

PERILAKU DINAMIS MODEL MANGSA-PEMANGSA TIPE GAUSE YANG DIPERUMUM DENGAN WAKTU TUNDA PEMANENAN KONSTAN

HASANNUDIN¹, A. KUSNANTO², JAHARUDDIN²

Abstrak

Terdapat beberapa model matematis untuk memodelkan peristiwa mangsa-pemangsa. Salah satu model yang cukup banyak penerapannya adalah model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum dengan mempertimbangkan waktu tunda dan sebuah parameter pemanenan konstan. Analisis kestabilan dilakukan terhadap model tanpa dan dengan waktu tunda. Untuk model tanpa waktu tunda diperoleh titik tetap yang salah satunya bersifat spiral stabil, sedangkan titik tetap pada model dengan waktu tunda terdapat titik tetap yang bersifat spiral stabil/tidak stabil. Untuk model dengan waktu tunda, semakin besar nilai waktu tunda mengakibatkan munculnya *limit cycle*, dan terjadi bifurkasi Hopf superkritis saat kesetimbangan mengalami perubahan stabilitas dari spiral stabil menjadi spiral tak stabil.

Kata kunci: bifurkasi Hopf superkritis, mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum, waktu tunda.

PENDAHULUAN

Pada kehidupan nyata, setiap makhluk hidup melakukan proses interaksi dengan makhluk hidup lainnya. Dalam konteks memenuhi kebutuhan makanan, proses interaksi tersebut memunculkan proses rantai makanan yaitu peristiwa makan dan dimakan untuk mempertahankan jumlah populasi. Interaksi yang dilakukan oleh spesies pemangsa (*predator*) memengaruhi jumlah dari spesies mangsa (*prey*). Peristiwa rantai makanan atau makan dan dimakan menjadi latar belakang bidang pemodelan matematika untuk meniru perilaku dinamika sistem mangsa-pemangsa tersebut agar diperoleh jumlah mangsa-pemangsa dipertahankan seimbang.

Alfred Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1927 mengembangkan sepasang persamaan diferensial yang menggambarkan fenomena mangsa-pemangsa untuk pertama kali dikenal sebagai model Lotka-Volterra [1]. Pada suatu sistem, perubahan populasi tidak selalu monoton. Hal ini disebabkan makhluk hidup tidak dapat melahirkan terus menerus dan ada beberapa makhluk

¹Mahasiswa Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

hidup belum mampu berkembang biak. Penyebabnya yaitu karena fasilitas yang terbatas. Gejala ini merupakan suatu fenomena dimana suatu makhluk hidup memerlukan tenggang atau tundaan waktu (*time delay*). Salah satu bentuk model mangsa-pemangsa yaitu model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum (*generalized Gause-type*). Kemudian Beretta dan Kuang [2] serta Ruan [6] menambahkan komponen perlambatan agar model mangsa-pemangsa lebih realistis. Asumsi dasar dari model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum yaitu terdapat pengaruh interaksi antara mangsa dengan pemangsa dan terdapat komponen perlambatan yang didefinisikan bahwa jumlah populasi makhluk hidup saat ini bergantung pada jumlah populasi makhluk hidup pada waktu terdahulu atau waktu yang dibutuhkan makhluk hidup untuk mempersiapkan tahap tertentu.

PEMODELAN MANGSA-PEMANGSA TIPE GAUSE YANG DIPERUMUM

Berikut ini adalah uraian dari kedua model mangsa-pemangsa tersebut.

Model 1 : Model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum 1

Model ini menggambarkan interaksi antara mangsa dengan pemangsa, pemanenan konstan pada mangsa, dan komponen perlambatan pada tingkat pertumbuhan mangsa yang berpengaruh pada laju perubahan mangsa terhadap waktu. Berikut adalah model tipe Gause yang diperumum 1:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)[f(x(t-\tau)) - y(t)h(x(t))] - H \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \mu y(t)[x(t)h(x(t)) - jh(j)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

di mana $x, y > 0$, dan konstanta $\mu, j, \tau, H > 0$, dengan

- x : banyaknya populasi mangsa pada waktu t (populasi),
- y : banyaknya populasi pemangsa pada waktu t (populasi),
- μ : faktor pengali (tanpa dimensi),
- j : banyaknya populasi mangsa minimum yang dibutuhkan pemangsa agar stabil (populasi),
- $f(x)$: tingkat pertumbuhan spesifik mangsa berupa suatu fungsi sembarang ($1/\text{waktu}$),
- $h(x)$: koefisien interaksi antara mangsa dengan pemangsa berupa suatu fungsi sembarang ($1/(\text{populasi.waktu})$),
- $xh(x)$: respons fungsional dengan $xh(x) = g(x)$ berupa suatu fungsi

- sembarang (1/waktu),
 τ : waktu tunda atau perlambatan (waktu), dan
 H : upaya pemanenan populasi mangsa (populasi/waktu).

Model 2 : Model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum 2

Model ini menggambarkan interaksi antara mangsa dengan pemangsa, pemanenan konstan pada mangsa, dan komponen perlambatan pada respons fungsional yang berpengaruh pada laju perubahan pemangsa terhadap waktu. Berikut adalah model tipe Gause yang diperumum 2:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)[f(x(t)) - y(t)h(x(t))] - H \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(t)[-d + ex(t - \tau)h(x(t - \tau))]\end{aligned}\tag{2.2}$$

di mana $x, y > 0$, dan konstanta $d, e, \tau, H > 0$, dengan

- x : banyaknya populasi mangsa pada waktu t (populasi),
 y : banyaknya populasi pemangsa pada waktu t (populasi),
 e : laju mengonsumsi mangsa oleh pemangsa (tanpa dimensi),
 d : laju kematian pemangsa (1/waktu),
 $f(x)$: tingkat pertumbuhan spesifik mangsa (1/waktu),
 $h(x)$: koefisien interaksi antara mangsa dengan pemangsa berupa suatu fungsi sembarang (1/(populasi.waktu)),
 $xh(x)$: respons fungsional dengan $xh(x) = g(x)$ berupa suatu fungsi sembarang (1/waktu),
 τ : waktu tunda atau perlambatan (waktu), dan
 H : upaya pemanenan populasi mangsa (populasi/waktu).

PEMBAHASAN

Penentuan Titik Tetap Model 1 tanpa Waktu Tunda

Titik tetap didapat dari $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga dari persamaan (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned}x[f(x) - yh(x)] - H &= 0 \\ \mu y[xh(x) - jh(j)] &= 0.\end{aligned}$$

Karena $h(x) > 0$, $h'(x) \leq 0$ dan $xh'(x) + h(x) = g'(x) > 0$, maka hanya

terdapat dua titik tetap yang mungkin, yaitu $A_1 = (C_1, 0)$ dan $A_2 = (x^*, y^*)$ dengan

$$x^* = j, y^* = \frac{jf(j) - H}{jh(j)}$$

dan nilai C_1 diperoleh dari penyelesaian persamaan $C_1 f(C_1) = H$. Agar titik tetap A_1 memiliki komponen-komponen yang bernilai positif, batasan upaya pemanenan untuk titik tetap A_1 sebesar $C_1 f(C_1) = H$. Kemudian, agar titik tetap A_2 memiliki komponen-komponen yang bernilai positif, maka batasan upaya pemanenan untuk titik tetap A_2 sebesar $0 < H < jf(j)$.

Pelinearan Model 1 dengan Waktu Tunda

Model mangsa-pemangsa dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (2.1) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik tetap A_2 . Untuk itu dimisalkan

$$X(t) = x(t) - x^* \text{ dan } Y(t) = y(t) - y^*.$$

Jika pemisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (2.1) dan disederhanakan, maka

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= x^* f'(x^*) X(t - \tau) + [f(x^*) - y^* g'(x^*)] X(t) \\ &\quad - g(x^*) Y(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \mu y^* g'(x^*) X(t). \end{aligned}$$

Jika penyelesaian $X(\tau) = e^{\lambda\tau}$ digunakan, maka diperoleh matriks Jacobi di titik tetap A_2 berbentuk

$$J = \begin{pmatrix} x^* f'(x^*) e^{-\lambda\tau} + f(x^*) - y^* g'(x^*) & -g(x^*) \\ \mu y^* g'(x^*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian persamaan karakteristik $\det(J - \lambda I) = 0$, menghasilkan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + p\lambda + q\lambda e^{-\lambda\tau} + \alpha = 0 \quad (3.1)$$

dengan

$$\begin{aligned} p &= -f(x^*) + y^* g'(x^*) \\ q &= -x^* f'(x^*) \\ \alpha &= \mu y^* g(x^*) g'(x^*). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analisis kestabilan dilakukan dengan mencari nilai eigen pada masing-masing titik tetap. Dengan diperoleh persamaan (3.1), kita dapat menganalisis kestabilan dalam bentuk umum. Jika nilai $\tau = \mathbf{0}$, maka diperoleh

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + (p + q)\lambda + \alpha = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen, yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4\alpha}}{2}.$$

1. Jika titik tetap $A_1 = (C_1, 0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2), maka diperoleh

$$\begin{aligned} p &= -f(x^*) + y^*g'(x^*) = -f(C_1) \\ q &= -x^*f'(x^*) = -C_1f'(C_1) \\ \alpha &= \mu y^*g(x^*)g'(x^*) = 0 \end{aligned}$$

dengan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + (p + q)\lambda = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen berikut

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = -(p + q).$$

Karena ada salah satu nilai eigen bernilai nol, maka titik tetap $A_1 = (C_1, 0)$ bersifat tak terisolasi.

2. Jika titik tetap $A_2 = (x^*, y^*)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2), maka diperoleh

$$\begin{aligned} p &= -f(x^*) + y^*g'(x^*) \\ q &= -x^*f'(x^*) \\ \alpha &= \mu y^*g(x^*)g'(x^*) \end{aligned}$$

dengan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + (p + q)\lambda + \alpha = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4\alpha}}{2}. \quad (3.3)$$

Berdasarkan nilai eigen pada persamaan (3.3) dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ terdapat 3 kemungkinan, yaitu:

- i. $(p + q)^2 - 4\alpha > 0$ sehingga $(p + q)^2 > 4\alpha$. Dalam hal ini titik tetap bersifat simpul stabil jika $p + q > 0$.
- ii. $(p + q)^2 - 4\alpha < 0$ sehingga $(p + q)^2 < 4\alpha$. Dalam hal ini titik tetap bersifat spiral stabil jika $p + q > 0$.
- iii. $(p + q)^2 - 4\alpha < 0$ sehingga $(p + q)^2 < 4\alpha$. Dalam hal ini titik tetap bersifat spiral tidak stabil jika $p + q < 0$.

Penentuan Nilai Waktu Tunda Kritis Model 1

Model mangsa-pemangsa untuk waktu tunda $\tau > 0$ pada persamaan (2.1) titik tetapnya bersifat spiral (stabil atau tidak stabil), sehingga nilai eigen dari matriks Jacobi dimisalkan $\lambda = \delta \pm i\omega$ dengan $\delta = 0$ dan $\omega > 0$ ($\lambda = \pm i\omega$). Untuk memperoleh nilai ω , maka nilai eigen $\lambda = \pm i\omega$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1) sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$f(i\omega, \tau) = -\omega^2 + ip\omega + iq\omega \cos(\omega\tau) + q\omega \sin(\omega\tau) + \alpha = 0. \quad (3.4)$$

dengan $e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$.

Kemudian dengan memisahkan bagian real dan imajiner, pada persamaan (3.4) diperoleh

$$\alpha - \omega^2 = -q\omega \sin(\omega\tau) \quad (3.5)$$

$$p\omega = -q\omega \cos(\omega\tau).$$

Kuadratkan persamaan (3.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha\omega^2 + \omega^4 &= q^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau) \\ p^2\omega^2 &= q^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau). \end{aligned}$$

Selanjutnya kedua persamaan tersebut dijumlahkan dan dikelompokkan sesuai pangkat ω dengan $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, maka diperoleh polinomial berderajat empat

$$\omega^4 + (p^2 - q^2 - 2\alpha)\omega^2 + \alpha^2 = 0. \quad (3.6)$$

Dari persamaan (3.6), bila didefinisikan ω^2_{\pm} sebagai akar dari persamaan (3.6) maka diperoleh

$$\omega^2_{\pm} = \frac{1}{2}(-p^2 + q^2 + 2\alpha \pm \sqrt{(p^2 - q^2 - 2\alpha)^2 - 4\alpha^2}). \quad (3.7)$$

Menurut aturan tanda Descartes, persamaan (3.6) akan memiliki paling tidak satu akar real positif jika variasi perubahan tanda koefisien polinomnya lebih dari satu atau sama dengan satu. Dari persamaan (3.7) diketahui jika $p^2 - q^2 - 2\alpha > 0$ menyebabkan persamaan polinom (3.6) tidak memiliki variasi perubahan tanda koefisien sehingga persamaan (3.7) tidak memiliki akar real positif. Dalam hal ini akan ditinjau jika

$$(-p^2 + q^2 + 2\alpha) > 0 \text{ dan } (p^2 - q^2 - 2\alpha)^2 > 4\alpha^2$$

akan ada satu solusi positif dari persamaan (3.7). Dengan demikian persamaan (3.6) memiliki akar imajiner murni $i\omega$. Sehingga dengan mensubstitusikan ω^2_{\pm} ke persamaan (3.5) diperoleh nilai tundaan kritis

$$\tau_k^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha - \omega_{\pm}^2}{p\omega_{\pm}} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_{\pm}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Bifurkasi Hopf pada Model 1

Pada Teorema Kar [4], misalkan ada sebuah bilangan bulat positif m sedemikian sehingga m berubah kestabilan dari stabil ke tidak stabil atau sebaliknya. Jika $\tau \in [0, \tau_0^+) \cup (\tau_0^-, \tau_0^+) \cup \dots \cup (\tau_{m-1}^-, \tau_m^+)$ titik tetap bersifat stabil dan $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-) \cup (\tau_1^+, \tau_1^-) \cup \dots \cup (\tau_{m-1}^+, \tau_{m-1}^-)$ titik tetap bersifat tidak stabil, maka sistem akan terjadi bifurkasi Hopf terhadap titik tetap untuk $\tau = \tau_k^\pm, k = 0, 1, 2, \dots$

Berdasarkan persamaan (2.1), titik tetap A_2 stabil untuk $\tau = 0$. Untuk membuktikan Teorema Kar [4] cukup dilakukan uji kebenaran kondisi transversal, yaitu kondisi yang menyebabkan perubahan kestabilan titik tetap dengan waktu tunda. Kriteria kondisi yang digunakan adalah

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_k^+} > 0 \text{ dan } \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_k^-} < 0.$$

Langkah pertama untuk memenuhi Teorema Kar [4], persamaan (3.1) diturunkan terhadap τ

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda+p)e^{\lambda\tau+q}}{\lambda^2q} - \frac{\tau}{\lambda}. \tag{3.8}$$

Dari persamaan karakteristik (3.1), didapat $e^{\lambda\tau} = \frac{-q\lambda}{(\lambda^2+p\lambda+\alpha)}$, lalu disubstitusikan pada persamaan (3.8) didapat

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{-(2\lambda+p)}{\lambda(\lambda^2+p\lambda+\alpha)} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \text{sign}\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega} &= \text{sign}\left(\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right)_{\lambda=i\omega} \\ &= \text{sign}\left(\text{Re}\left(\frac{-(2\lambda+p)}{\lambda(\lambda^2+p\lambda+\alpha)}\right)_{\lambda=i\omega} + \text{Re}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_{\lambda=i\omega} + \right. \\ &\quad \left. \text{Re}\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)_{\lambda=i\omega}\right) \\ &= \text{sign}\left(\frac{p^2 - 2(\alpha - \omega^2)}{(\omega^2 - \alpha)^2 + p^2\omega^2} - \frac{q^2}{q^2\omega^2}\right) \\ &= \text{sign}\left(\frac{p^2 - 2(\alpha - \omega^2) - q^2}{(\omega^2 - \alpha)^2 + p^2\omega^2}\right) \\ &= \text{sign}(2\omega^2 + p^2 - q^2 - 2\alpha). \end{aligned}$$

Untuk nilai $\omega = \omega_+$ diperoleh

$$\text{sign}\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega_+} = \text{sign}(2\omega_+^2 + p^2 - q^2 - 2\alpha)$$

$$= \text{sign} \left(\sqrt{(p^2 - q^2 - 2\alpha)^2 - 4\alpha^2} \right)$$

sehingga terpenuhi bahwa

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_k^+} > 0.$$

Untuk nilai $\omega = \omega_-$ diperoleh

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_-} &= \text{sign}(2\omega_-^2 + p^2 - q^2 - 2\alpha) \\ &= \text{sign} \left(-\sqrt{(p^2 - q^2 - 2\alpha)^2 - 4\alpha^2} \right) \end{aligned}$$

sehingga terpenuhi bahwa

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_k^-} < 0.$$

Oleh karena itu, kondisi transversal terpenuhi. Jadi, τ_k^\pm merupakan perubahan nilai waktu tunda untuk kestabilan model 1 sehingga terjadi bifurkasi Hopf.

Penentuan Titik Tetap Model 2 tanpa Waktu Tunda

Dari persamaan (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned} x[f(x) - yh(x)] - H &= 0 \\ y[-d + exh(x)] &= 0. \end{aligned}$$

Terdapat dua titik tetap yang mungkin, yaitu $A_3 = (C_2, 0)$ dan $A_4 = (x^*, y^*)$ dengan

$$x^*h(x^*) = \frac{d}{e}, y^* = \frac{x^*f(x^*) - H}{d/e}$$

dan nilai C_2 diperoleh dari penyelesaian persamaan $C_2f(C_2) = H$. Batasan upaya pemanenan untuk titik tetap A_3 sebesar $C_2f(C_2) = H$. Kemudian, batasan upaya pemanenan untuk titik tetap A_4 sebesar $0 < H < x^*f(x^*)$.

Pelinearan Model 2 dengan Waktu Tunda

Model mangsa-pemangsa dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (2.2) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik tetap A_4 . Untuk itu dimisalkan

$$X(t) = x(t) - x^* \text{ dan } Y(t) = y(t) - y^*.$$

Jika pemisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (2.2), maka

$$\frac{dX(t)}{dt} = [f(x^*) - y^*g'(x^*) + x^*f'(x^*)]X(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \begin{matrix} -g(x^*)Y(t) \\ ey^*g'(x^*)X(t-\tau) \end{matrix}$$

Jika penyelesaian $X(\tau) = e^{\lambda\tau}$ digunakan, maka diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} f(x^*) - y^*g'(x^*) + x^*f'(x^*) & -g(x^*) \\ ey^*g'(x^*)e^{-\lambda\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian persamaan karakteristik $\det(J - \lambda I) = 0$, menghasilkan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + m\lambda + ne^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.9)$$

dengan

$$m = -f(x^*) + y^*g'(x^*) - x^*f'(x^*) \quad (3.10)$$

$$n = ey^*g(x^*)g'(x^*).$$

Jika nilai $\tau = 0$ pada persamaan (3.9), maka diperoleh

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + m\lambda + n = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen, yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

1. Jika titik tetap $A_3 = (C_2, 0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.10), maka diperoleh

$$\begin{aligned} m &= -f(x^*) + y^*g'(x^*) - x^*f'(x^*) \\ &= -f(C_2) - C_2f'(C_2) \\ n &= ey^*g(x^*)g'(x^*) = 0 \end{aligned}$$

dengan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + m\lambda = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen berikut

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = -m.$$

Karena ada salah satu nilai eigen bernilai nol, maka titik tetap $A_3 = (C_2, 0)$ bersifat tak terisolasi.

2. Jika titik tetap $A_4 = (x^*, y^*)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.10), maka diperoleh

$$\begin{aligned} m &= -f(x^*) + y^*g'(x^*) - x^*f'(x^*) \\ n &= ey^*g(x^*)g'(x^*) \end{aligned}$$

dengan

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + m\lambda + n = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}. \quad (3.11)$$

Berdasarkan nilai eigen pada persamaan (3.11) dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ terdapat 3 kemungkinan, yaitu:

- i. $m^2 - 4n > 0$ sehingga $m^2 > 4n$. Dalam hal ini titik tetap bersifat simpul stabil jika $m > 0$.
- ii. $m^2 - 4n < 0$ sehingga $m^2 < 4n$. Dalam hal ini titik tetap bersifat spiral stabil jika $m > 0$.
- iii. $m^2 - 4n < 0$ sehingga $m^2 < 4n$. Dalam hal ini titik tetap bersifat spiral tidak stabil jika $m < 0$.

Penentuan Nilai Waktu Tunda Kritis Model 2

Untuk memperoleh nilai ω , maka nilai eigen $\lambda = \pm i\omega$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9) sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$f(i\omega, \tau) = -\omega^2 + im\omega + n \cos(\omega\tau) - in \sin(\omega\tau) = 0. \quad (3.12)$$

dengan $e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$.

Kemudian dengan memisahkan bagian real dan imajiner, pada persamaan (3.12) diperoleh

$$\omega^2 = n \cos(\omega\tau) \quad (3.13)$$

$$m\omega = n \sin(\omega\tau)$$

Kuadratkan persamaan (3.13), diperoleh

$$\begin{aligned} \omega^4 &= n^2 \cos^2(\omega\tau) \\ m^2\omega^2 &= n^2 \sin^2(\omega\tau) \end{aligned}$$

Selanjutnya kedua persamaan tersebut dijumlahkan dan dikelompokkan sesuai pangkat ω dengan $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, maka diperoleh

$$\omega^4 + m^2\omega^2 - n^2 = 0. \quad (3.14)$$

Bila didefinisikan ω^2_{\pm} sebagai akar dari persamaan (3.14) maka diperoleh

$$\omega^2_{\pm} = \frac{1}{2}(-m^2 \pm \sqrt{m^4 + 4n^2}). \quad (3.15)$$

Karena $m^4 + 4n^2 > m^2$ maka akan ada satu solusi positif dari persamaan (3.15). Sehingga dengan mensubstitusikan ω^2_+ ke persamaan (3.13) diperoleh nilai tundaan kritis

$$\tau_k^+ = \frac{1}{\omega_+} \tan^{-1} \left(\frac{m}{\omega_+} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_+}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Bifurkasi Hopf pada Model 2

Berdasarkan persamaan (2.2), titik tetap A_4 stabil untuk $\tau = 0$. Untuk membuktikan Teorema Kar [4] cukup dilakukan uji kebenaran kondisi transversal, yaitu kondisi yang menyebabkan perubahan kestabilan titik tetap dengan waktu tunda. Kriteria kondisi yang digunakan adalah

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau = \tau_k^+} > 0 \text{ dan } \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau = \tau_k^-} < 0.$$

Langkah pertama untuk memenuhi Teorema Kar [4], persamaan (3.9) diturunkan terhadap τ

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{(2\lambda+m)e^{\lambda\tau}}{\lambda n} - \frac{\tau}{\lambda}. \tag{3.16}$$

Dari persamaan karakteristik (3.9), didapat $e^{\lambda\tau} = \frac{-n}{(\lambda^2+m\lambda)}$, lalu disubstitusikan pada persamaan (3.16) didapat

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{-(2\lambda + m)}{\lambda^2(\lambda + m)} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left(\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right)_{\lambda=i\omega} \\ &= \text{sign} \left(\text{Re} \left(\frac{-(2\lambda+m)}{\lambda^2(\lambda+m)} \right)_{\lambda=i\omega} + \text{Re} \left(-\frac{\tau}{\lambda} \right)_{\lambda=i\omega} \right) \\ &= \text{sign} \left(\frac{2\omega^2 + m^2}{\omega^4 + m^2\omega^2} \right) \\ &= \text{sign}(2\omega^2 + m^2). \end{aligned}$$

Untuk nilai $\omega = \omega_+$ diperoleh

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_+} &= \text{sign}(2\omega_+^2 + m^2) \\ &= \text{sign}(\sqrt{m^4 + 4n^2}) \end{aligned}$$

sehingga terpenuhi bahwa

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau = \tau_k^+} > 0.$$

Untuk nilai $\omega = \omega_-$ diperoleh

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_-} &= \text{sign}(2\omega_-^2 + m^2) \\ &= \text{sign} \left(-\sqrt{m^4 + 4n^2} \right) \end{aligned}$$

sehingga terpenuhi bahwa

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_k^-} < 0.$$

Oleh karena itu, kondisi transversal terpenuhi. Jadi, τ_k^\pm merupakan perubahan nilai waktu tunda untuk kestabilan model 2 sehingga terjadi bifurkasi Hopf.

Simulasi Numerik

Pada simulasi ini, didefinisikan fungsi f adalah fungsi pertumbuhan logistik dan fungsi g adalah fungsi respons Holling-Tanner tipe II sebagai berikut

$$f(x) = r \left(1 - \frac{x}{K} \right) \text{ dan } g(x) = xh(x) = \frac{x}{b+x}$$

di mana konstanta $r, K, b > 0$, dengan

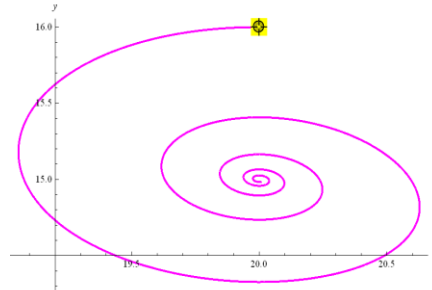
- r : laju intrinsik dari populasi mangsa (1/waktu),
- K : daya dukung lingkungan, yang ditentukan oleh sumber daya yang tersedia (populasi), dan
- b : tingkat kejenuhan pemangsaan (populasi).

Untuk model tipe Gause yang diperumum 1 dan 2, diambil sembarang beberapa parameter tetap yaitu: $K = 40, r = 2, b = 10, \mu = 3, H = 10, j = 20, d = 2, e = 3$ dengan nilai awal $x(0) = 20, y(0) = 16$. Pada saat $\tau = 0$, model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum 1 ekuivalen dengan model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum 2. Dengan menggunakan parameter-parameter yang diberikan, diperlukan titik tetap, nilai eigen dan kestabilan pada saat $\tau = 0$ dan diberikan dalam Tabel 1

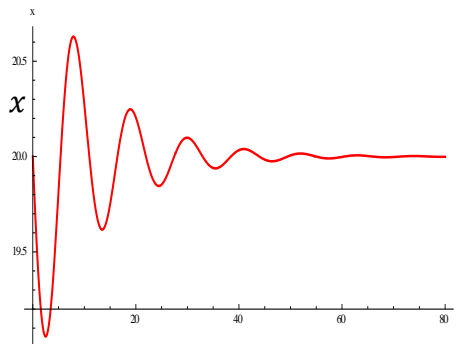
Tabel 1
Titik tetap, nilai eigen, dan kestabilan saat $\tau = 0$

Luaran	Titik Tetap		
	$A_{11} = A_{31}$	$A_{12} = A_{32}$	$A_2 = A_4$
x	5.8578	34.1421	20
y	0	0	15
λ_1	0	0	$-0.0833 + 0.5713 i$
λ_2	1.4142	-1.4142	$-0.0833 - 0.5713 i$
Batas nilai H	$H = 10$	$H = 10$	$0 < H < 20$
$-p^2 + q^2 + 2\alpha$	-2.8284	2.8284	0.9722
$(p^2 - q^2 - 2\alpha)^2 - 4\alpha^2$	8	8	0.5007
α	0	0	0.3333
n	0	0	0.3333
Jenis kestabilan	Tak Terisolasi	Tak Terisolasi	Spiral Stabil

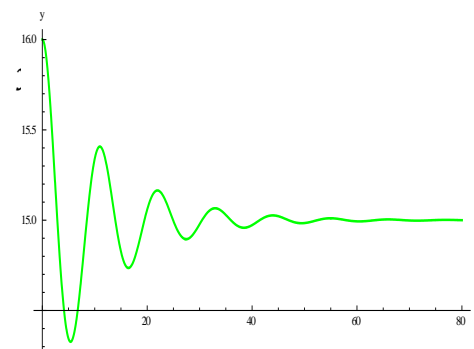
Titik tetap yang diperoleh ada tiga untuk model pertama dan kedua, terdapat pada Tabel 1. Gambar 1 menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap A_2 atau A_4 .



Gambar 1 Bidang fase saat $\tau = 0$



Gambar 2 Bidang solusi mangsa saat $\tau = 0$



Gambar 3 Bidang solusi pemangsa saat $\tau = 0$

Gambar 2 memperlihatkan bahwa di awal populasi mangsa model pertama dan kedua, mengalami penurunan setelah itu kenaikan yang drastis. Kemudian, pertumbuhan mangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan mangsa menuju $x = 20$. Gambar 3 memperlihatkan bahwa di awal waktu populasi pemangsa mengalami penurunan yang drastis setelah itu kenaikan. Kemudian, pertumbuhan pemangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan pemangsa menuju $y = 15$.

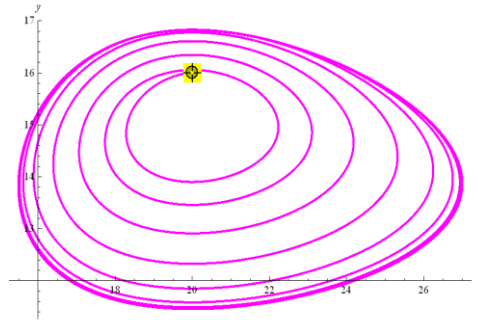
Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 1 saat $\tau = 0.7$

Titik tetap yang diperoleh ada tiga, terdapat pada Tabel 1. Untuk memenuhi teorema, maka dilakukan pemilihan nilai waktu tunda sebagai berikut.

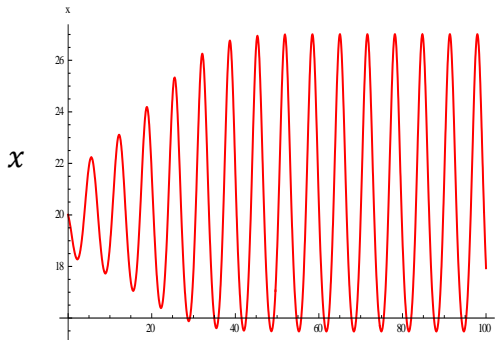
Tabel 2
Pemilihan nilai waktu tunda model pertama

k	τ_k^+	τ_k^-
0	0.6390	-1.6103
1	7.4913	15.6562
2	14.3437	32.9227
3	21.1960	50.1892
4	28.0483	67.4557

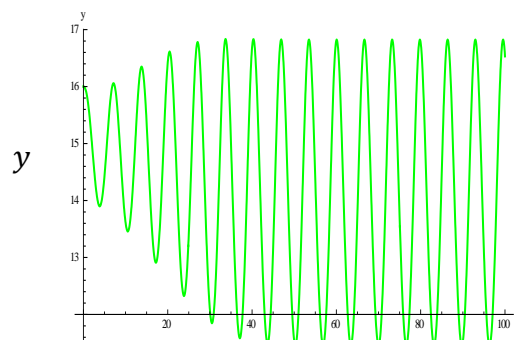
Menurut Teorema Kar [4], titik tetap $A_2 = (20,15)$ dikatakan stabil ketika $\tau \in (0, 0.6390) \cup (-1.6103, 7.4913)$.



Gambar 4 Bidang fase model pertama saat $\tau = 0.7$



Gambar 5 Bidang solusi mangsa model pertama saat $\tau = 0.7$



Gambar 6 Bidang solusi pemangsa model pertama saat $\tau = 0.7$

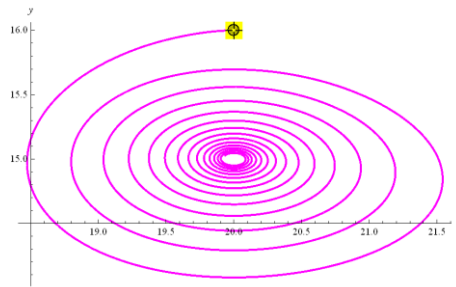
Gambar 4 memperlihatkan *limit cycle* dan menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak secara spiral menjauhi titik tetap A_2 . Gambar 5 dan 6 menunjukkan kedua populasi terjadi osilasi terus menerus. Oleh karena itu, semakin besar nilai waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidakstabilan terhadap pertumbuhan.

Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 2 saat $\tau = 0.7$

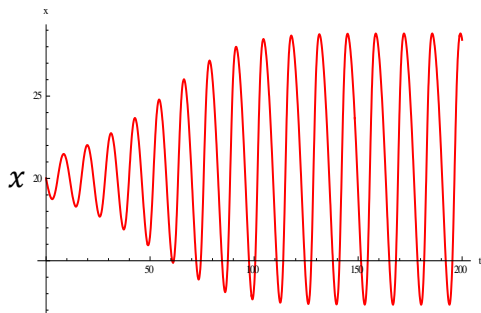
Titik tetap yang diperoleh ada tiga, terdapat pada Tabel 1. Untuk memenuhi teorema, maka dilakukan pemilihan nilai waktu tunda sebagai berikut

Tabel 3
Pemilihan nilai waktu tunda model kedua

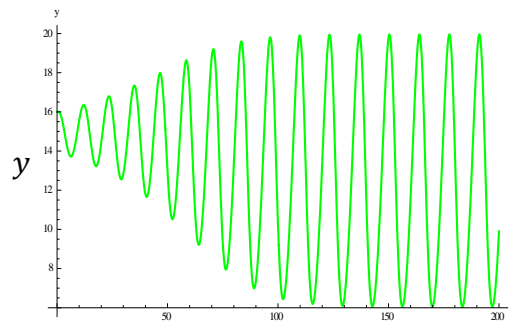
k	τ_k^+
0	0.5069
1	11.6131
2	22.7193
3	33.8255
4	44.9317



Gambar 7 Bidang fase model kedua saat $\tau = 0.7$



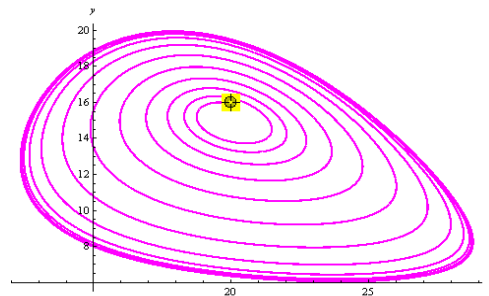
Gambar 8 Bidang solusi mangsa model kedua saat $\tau = 0.7$



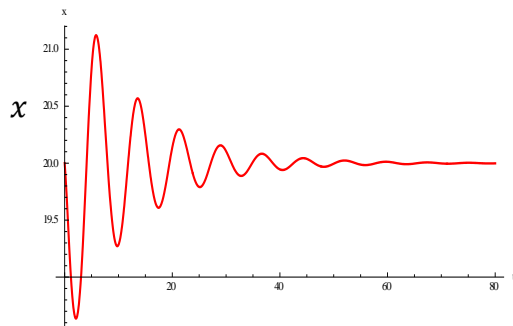
Gambar 9 Bidang solusi pemangsa model kedua saat $\tau = 0.7$

Gambar 7 memperlihatkan *limit cycle* dan menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak secara spiral menjauhi titik tetap A_4 . Gambar 8 dan 9 menunjukkan kedua populasi terjadi osilasi terus menerus. Oleh karena itu, semakin besar nilai waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidakstabilan terhadap pertumbuhan.

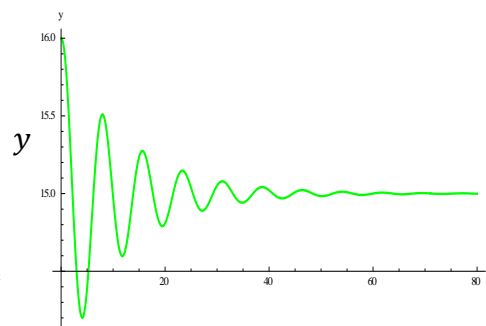
Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 1 saat $\tau = 0.5$



Gambar 10 Bidang fase model pertama saat $\tau = 0.5$



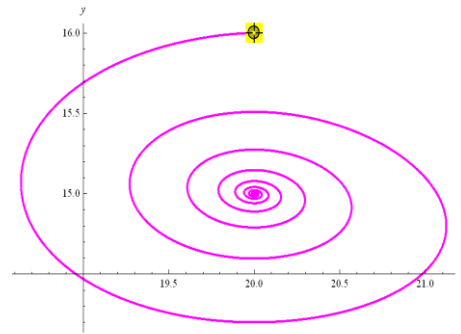
Gambar 11 Bidang solusi mangsa model pertama saat $\tau = 0.5$



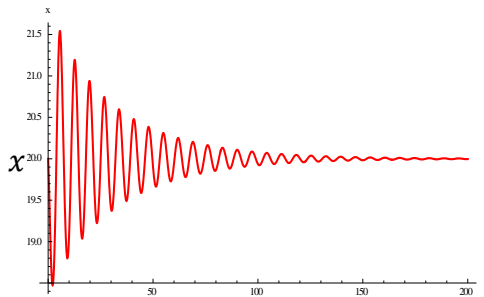
Gambar 12 Bidang solusi pemangsa model pertama saat $\tau = 0.5$

Gambar 10 menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap A_2 . Gambar 11 memperlihatkan bahwa di awal populasi mangsa model pertama, mengalami penurunan setelah itu kenaikan yang drastis. Kemudian, pertumbuhan mangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan mangsa menuju $x = 20$. Gambar 12 memperlihatkan bahwa di awal waktu populasi pemangsa mengalami penurunan yang drastis setelah itu kenaikan. Kemudian, pertumbuhan pemangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan pemangsa menuju $y = 15$. Terlihat pula pada Gambar 10 kerapatan spiral kecil, menandakan bahwa terjadi sedikit osilasi tetapi cepat menuju kestabilan pada populasi mangsa dan pemangsa.

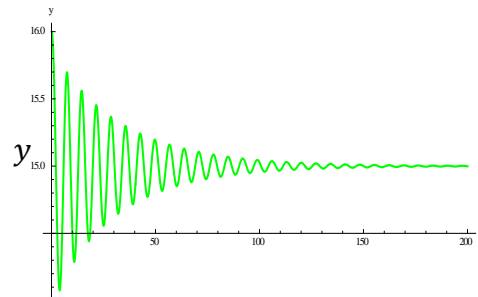
Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 1 saat $\tau = 0.6$



Gambar 13 Bidang fase model pertama saat $\tau = 0.6$



Gambar 14 Bidang solusi mangsa model pertama saat $\tau = 0.6$

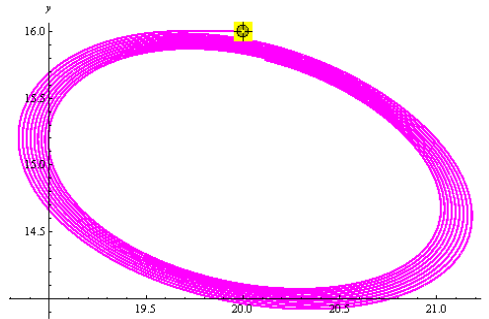


Gambar 15 Bidang solusi pemangsa model pertama saat $\tau = 0.6$

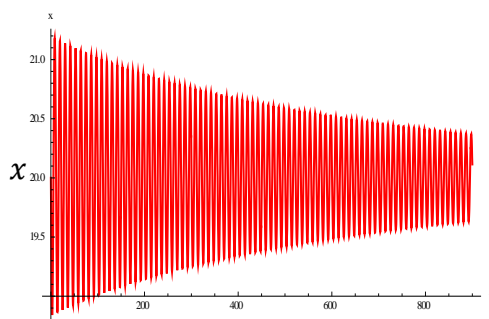
Gambar 13 menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap A_2 . Gambar 14 memperlihatkan bahwa di awal populasi mangsa model pertama, mengalami penurunan setelah itu kenaikan yang drastis. Kemudian, pertumbuhan mangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan mangsa menuju $x = 20$. Gambar 15 memperlihatkan bahwa di awal waktu populasi pemangsa mengalami penurunan yang drastis setelah itu kenaikan. Kemudian, pertumbuhan pemangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan pemangsa menuju $y = 15$. Terlihat pula pada Gambar 13 kerapatan spiral sedang, menandakan bahwa terjadi banyak osilasi dan dibutuhkan waktu lama untuk menuju kestabilan pada populasi mangsa dan pemangsa.

Kemunculan *limit cycle* pada Gambar 4 menunjukkan bahwa terjadi bifurkasi Hopf superkritis, disebabkan karena perubahan kestabilan dari keadaan stabil saat $\tau = 0.6$ menjadi tidak stabil saat $\tau = 0.7$.

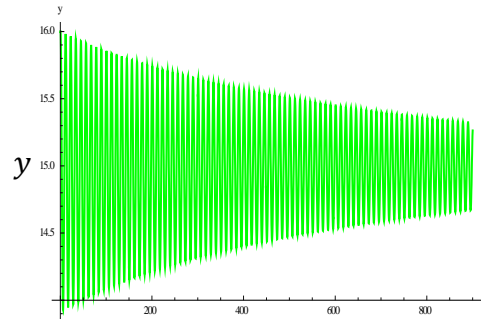
Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 2 saat $\tau = 0.5$



Gambar 16 Bidang fase model kedua saat $\tau = 0.5$



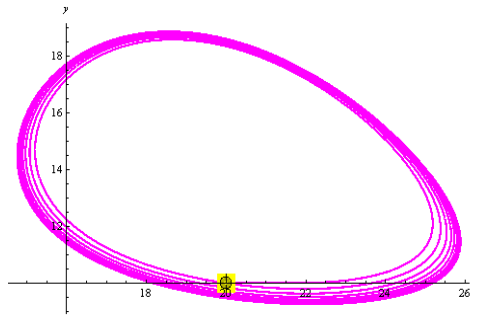
Gambar 17 Bidang solusi mangsa model kedua saat $\tau = 0.5$



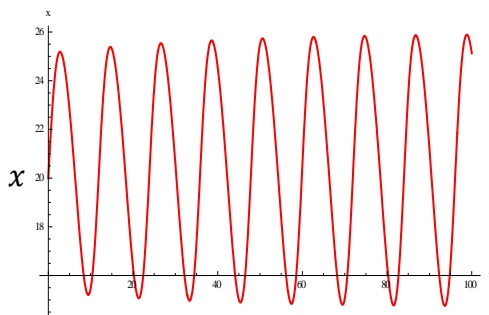
Gambar 18 Bidang solusi pemangsa model kedua saat $\tau = 0.5$

Gambar 16 menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap A_4 . Gambar 17 memperlihatkan bahwa di awal populasi mangsa model pertama, mengalami penurunan setelah itu kenaikan yang drastis. Kemudian, pertumbuhan mangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan mangsa menuju $x = 20$. Gambar 18 memperlihatkan bahwa di awal waktu populasi pemangsa mengalami penurunan yang drastis setelah itu kenaikan. Kemudian, pertumbuhan pemangsa mengalami osilasi namun semakin lama simpangannya semakin kecil menyebabkan kestabilan pemangsa menuju $y = 15$. Terlihat pula pada Gambar 16 kerapatan spiral tinggi, menandakan bahwa terjadi banyak osilasi dan dibutuhkan waktu lama untuk menuju kestabilan pada populasi mangsa dan pemangsa.

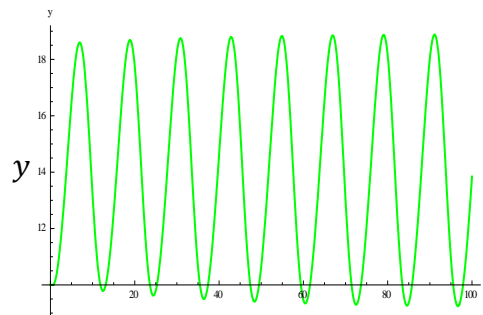
Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa Model 2 saat $\tau = 0.6$



Gambar 19 Bidang fase model kedua saat $\tau = 0.6$



Gambar 20 Bidang solusi mangsa model kedua saat $\tau = 0.6$



Gambar 21 Bidang solusi pemangsa model kedua saat $\tau = 0.6$

Gambar 19 memperlihatkan *limit cycle* dan menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol \oplus bahwa kurva bergerak secara spiral menjauhi titik tetap A_4 . Gambar 20 dan 21 menunjukkan kedua populasi terjadi osilasi terus menerus. Oleh karena itu, semakin besar nilai waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidakstabilan terhadap pertumbuhan.

Kemunculan *limit cycle* pada Gambar 19 menunjukkan bahwa terjadi bifurkasi Hopf superkritis, disebabkan karena perubahan kestabilan dari keadaan stabil saat $\tau = 0.5$ menjadi tidak stabil saat $\tau = 0.6$.

SIMPULAN

Dari model mangsa pemangsa dengan tingkat pemanenan konstan dan tanpa waktu tunda diperoleh tiga titik tetap positif di setiap model. Pada model mangsa-pemangsa tipe Gause yang diperumum 1 dan 2, kestabilan titik tetap pertama dan kedua bersifat tak terisolasi, sedangkan titik tetap ketiga bersifat spiral stabil. Dinamika populasi mangsa-pemangsa pada model juga dipengaruhi oleh waktu tunda dalam masa kelahiran untuk kestabilan titik tetap. Waktu tunda yang didapat pada model mangsa pemangsa tipe Gause yang diperumum 1 lebih besar dibandingkan dengan model mangsa pemangsa tipe Gause yang diperumum 2. Perubahan parameter waktu tunda dari kecil ke besar menyebabkan perubahan

kestabilan titik tetap dari stabil menjadi tidak stabil. Hal ini menandakan bahwa pada model mangsa-pemangsa dengan tingkat pemanenan konstan dan waktu tunda menyebabkan terjadinya bifurkasi Hopf superkritis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bacaer N. 2011. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. New York (US): Springer-Verlag.
- [2] Beretta E, Kuang Y. 1996. Convergence Results in a Well-Known Delayed Predator-Prey System. *J. Math. Anal. Appl.* 204:840-853. doi:10.1006/jmaa.1996.0471.
- [3] Hasannudin. 2015. Perilaku Dinamis Model Mangsa-Pemangsa Tipe Gause yang Diperumum dengan Waktu Tunda Pemanenan Konstan [skripsi]. Bogor (ID): Institut Pertanian Bogor.
- [4] Kar TK. 2003. Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*. **38**:449-458. doi:10.1016/S0895-7177(03)00232-2.
- [5] Martin A, Ruan S. 2001. Predator-Prey Models with Delay and Prey Harvesting. *J. Math. Biol.* **43**:247-267. doi:10.1007/s002850100095.
- [6] Ruan S. 2009. On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay. *Math. Model. Nat. Phenom.* **4**:140-188. doi:10.1051/mmnp/20094207.