

# Analisis Entropi *Entanglement* pada Sistem Kuantum Model Dicke

Rohma Yuliani, I Wayan Sudiarta\*, Lily Maysari Angraini

Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram

Email korespondensi : wayan.sudiarta@unram.ac.id

DOI: <https://doi.org/10.20527/flux19i3.11265>

Submitted: 04 Agustus 2021; Accepted: 24 Juni 2022

**ABSTRAK-** *Entanglement* merupakan sifat keterikatan antar partikel pada suatu sistem kuantum. Ukuran keterikatannya dapat diketahui dengan mencari nilai entropi *entanglement* pada sistem tersebut. Sistem kuantum yang digunakan pada penelitian ini adalah Sistem Kuantum Model Dicke yang terdiri dari medan radiasi elektromagnetik mode tunggal dan N-atom dua level. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh konstanta kopling terhadap entropi *entanglement* dan dinamika sistem. Simulasi dinamika sistem dilakukan dengan menggunakan modul *Quantum Toolbox in Python* (QuTiP). Hasil simulasi menunjukkan bahwa konstanta kopling berpengaruh signifikan terhadap nilai entropi *entanglement*. Semakin besar nilai konstanta kopling yang digunakan maka nilai entropi *entanglement* akan meningkat. Selain itu terdapat nilai entropi *entanglement* maksimum untuk N lebih besar dari satu. Konstanta kopling juga berpengaruh terhadap dinamika sistem yaitu semakin besar nilai konstanta kopling maka semakin banyak keadaan kuantum yang dapat dicapai oleh atom.

**KATA KUNCI:** *dinamika sistem kuantum model dicke; entropi entanglement; konstanta kopling; QuTiP.*

**ABSTRACT-** *Entanglement* is a property of interacting particles in a quantum system. The measure of the interaction can be known by looking for the entanglement entropy value in the system. The quantum system used in this study is the Dicke model quantum system which consists of a single-mode electromagnetic radiation field and a two-level N-atom. This study aims to determine the influence of the coupling constant on *entanglement entropy* and system dynamics. Simulation of system dynamics is carried out with the *Quantum Toolbox in Python* (QuTiP) module. The simulation results show that the coupling constant has a significant effect on the entanglement entropy value. The greater the value of the coupling constant used, the entanglement entropy value increases. In addition, there is a maximum *entanglement* entropy value for N greater than one. The coupling constant also affects the dynamics of the system, that is, the greater the value of the coupling constant, the more quantum states that can be accessed by atoms.

**KEYWORDS :** *the dynamics of the dicke model quantum system; entanglement entropy; coupling constant; QuTiP.*

## PENDAHULUAN

Sistem kuantum dapat dibagi menjadi dua jenis sistem yaitu sistem kuantum tertutup dan sistem kuantum terbuka. Salah satu contoh sistem yang merupakan sistem kuantum terbuka yaitu sistem kuantum model Dicke. Sistem kuantum ini mendeskripsikan interaksi antara medan radiasi elektromagnetik mode banyak dan sistem N-atom dua level (Peng & Li, 1998). Pada penelitian ini, sistem kuantum

model Dicke terdiri dari sebuah medan radiasi elektromagnetik mode tunggal yang berinteraksi dengan N-atom di dalam rongga. Interaksi foton dan atom di dalam rongga menyebabkan munculnya sebuah fenomena yang disebut dengan *entanglement* (Gerry & Knight, 2005).

*Entanglement* merupakan sifat keterikatan antar partikel. *Entanglement* sangat penting dalam pengiriman informasi (Bennett &

DiVincenzo, 2000), kuantum teleportasi, dan sebagai dasar dari penerapan komputer kuantum yang sedang dikembangkan saat ini (Nielsen & Chuang, 2012). Beberapa sifat fisis dapat mempengaruhi perhitungan *entanglement*, yaitu: suhu, kekuatan interaksi dan medan magnet (Nielsen, 2000). Kekuatan interaksi dipengaruhi oleh konstanta kopling sistem (Johansson, 2014). Adapun untuk mengetahui ukuran *entanglement* dari suatu sistem dapat diketahui dengan mencari entropi *entanglement*.

Entropi *entanglement* dapat diketahui dengan menggunakan entropi von Neumann. Entropi *entanglement* pada sistem kuantum model Dicke dipengaruhi oleh jumlah atom yang berinteraksi dan konstanta kopling. Semakin banyak jumlah atom yang berinteraksi maka sistem berada pada ketidakpastian yang semakin meningkat, sehingga entropi *entanglement* sistem juga meningkat. Entropi *entanglement* meningkat seiring meningkatnya nilai konstanta kopling, dan menuju nilai maksimum pada nilai konstanta kopling tertentu (Lambert et al., 2004).

Beberapa modul yang dapat membantu mensimulasikan dinamika sistem kuantum terbuka seperti sistem kuantum model Dicke antara lain: QuantumOptics.jl (Krämer et al., 2018). *Quantum Optic Toolbox* (QO-Toolbox), dan *Quantum Toolbox in Python* (QuTiP) (Johansson et al., 2012). QuantumOptics.jl menggunakan bahasa Julia yang belum umum digunakan. Dari segi waktu komputasi, QuTiP lebih cepat mensimulasikan dibandingkan dengan menggunakan QO-Toolbox (Johansson et al., 2012). Penggunaan QuTiP dalam mensimulasikan dinamika sistem kuantum terbuka memiliki beberapa keuntungan diantaranya QuTiP bersifat *open source* yang artinya bebas dicapai, tidak perlu meng-*compile* coding karena menggunakan bahasa pemrograman Python, mendukung simulasi untuk Hamiltonian yang bergantung waktu dan mampu membuat plot dan animasi dengan kualitas tinggi menggunakan modul Matplotlib (Nation et al., 2020).

Berdasarkan uraian diatas, maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengaruh konstanta kopling terhadap entropi *entanglement* dan dinamika sistem kuantum model Dicke menggunakan *Quantum Toolbox in Python* (QuTiP).

Bentuk Hamiltonian sistem kuantum model Dicke untuk medan radiasi elektromagnetik mode tunggal yaitu

$$H = \omega_0 \hat{J}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{g}{\sqrt{N}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) \quad (1)$$

suku pertama Pers. (1) merupakan Hamiltonian atom yang dipengaruhi oleh frekuensi atom ( $\omega_0$ ) dan komponen arah z operator momentum angular ( $\hat{J}_z$ ). Suku kedua merupakan Hamiltonian medan radiasi elektromagnetik yang dipengaruhi oleh frekuensi foton ( $\omega$ ), dengan  $\hat{a}^\dagger$  merupakan operator *creator* (pencipta) dan  $\hat{a}$  merupakan operator *annihilation* (pemusnah). Sedangkan suku ketiga menjelaskan Hamiltonian kontribusi interaksi antara atom dan medan radiasi elektromagnetik yang bergantung pada jumlah atom ( $N$ ), kopling atom-foton ( $g$ ), operator penaikan ( $\hat{J}_+$ ), dan operator penurunan ( $\hat{J}_-$ ).

$$\hat{J}_z = \sum_{i=1}^N \hat{S}_z^{(i)} \hat{J}_\pm = \sum_{i=1}^N \hat{S}_\pm^{(i)} \quad (2)$$

Entropi *entanglement* dihitung menggunakan entropi von Neumann (Nielsen & Chuang, 2012) berikut ini.

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr}\{\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}\} \quad (3)$$

dengan  $\hat{\rho}$  merupakan *density matrix* yang berbentuk

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi^{(i)}\rangle \rho_i \langle \psi^{(i)}| \quad (4)$$

Entropi dapat bernilai maksimum ketika ketidakpastian bernilai maksimum yang ditandai dengan nilai probabilitas bernilai sama (Sudiarta, 2012).

Untuk mensimulasikan dinamika sistem kuantum model Dicke, dilakukan perhitungan nilai ekpektasi dari atom dan foton

menggunakan Pers. (5) dan Pers. (6) secara berturut-turut.

$$\langle J_+ J_- \rangle \quad (5)$$

$$\langle a^+ a \rangle \quad (6)$$

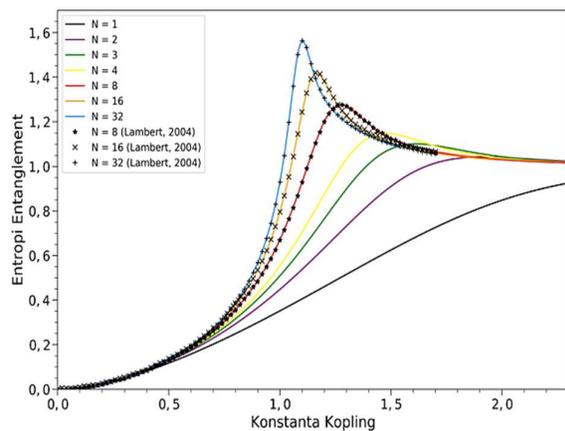
## METODE PENELITIAN

Simulasi pada penelitian ini dilakukan dengan seperangkat laptop merek HP (spesifikasi prosesor Core i5-2540M, CPU 2.60 GHz, RAM 4.00 GB) yang dilengkapi dengan bahasa pemrograman Python 3.7.4, Jupyter Notebook, Engauge Digitizer dan modul QuTiP versi 4.4.1. Kode program utama dapat didapatkan pada <https://github.com/rohmayuliani16/Entanglement>.

Pada setiap simulasi, konstanta kopling sebesar 0,50, 1,28, dan 2,00 serta keadaan awal dari foton yaitu 1 foton  $n = 1$  dan keadaan awal atom berada pada keadaan dasar (*ground state*) digunakan. Interaksi foton dengan delapan atom menghasilkan sembilan keadaan kuantum yang dapat dicapai oleh atom. Untuk memudahkan notasi, sembilan keadaan kuantum itu direpresentasikan secara berturut-turut oleh  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle, |7\rangle, |8\rangle$  sesuai urutan energinya.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil perhitungan entropi *entanglement* untuk berbagai jumlah atom yang dipengaruhi oleh nilai konstanta kopling ditunjukkan pada Gambar 1.



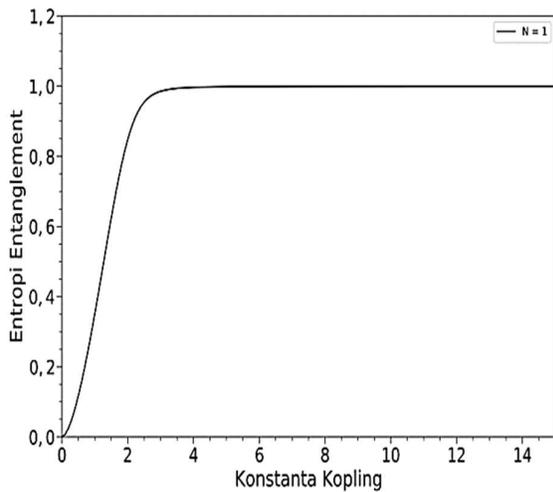
**Gambar 1** Pengaruh konstanta kopling terhadap entropi *entanglement* sistem kuantum model Dicke dengan garis merupakan hasil perhitungan dan simbol (+, x, \*) merupakan data dari Lambert (2004)

Untuk memvalidasi program yang digunakan, dilakukan perbandingan hasil yang diperoleh pada penelitian ini dengan hasil Lambert et al., 2004.

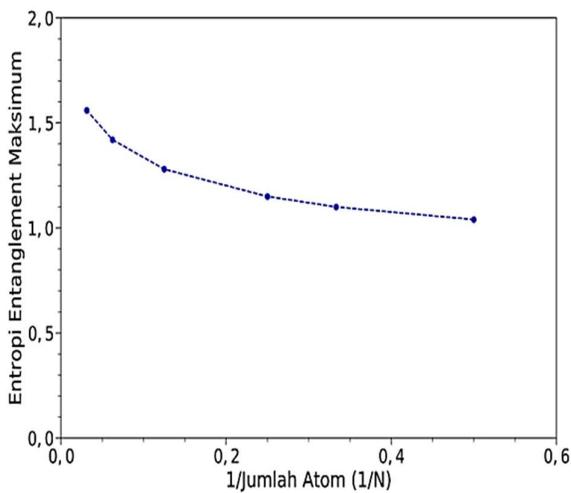
Tampak pada Gambar 1, untuk N berjumlah 8, 16, dan 32, hasil yang diperoleh sesuai dengan hasil referensi. Nilai entropi *entanglement* bergantung pada jumlah atom dan nilai konstanta kopling. Secara garis besar, entropi *entanglement* meningkat seiring peningkatan nilai konstanta kopling. Peningkatan ini diakibatkan oleh interaksi antar atom yang semakin tinggi. Untuk  $N = 1$ , nilai entropi *entanglement* yang diperoleh yaitu meningkat secara monoton. Hal ini dikarenakan hanya ada satu atom yang berinteraksi, sehingga tidak adanya nilai entropi *entanglement* maksimum, dengan kata lain tidak ada fenomena *entanglement*. Apabila nilai konstanta kopling ditingkatkan untuk  $N = 1$ , maka diperoleh nilai entropi *entanglement* bernilai 1 seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2. Akan tetapi, pada  $N \geq 2$  terdapat nilai maksimum entropi *entanglement* pada kisaran nilai  $g = 1,00$  hingga  $g = 2,00$ . Untuk nilai  $N = 32$ , nilai entropi *entanglement* maksimum sama dengan 1,56. Sedangkan nilai konstanta kopling ketika nilai entropi *entanglement* maksimum untuk N besar yaitu menuju angka 1. Kedua nilai ini secara berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4.

Nilai entropi *entanglement* dapat dianalisis melalui dinamika sistem kuantum model Dicke. Hasil simulasi dinamika interaksi foton dan atom dalam rongga untuk kasus delapan atom dengan berbagai nilai konstanta kopling dapat dilihat pada Gambar 5. Keadaan  $|1\rangle$  dan  $|0\rangle$  merupakan keadaan awal foton dan atom yang digunakan dengan waktu yang ditampilkan yaitu  $t = 0$  hingga 30 dan nilai  $g = 0,50; 1,28; 2,00$ .

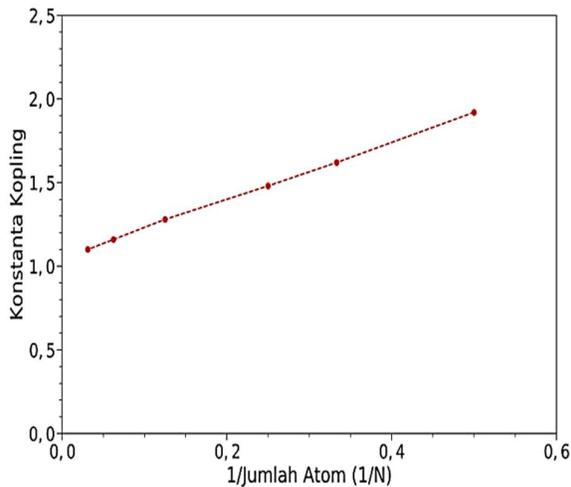
Gambar 5 (a) memperlihatkan bahwa pada saat  $t = 0$  atom berada pada keadaan  $|0\rangle$ . Ini ditandai dengan terbentuknya probabilitas keadaan  $|0\rangle$  bernilai satu. Atom tersebut memiliki kemungkinan untuk mengakses enam keadaan kuantum (keadaan  $|0\rangle$  hingga  $|5\rangle$ ) dari total sembilan keadaan kuantum



Gambar 2 Nilai entropi *entanglement* untuk  $N = 1$



Gambar 3 Nilai entropi *entanglement* maksimum untuk  $N = 2, 3, 4, 8, 16, \text{ dan } 32$

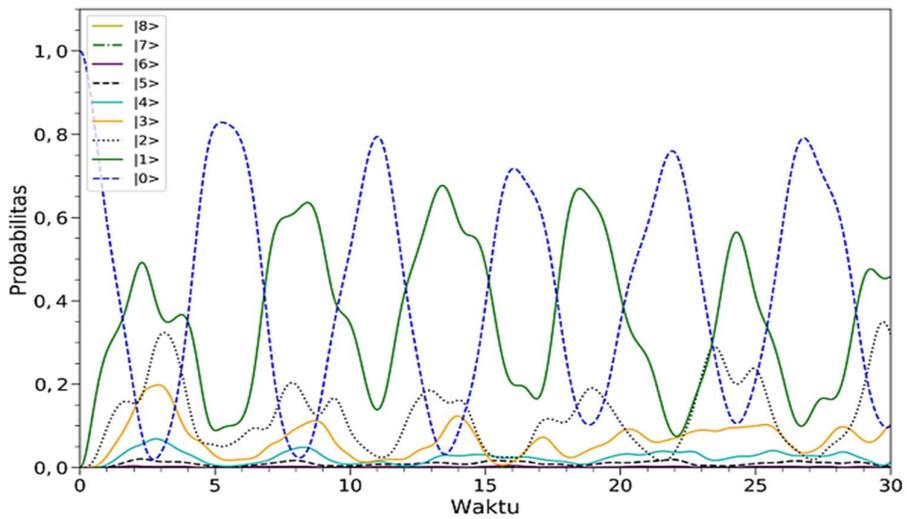


Gambar 4 Nilai konstanta kopling untuk  $N = 2, 3, 4, 8, 16, \text{ dan } 32$  ketika nilai entropi *entanglement* maksimum

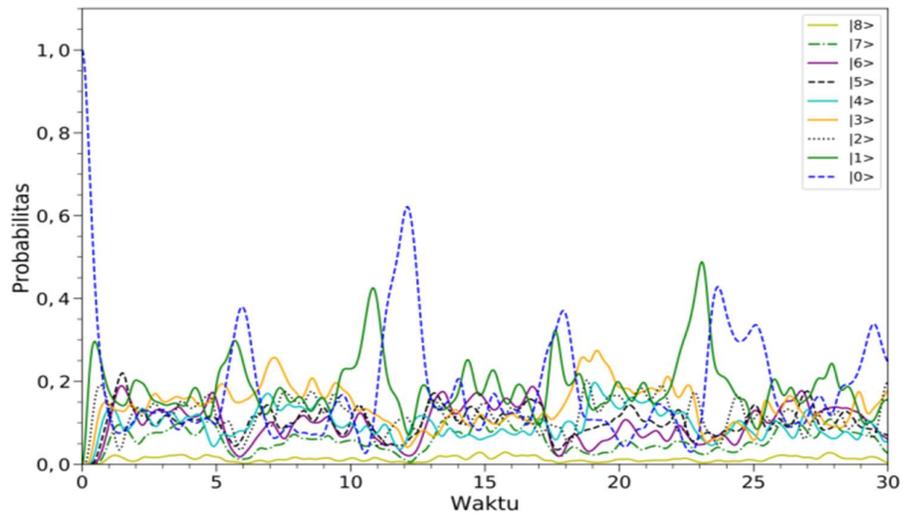
sesuai dengan hasil osilasi yang diperoleh. Hal ini dikarenakan nilai konstanta kopling yang digunakan kecil yaitu 0,50. Sedangkan Gambar 5 (b) dan Gambar 5 (c) menggunakan konstanta kopling sebesar 1,28 dan 2,00. Nilai konstanta ini menyebabkan diperolehnya keadaan kuantum yang dapat dicapai oleh atom lebih banyak yaitu keadaan  $|0\rangle$  hingga  $|8\rangle$  sesuai osilasi yang diperoleh. Dari hasil yang diperoleh pada Gambar 5 ini menunjukkan bahwa semakin besar konstanta kopling yang digunakan maka semakin banyak keadaan kuantum yang dapat dicapai oleh atom. Selain itu diperoleh juga bahwa, semakin besar nilai probabilitas menunjukkan semakin besar kemungkinan atom untuk mengakses keadaan tersebut.

Nilai entropi *entanglement* yang diperoleh ketika menggunakan  $g = 0,50; 1,28; \text{ dan } 2,00$  secara berturut-turut yaitu sebesar 0,13; 1,28; dan 1,03. Dari nilai tersebut tampak bahwa, nilai  $g = 1,28$  memiliki nilai entropi *entanglement* yang paling tinggi dibandingkan dengan nilai  $g$  yang lain. Nilai entropi *entanglement* sebesar 1,28 ini dapat dianalisis berdasarkan hasil osilasi foton dalam rongga. Untuk lebih jelasnya, perbandingan hasil osilasi foton dalam rongga untuk nilai  $g = 0,50; 1,28; \text{ dan } 2,00$  ditampilkan pada Gambar 6.

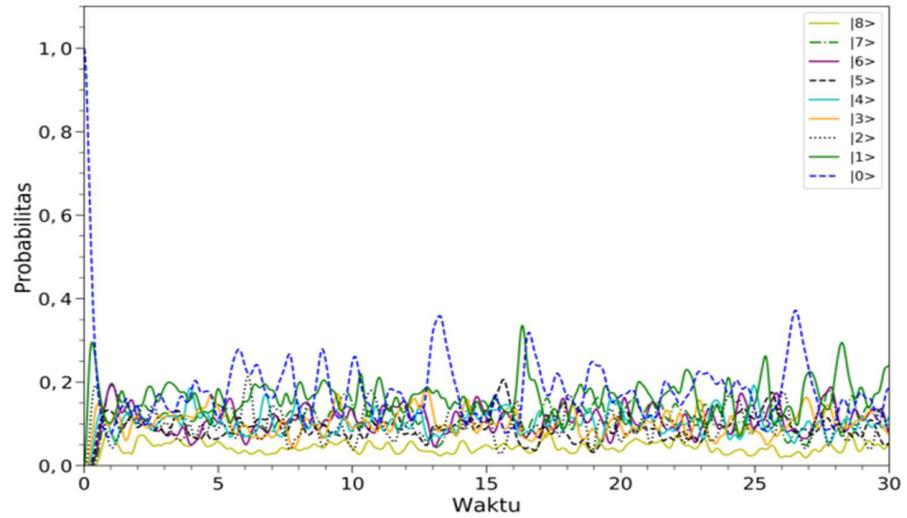
Nilai probabilitas okupasi hasil osilasi foton pada Gambar 6 menunjukkan jumlah foton yang terdapat dalam rongga. Untuk nilai  $g = 0,50$ , terlihat bahwa probabilitas dari foton dalam rongga berada pada kisaran 0,49 hingga 1,48. Hasil probabilitas tersebut sebagai akibat dari pertukaran energi antara foton dalam rongga dan enam keadaan kuantum. Untuk nilai  $g = 1,28$ , nilai probabilitas dari foton berkisar pada nilai 1,0 hingga 16,23. Sedangkan untuk  $g = 2,00$ , diperoleh nilai probabilitas foton dalam rongga berkisar pada nilai 1,0 hingga 14,03. Nilai probabilitas untuk  $g = 1,28$  dan  $g = 2,00$  yang diperoleh ini sebagai akibat dari pertukaran energi antara foton dalam rongga dan sembilan keadaan kuantum. Berdasarkan teori, nilai entropi akan bernilai maksimum ketika nilai ketidakpastian bernilai



(a)

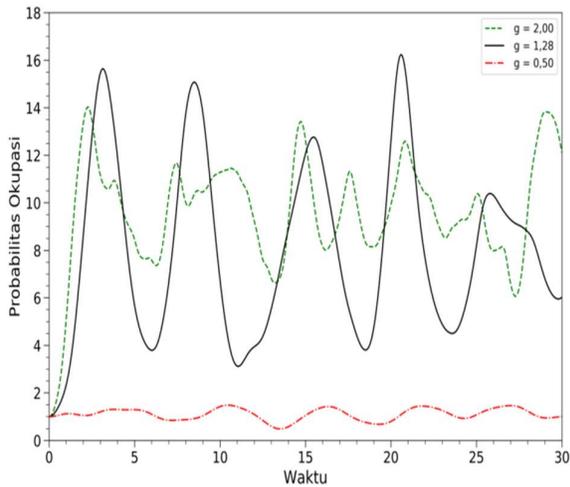


(b)



(c)

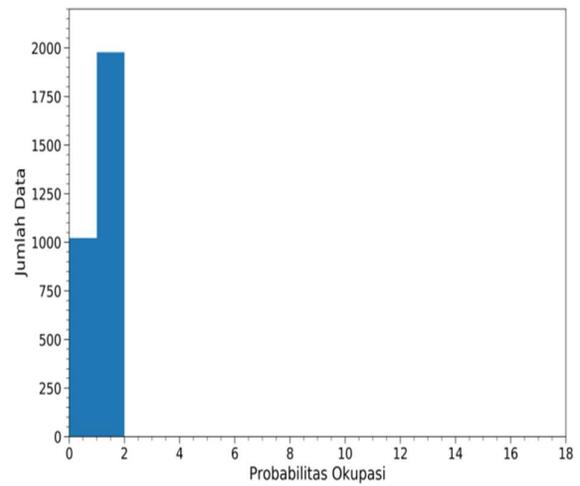
Gambar 5 Osilasi keadaan kuantum dengan jumlah  $N = 8$  dan keadaan awal foton =  $|1\rangle$ , atom =  $|0\rangle$ , (a)  $g = 0,50$ , (b)  $g = 1,28$ , (c)  $g = 2,00$



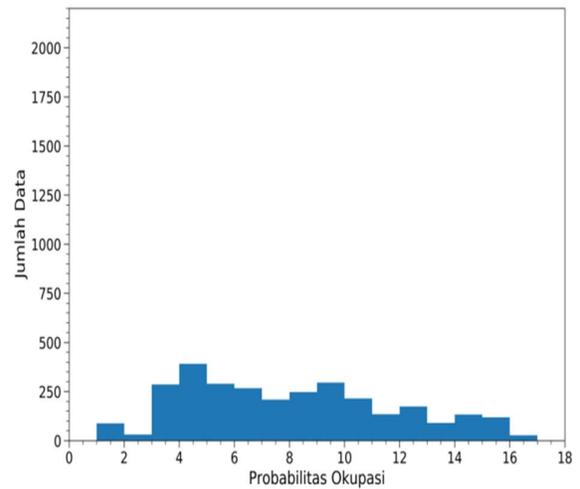
**Gambar 6** Perbandingan hasil osilasi foton dalam rongga untuk  $N = 8$  dengan keadaan awal foton yaitu  $|1\rangle$

maksimum atau ketika nilai probabilitas bernilai sama. Namun osilasi foton dalam rongga ini belum memberikan informasi jumlah data probabilitas, sehingga perlu ditampilkan histogram jumlah data probabilitas foton dalam rongga seperti yang terlihat pada Gambar 7.

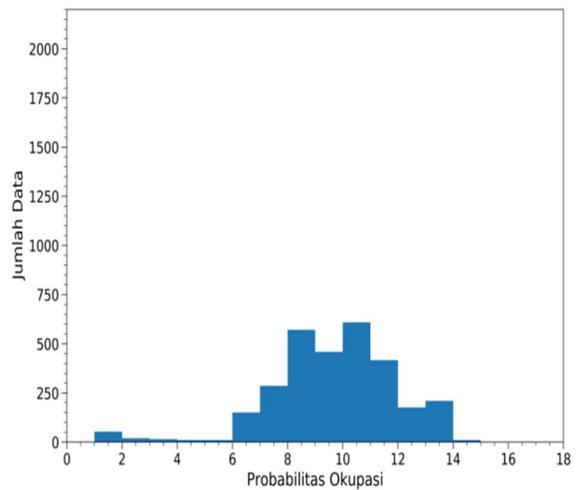
Berdasarkan Gambar 7 (a) untuk  $g = 0,50$ , data probabilitas foton dalam rongga berada pada kisaran 0,0 hingga 2,0. Sedangkan menggunakan  $g = 2,00$  (Gambar 7 (c)) data probabilitas foton dalam rongga berada pada kisaran 1,0 hingga 15,0, namun datanya banyak pada kisaran 8,0 hingga 12,0. Kedua hasil tersebut menunjukkan bahwa jumlah data probabilitas banyak berada pada nilai probabilitas tertentu. Berbeda ketika menggunakan  $g = 1,28$ , jumlah data probabilitas foton dalam rongga berada pada kisaran 1,0 hingga 17,0 dengan sebaran data yang hampir sama jika dibandingkan dengan  $g$  yang lain. Artinya bahwa ketika  $g = 1,28$  dengan data probabilitas yang hampir sama menunjukkan ketidakpastian maksimum yang menyebabkan nilai entropi *entanglement* bernilai maksimum. Dari hasil analisis ini dapat dibuktikan bahwa dengan  $g = 1,28$  diperoleh nilai entropi *entanglement* bernilai maksimum untuk delapan atom.



(a)



(b)



(c)

**Gambar 7** Histogram nilai probabilitas foton dalam rongga dengan (a)  $g = 0,50$ , (b)  $g = 1,28$ , (c)  $g = 2,00$ , dan keadaan awal foton yaitu  $|1\rangle$

## KESIMPULAN

Pengaruh konstanta kopling terhadap entropi *entanglement* sistem kuantum model Dicke yaitu semakin besar nilai konstanta kopling yang digunakan menyebabkan nilai entropi *entanglement* meningkat dan terdapat nilai entropi *entanglement* maksimum pada nilai konstanta kopling tertentu untuk beberapa jumlah atom, sedangkan pengaruh konstanta kopling terhadap dinamika sistem kuantum model Dicke yaitu semakin besar nilai konstanta kopling yang digunakan menyebabkan semakin banyak keadaan kuantum yang dapat dicapai oleh atom.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada dosen Fisika yang telah membantu dalam menyelesaikan penelitian ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bennett, C. H., & DiVincenzo, D. P. (2000). Quantum information and computation. *Nature*, 404(6775), 247–255. <https://doi.org/10.1038/35005001>
- Gerry, C., & Knight, P. (2005). *Introductory Quantum Optics (1)*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Johansson, J. R. (2014). *QuTiP lecture: The Dicke model*. <https://github.com/jrjohansson/qutip-lectures/blob/master/Lecture-3A-Dicke-model.ipynb>
- Johansson, J. R., Nation, P. D., & Nori, F. (2012). QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 183(8), 1760–1772. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.021>
- Krämer, S., Plankensteiner, D., Ostermann, L., & Ritsch, H. (2018). QuantumOptics.jl: A Julia framework for simulating open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 227, 109–116. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2018.02.004>
- Lambert, N., Emary, C., & Brandes, T. (2004). Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance. *Physical Review Letters*, 92(7), 073602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.073602>
- Nation, P. D., Pitchford, A., Grimsmo, A., Johansson, J. R., Grenade, C., Shammah, N., Ahmed, S., Lambert, N., & Giguere, E. (2020). *QuTiP: Quantum Toolbox in Python (4.5)*. Numfocus Open Code Better Science. <https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.1110.0573>
- Nielsen, M. A. (2000). *Quantum information theory*. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0011036>
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2012). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>
- Peng, J.-S., & Li, G.-X. (1998). *Introduction to Modern Quantum Optics*. WORLD SCIENTIFIC. <https://doi.org/10.1142/3770>
- Sudiarta, I. W. (2012). *Catatan Kuliah Fisika Statistik (1)*. Universitas Mataram.