv. semua pekerjaan diawali di jalan arteri bundaran Pandu Raya dan berakhir di tempat yang sama,

v. diasumsikan bahwa total volume sampah tidak melebihi kapasitas dari truk sampah.

Model graf yang bisa dibuat dari kasus ini adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Digraf kasus Kayang.

Masalah tersebut terlebih dahulu diformulasikan menjadi masalah tranportasi untuk mencari *path* ekstranya, maka diperoleh:

(1) himpunan verteks $I = \{4, 5\}$ dan $J = \{1, 6, 7\}$,

(2) didefinisikan x_{ij} untuk $i \in I$ dan $j \in J$: $x_{41}, x_{46}, x_{47}, x_{51}, x_{56}, x_{57}$

(3) ditentukan c_{ij} dengan algoritme Dijkstra (Chartrand dan Oellermann 1993): sehingga diperoleh

$c_{41} = 112,\ c_{46} = 95,\ c_{47} = 122,\ c_{51} = 55,\ c_{56} = 38,\ c_{57} = 65.$

Formulasi masalah transportasinya adalah:

Minimumkan: $112\,x_{41} + 95x_{46} + 122x_{47} + 55x_{51} + 38\,x_{56} + 65\,x_{57}$

dengan kendala:

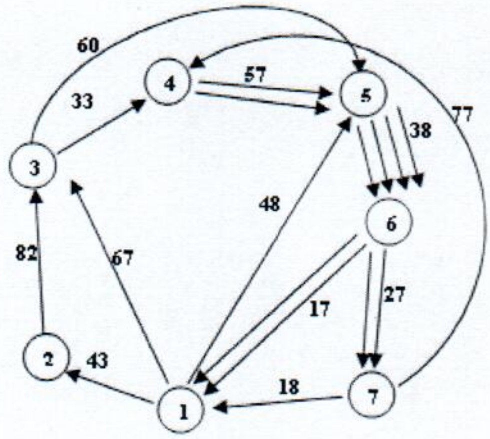
$$
\begin{aligned}
x_{41} + x_{46} + x_{47} &= 1\\
x_{51} + x_{56} + x_{57} &= 2\\
x_{41} + x_{51} &= 1\\
x_{46} + x_{56} &= 1\\
x_{47} + x_{57} &= 1\\
x_{41}, x_{46}, x_{47}, x_{51}, x_{56}, x_{57} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dengan LINGO 11.0 diperoleh solusi optimal:

$$x_{41} = 1,\ x_{46} = 0,\ x_{47} = 0,\ x_{51} = 0,\ x_{56} = 1,\ x_{57} = 1.$$

Dari solusi ini dapat ditarik kesimpulan bahwa *path* tambahan yang diperlukan adalah *path* 4-1, yaitu 4-5-6-1, *path* 5-6, dan *path* 5-7, yaitu 5-6-7, sehingga diperoleh digraf Kayang yang sudah balans seperti pada Gambar 3. Karena digraf balans, maka digraf tersebut merupakan digraf Euler. Solusi sirkuit Euler yang dihasilkan antara lain ialah

C = 1-3-4-5-6-7-4-5-6-1-2-3-5-6-7-1-5-6-1 dengan total bobot 782 atau dengan algoritme Fleury diperoleh C = 1-2-3-4-5-6-1-3-5-6-1-5-6-7-4-5-6-7-1 dengan total bobot 782. Sirkuit Euler juga dapat diperoleh dari algoritme van Aardenne-Ehrenfest-de Bruijn: solusinya antara lain ialah C = 1-2-3-5-6-1-3-4-5-6-1-5-6-7-4-5-6-7-1 dengan total bobot 782.



Gambar 3. Digraf kasus Kayang yang sudah balans.

4 SIMPULAN

CPP (*Chinese Postman Problem*) bisa diterapkan pada permasalahan graf yang berarah, yang kemudian dikenal sebagai DCPP (*Directed Chinese Postman Problem*) . Di dalam penelitian ini, penyelesaian masalah DCPP diselesaikan dengan algoritme Fleury dan algoritme van Aardenne-Ehrenfest - de Bruijn. Solusi yang diperoleh dengan kedua algoritme ini tidak tunggal, namun total jarak yang ditempuh masing-masing adalah sama. Dalam penelitian ini masalah DCPP juga diimplementasikan pada masalah penentuan rute pengambilan sampah dan diperoleh solusinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. **V.K. Balakrishnan**, 1997, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory.* New York, McGraw-Hill.

[2]. **G. Chartrand, O.R. Oellermann**, 1993, *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York, McGraw-Hill.

[3]. **G. Chartrand, P. Zhang**, 2009, *Chromatic Graph Theory*. London, CRC Pr,

[4]. **H.A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte**, 1995, "Arc routing problem, Part 1 : The Chinese postman problem", *Operat. Res.* vol 43, no.2, pp.231-242.

[5]. **C. Vasudev**, 2006, *Graph Theory with Application.* New Delhi, New Age International.