

Relasi Inklusi Klas Barisan p -Supremum Bounded Variation Sequences

Moch. Aruman Imron¹, Ch. Rini Indrati², Widodo³

¹ Jurusan Matematika, FMIPA,
 Universitas Brawijaya
 e-mail : maimr@ub.ac.id

^{1,2,3} Sekolah Pasca Sarjana, Matematika,
 Universitas Gadjah Mada

Abstrak— Pada paper ini dibahas konstruksi klas barisan p -Supremum Bounded Variation Sequences yang merupakan generalisasi dari klas Supremum Bounded Variation Sequences (SBVS). Kemudian konstruksi yang didapat diselidiki relasi inklusi dari klas tersebut.

Kata Kunci— Klas barisan, p -Supremum Bounded Variation Sequences, Relasi Inklusi.

1 PENDAHULUAN

Dalam analisis Fourier, sifat-sifat koefisien deret Fourier pertama kali dibahas oleh Chaundy dan Jolliffe [2] dan koefisien-koefisien tersebut dikenal dengan nama klas MS (*Monotone sequences*). Kemudian beberapa peneliti seperti Leindler [7], Tikhonov [11] dan Zhou [8][12] berturut-turut memperlemah syarat kemonotonan Klas MS ke dalam klas $RBVS$ (*Rest Bounded Variation Sequences*), GMS (*General Monotone Sequences*) dan $GBVS$ (*Group Bounded Variation Sequences*).

Lebih lanjut Zhou et al. [13] berhasil membuktikan bahwa generalisasi klas kemonotonan merupakan klas $MVBVS$ (*Mean Value Bounded Variation Sequences*). Lebih lanjut diperoleh $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS$. Jika syarat kemonotonan di dalam klas $MVBVS$ diperlemah lagi maka kekonvergenan seragam deret Fourier tidak terjamin. Namun demikian Feng dan Zhou [3] dapat menunjukkan bahwa $MVBVS$ dapat diperlemah menjadi klas GM_7 . Dalam perkembangan yang lain ternyata Korus [6] juga berhasil membuktikan bahwa klas $MBVS$ dapat diperlemah menjadi klas $SBVS$ (*Supremum Bounded Variation Sequences*) dan klas $SBVS_2$. Menurut Feng dan Zhou [3] GM_7 sama dengan $SBVS$, walaupun nampak mirip Korus [6] berhasil membuktikan bahwa $SBVS$ sebagai klas yang berbeda dengan GM_7 tetapi sama-sama memuat klas $MBVS$. Kemudian klas $SBVS$ dan $SBVS_2$ tetap mempertahankan sifat kekonvergenan seragam pada deret Fourier dan memenuhi relasi $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS \subsetneq SBVS \subsetneq SBVS_2$. Definisi klas $SBVS$ dan $SBVS_2$ sebagai berikut:

Definisi 1.1. Barisan $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ disebut anggota klas $SBVS$ (*Supremum Bounded Variation Sequences*) jika terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$, sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} |a_k| \right)$$

dengan $[x]$ bagian bulat dari x .

Definisi 1.2. Barisan $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ disebut anggota klas $SBVS_2$ jika terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ dengan $b(k) \rightarrow \infty$ untuk $k \rightarrow \infty$ dan monoton naik sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |a_k| \right).$$

Kemudian Liflyand dan Tikhonov [9, 10] mengembangkan klas GMS ke \mathcal{GMS}_p (p - general monotone sequences) yang terdiri dari kemonotonan barisan bilangan, dengan definisi berikut :

Definisi 1.3. Diberikan $\alpha = \{\alpha_n\}$ dan $\beta = \{\beta_n\}$ masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(\alpha, \beta) \in \mathcal{GMS}_p$, jika terdapat konstanta positif K sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq K\beta_n$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.4. Diberikan klas \mathcal{GMS} dan $\beta = \{\beta_n\}$ barisan bilangan real positif, klas $\mathcal{GMS}(\beta)$ adalah keluarga $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{GMS}\}$

Lebih lanjut klas \mathcal{GMS}_p telah digeneralisasi menjadi klas \mathcal{NBVS}_p [4] dan \mathcal{MVBVS}_p [5] dengan definisi berikut.

Definisi 1.5. Diketahui $a = \{a_n\}$ and $\beta = \{\beta_n\}$ berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}$, jika terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k| \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n .

Definisi 1.6. Diberikan $a = \{a_n\}$ and $\beta = \{\beta_n\}$ masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$, jika terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.7. Diberikan klas \mathcal{MVBVS}_p dan $\beta = \{\beta_n\}$ barisan bilangan real positif, kemudian didefinisikan klas $\mathcal{MVBVS}_p(\beta)$ adalah koleksi $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p\}$.

Lemma 1.8. Diberikan $1 \leq p < \infty$, untuk setiap barisan bilangan real non negatif $\{a_i\}$ pertidaksamaan

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p$$

berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n [1].

Kemudian di dalam paper ini akan dipaparkan hasil penelitian penulis yang mengkonstruksikan klas p -Supremum Bounded Variation Sequences yang merupakan generalisasi dari klas $SBVS$ dan diselidiki sifat inklusinya.

2 DEFINISI p -SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES

Menurut Korus [6] klas $SBVS \subsetneq SBVS_2$, sehingga dalam definisi disini dibahas klas $SBVS_2$. Notasi $SBVS_2$ dalam tulisan ini ditulis $SBVS2$ dan dapat diperluas menjadi $SBVS2$.

Definisi 2.1. Diberikan $a = \{a_n\}$ dan $\beta = \{\beta_n\}$ berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}$, jika terdapat konstanta positif K , dan $\gamma \geq 1$ sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n .

Definisi 2.2. Diberikan $a = \{a_n\}$ dan $\beta = \{\beta_n\}$ masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, jika terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$ sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Dari definisi 2.1 dan definisi 2.2, klas \mathcal{SBVS}_1 adalah klas \mathcal{SBVS} .

Definisi 2.3. Diberikan klas \mathcal{SBVS}_p dan $\beta = \{\beta_n\}$ barisan bilangan real positif, klas $\mathcal{SBVS}_p(\beta)$ adalah keluarga $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p\}$ untuk $1 \leq p < \infty$.

Definisi 2.4. Diketahui $a = \{a_n\}$ dan $\beta = \{\beta_n\}$ berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2$, jika terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^\infty \subset [0, \infty)$ dengan $b(k) \rightarrow \infty$ untuk $k \rightarrow \infty$ dan monoton naik sehingga berlaku

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n .

Definisi 2.5. Diberikan $a = \{a_n\}$ and $\beta = \{\beta_n\}$ masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2$, jika terdapat konstanta positif K dan

$\{b(k)\}_{k=1}^\infty \subset [0, \infty)$ dengan $b(k) \rightarrow \infty$ untuk $k \rightarrow \infty$ dan monoton naik sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Dari definisi 2.4 dan definisi 2.5, klas \mathcal{SBVS}_2 adalah klas \mathcal{SBVS}_2 .

Definisi 2.6. Diberikan klas \mathcal{SBVS}_2 , klas $\mathcal{SBVS}_2(\beta)$ adalah keluarga

$\{a: (a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2\}$ untuk $1 \leq p < \infty$.

3 SIFAT-SIFAT KLAS p -SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES

Teorema 3.1. Jika $1 \leq p < q < \infty$, maka berlaku $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_q$.

Bukti: Ambil $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right).$$

Kemudian menurut Lemma 1.8 diperoleh

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^q = \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \frac{q}{p} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q$ terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_q$. ■

Akibat 3.2. Jika $1 \leq p < q < \infty$, maka $\mathcal{SBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_q(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.1.

$(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_q$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q(\beta)$. ■

Akibat 3.3. Untuk setiap $a \in \mathcal{SBVS}$, maka $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$, sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} |a_k| \right)$$

Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, maka $\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$

sehingga $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

Teorema 3.4. Jika $1 \leq p < q < \infty$, maka $\mathcal{SBVS}_2_p \subseteq \mathcal{SBVS}_2_q$.

Bukti: Ambil $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^\infty \subset [0, \infty)$ dengan $b(k) \rightarrow \infty$ untuk $k \rightarrow \infty$ dan monoton naik sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

Seperti langkah bukti teorema 2.1. diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p}$$

Sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^q \right)^{1/q} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right),$$

jadi $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2_q$ dan terbukti $\mathcal{SBVS}_2_p \subseteq \mathcal{SBVS}_2_q$. ■

Teorema 3.5. Jika $1 \leq p < \infty$, maka $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_2_p$.

Bukti: Ambil $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$ sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right).$$

Kemudian diambil $b(n) = n/\gamma$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right).$$

Jadi $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$ dan terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_2$. ■

Akibat 3.6. Jika $1 \leq p < \infty$, maka $\mathcal{SBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_2(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.5.

$(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ■

Akibat 3.7. Untuk setiap $a \in \mathcal{SBVS}_2$, maka $a \in \mathcal{SBVS}_2(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_2$, maka terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^\infty \subset [0, \infty)$ dengan $b(k) \rightarrow \infty$ untuk $k \rightarrow \infty$ dan monoton naik sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |a_k| \right)$$

Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, maka $(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p)^{1/p} \leq \frac{K}{n} (\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k)$

sehingga $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_2$, jadi $a \in \mathcal{SBVS}_2(|a|)$. ■

Teorema 3.8. Jika $1 \leq p < \infty$, maka $\mathcal{MVBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_p$.

Bukti: Ambil $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$ jadi terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$. Kemudian sejalan dengan bukti Teorema 1.3. [6], bahwa

$$\frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k \leq \frac{K}{n} \left(\sum_{k=[n/\lambda]}^{2[n/\lambda]-1} \beta_k + \sum_{k=2[n/\lambda]}^{4[n/\lambda]-1} \beta_k + \dots + \sum_{k=\lambda^2[n/\lambda]}^{2\lambda^2[n/\lambda]-1} \beta_k \right) \leq \frac{2\lambda^2 K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right).$$

Jadi $(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p)^{1/p} \leq \frac{2\lambda^2 K}{n} (\sup_{m \geq [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k)$, sehingga $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$ dengan $K' = 2\lambda^2 K$. Terbukti $\mathcal{MVBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_p$. ■

Akibat 3.9. Jika $1 \leq p < \infty$, maka $\mathcal{MVBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{MVBVS}_p(\beta)$, maka $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$, menurut Teorema 3.8.

$(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, terbukti $\mathcal{MVBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ■

Akibat 3.10. Untuk setiap $a \in MVBVS$, maka $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in MVBVS$, maka terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} |a_k|$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$. Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p \right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

jadi $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|)$ dan menurut Akibat 3.9 maka $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$.

Terbukti $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

4 KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan di atas adalah sebagai berikut.

1. Konstruksi klas \mathcal{SBVS}_2 merupakan klas yang lebih umum dari klas \mathcal{SBVS} dan klas \mathcal{SBVS}_2 (Teorema 3.4 dan Teorema 3.5).
2. Klas \mathcal{SBVS}_2 merupakan generalisasi dari klas \mathcal{MVBVS}_p (Teorema 3.5 dan Teorema 3.8).
3. Untuk setiap $a \in MVBVS$, maka $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$ (Akibat 3.10).

5 UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan dari Jurusan Matematika FMIPA UB dan Program Studi S3 Jurusan Matematika FMIPA UGM serta dukungan finansial melalui beasiswa S3 DIKTI.

6 DAFTAR PUSTAKA

- [1] Belaidi, B. dan El Farissi, A., "Inequalities Between The Sum of Power and The Exponential of Sum of Nonnegative Sequence", Department of Mathematics University of Monstaganem, Monstaganem (Algeria). 2012.
- [2] Chaundy TW dan Jolliffe AE, "The Uniform Convergence of certain class trigonometric serie", Proc. London, Soc. 15, 214-116, 1916.
- [3] Feng, F.J. dan Zhou, S.P., "On L1-Convergence Of Fourier Series Of Complex Valued Functions Under The GM7 Condition", Acta Math, Hungar, 133(1-2), 2011.
- [4] Imron, M.A., Indrati, Ch.R. and Widodo, "On p-Non One Sided Bounded variation Sequences and Functions", Proc 2nd Basic Science International Conference, Mathematics Department, FMIPA, UB, 2012.
- [5] Imron, M.A., Indrati, Ch.R. and Widodo, "Sifat-sifat Barisan dan fungsi dasri klas p-mean Value Bounded variation", Konferensi Nasional Matematika 16, Unpad, Bandung, 2012
- [6] Korus, P., "Remark On the uniform And L1-Convergence Of Trigonometric Series", Acta Math. Hungar, 128(4), 2010.
- [7] Leindler, L., "Best Approximation and Fourier Coefficients", Anal. Math, 31, 117-129 (2005).
- [8] Le, R.J. and S. P. Zhou, "A new condition for uniform convergence of certain trigonometric series", Acta Math Hungar, 108, 2005.
- [9] Lifyand, E. and Tikhonov, S., "The Fourier Transforms of General Monotone Functions, Analysis and Mathematical Physics", Trends in Mathematics (Birchauser, 2009).
- [10] Lifyand, E. And Tikhonov, S., "A concept of general monotonicity and applications", Math Nachr, 284, No. 8-9, 2011.
- [11] Tikhonov, S., "Best approximation and moduli of Smoothness computation and Equivalence Theorems", Journal of Approximation Theory, 153 (19-39), 2008.
- [12] Yu, D.S. dan Zhou, S.P., A Generalization of Monotonicity Conditions and Applications, Acta Math Hungar, 115(3), 2007.
- [13] Zhou, S.P., Zhou, P. dan Yu, D.S., Ultimate generalization to monotonicity for Uniform Convergence of Trigonometric Series, Science China Mathematics, 53(7), 1853-1862, 2010.