Pengujian Hipotesis untuk Dua Sampel Saling Bebas dengan Menggunakan Pendekatan Bayesian

Fithri Amalia Rahma*, Suliadi

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*fithriamr@gmail.com , suliadi@gmail.com

Abstract. In this thesis, we will discuss hypothesis testing for two independent samples using the Bayesian approach. One of the alternative bayesian methods for classical hypothesis testing is the Bayesian factor. Wang & Liu (2015) proposed a two-sample testing method with a bayesian approach. Where the Bayes factor used is simple, and free from the Bartlett paradox and the information paradox. The data used for the application of this method is the Human Development Index (IPM) data based on the province of West Java and Central Java in 2020. The results of the two independent sample test using the Bayesian approach are that there is no difference in the average Student Development Index (IPM). between West Java and Central Java provinces in 2020.

Keywords: *Two Independent Sample Test, Bayesian Method, Bayes Factor, T-Statistic.*

Abstrak. Dalam skripsi ini akan dibahas pengujian hipotesis untuk dua sampel saling bebas dengan menggunakan pendekatan bayesian. Salah satu metode alternatif bayesian untuk pengujian hipotesis klasik adalah faktor bayes. Wang & Liu (2015) mengajukan metode pengujian dua sampel dengan pendekatan bayesian. Dimana faktor bayes yang digunakan sederhana, serta terbebas dari paradoks Bartlett dan paradoks informasi. Data yang digunakan untuk penerapan metode ini adalah data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) berdasarkan provinsi Jawa Barat dengan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020. Hasil dari uji dua sampel saling bebas menggunakan pendekatan bayesian adalah tidak ada perbedaaan rata-rata Indeks Pembangunan Mahasiswa (IPM) antara provinsi Jawa Barat dengan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020.

Kata Kunci: *Uji Dua Sampel Saling Bebas, Metode Bayesian, Faktor Bayes, Statistik-t.*

Corresponding Author
Email: suliadi@gmail.com

A. Pendahuluan

Dalam hal penelitian, banyak sekali penelitian tentang perbandingan antara dua kelompok. Perbandingan antara dua kelompok dibagi menjadi dua jenis, yang pertama adalah perbandingan kelompok tidak saling bebas (dependent) dan yang kedua adalah perbandingan kelompok saling bebas (independent). Kelompok tidak saling bebas yang dimaksud di sini adalah data kedua kelompok populasi mengandung unsur berpasangan contohnya data ‘laki-laki dan perempuan’, namun bisa juga data berasal dari variabel yang sama tetapi mendapat dua perlakuan yang berbeda misalnya ‘sebelum’ dan ‘sesudah’. Sedangkan untuk kelompok saling bebas adalah data kedua kelompok populasi berasal dari variabel yang berbeda. Permasalahan seperti ini dapat diselesaikan dengan menerapkan analisis secara statistika yaitu dengan menggunakan uji t-student, dengan kriteria data adalah data berskala interval atau rasio, berdistribusi normal, dan varian data dapat sama atau berbeda.

Selain dengan pendekatan klasik t-student, perhitungan lain untuk analisis perbandingan dua rata-rata sampel saling bebas adalah menggunakan pendekatan bayesian. Pendekatan bayesian pertama kali dicetuskan oleh Thomas Bayes sekitar tahun 1950. Dalam inferensi bayesian, nama bayesian dipakai karena teorema bayes banyak digunakan untuk pengambilan kesimpulan dari data. Kendall dan Kendall (2011) berpendapat bahwa inti dari teorema bayes adalah suatu kejadian yang belum terjadi di masa depan bisa diprediksi dengan syarat kejadian sebelumnya atau kejadian di masa lampau sudah terjadi.

Wang dan Liu (2015) mengusulkan bentuk faktor bayes untuk masalah pengujian hipotesis perbandingan dua rata-rata sampel saling bebas. Bentuk faktor bayes yang diusulkan pun terbebas dari paradoks Bartlett dan paradoks informasi yang tidak diinginkan seperti pada pendekatan Bayesian sebelumnya oleh Gonen et al. (2005). Pendekatan yang diusulkan dapat dianggap sebagai versi bayesian dari statistik varian-gabungan. Skripsi ini akan membahas penerapan pendekatan bayes untuk pengujian hipotesis dua sampel yang telah dikemukakan oleh Wang dan Liu (2015) dengan menerapkan pada data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) berdasarkan provinsi Jawa Barat dengan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020.

B. Metodologi Penelitian

Inferensi Bayes

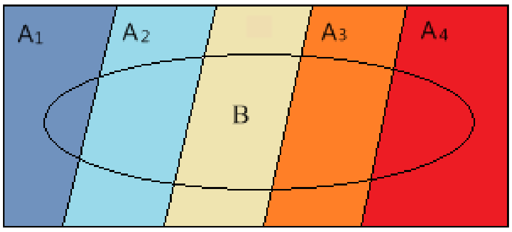
Inferensi Bayes merupakan salah satu metode inferensi statistik di mana teorema bayes digunakan untuk memperbarui peluang hipotesis karena lebih banyak bukti atau informasi yang didapatkan. Secara umum, teorema bayes dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad ...(2.4)$$

Keterangan :

$P(A|B)$ = peluang terjadinya kejadian A dengan syarat kejadian B
$P(B|A)$ = peluang terjadinya kejadian B dengan syarat kejadian A
$P(A)$ = peluang terjadinya kejadian A
$P(B)$ = peluang terjadinya kejadian B

Namun, terkadang untuk menghitung $P(B)$ diperlukan teorema peluang total. Misalkan kejadian B menjadi titik perhatian kita, $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah kejadian-kejadian dan saling terpisah (*mutually exclusive)* dari ruang contoh S. Selain itu $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1. Peluang Total

Maka bisa didapatkan:

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$dan $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n)$ …(2.5)

Sehingga didapatkan teorema peluang total:

$$P(B) = P(B|A_1)(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n) \quad \ldots(2.6)$$

Dari persamaan di atas, teorema bayes dapat dituliskan kembali menjadi

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B|A_1)(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)} \quad \ldots(2.7)$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad \ldots(2.8)$$

Dalam rumusan umum pengujian hipotesis bayesian, pengujian dimulai dengan menempatkan peluang *prior* yaitu π_0 dan π_1 $(\pi_0 + \pi_1 = 1)$ pada hipotesis H_0 dan H_1 (Gonen dan Lu, 2005). Rasio dari peluang H_0 dan H_1 sebelumnya ini disebut dengan peluang prior (*prior odds*) yaitu peluang sebelum melihat bukti apapun, kemudian nilai-nilai ini diperbarui melalui teorema bayes untuk mendapatkan peluang posterior (*posterior odds*) atau peluang setelah adanya informasi yang diperoleh dari data (bukti). Sehingga dengan teorema bayes kita bisa memperbarui nilai peluang tadi untuk mendapatkan peluang *posterior* bahwa hipotesis nol benar atau hipotesis satu benar dengan adanya informasi dari data dengan rumus berikut:

$$P(H_j|data) = \frac{\pi_j P(data|H_j)}{\pi_0 P(data|H_0)+\pi_1 P(data|H_1)}, \quad j = 0{,}1 \quad \ldots(2.9)$$

$$PO[H_0: H_1] = \frac{(P(data|H_0) \times P(H_0))/P(data|H_0)P(H_0) + P(data|H_1)P(H_1)}{(P(data|H_1) \times P(H_1))/P(data|H_0)P(H_0) + P(data|H_1)P(H_1)}$$

$$PO[H_0: H_1] = \frac{P(data|H_0)}{P(data|H_1)} \times \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad \ldots(2.12)$$

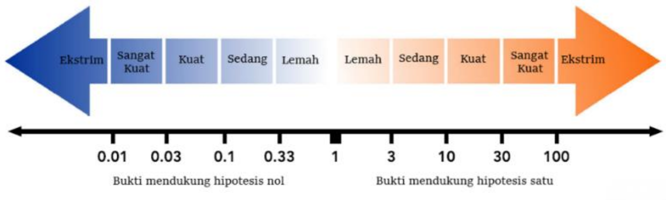
Dimana $P(data|H_0)/P(data|H_1)$ didefinisikan sebagai faktor bayes dan $P(H_0)/P(H_1)$ merupakan *prior odds*. Faktor bayes merupakan rasio dari *posterior odds* terhadap *prior odds*. Karena peluang *posterior* sangat bergantung pada nilai *prior*, sering kali disarankan untuk menggunakan faktor bayes (Gonen dan Lu, 2005). Faktor bayes adalah ringkasan dari bukti yang diberikan oleh data yang mendukung suatu teori ilmiah yang diwakili oleh model statistik (Kass dan Raftery, 1995).

Densitas $P(data|H_j)$ merupakan marjinal likelihood dan bisa diperoleh dengan mengintegralkannya:

$$P(data|H_j) = \int P(data|\theta_j, H_j)\pi(\theta_j|H_j)d\theta_j \quad \ldots(2.14)$$

Dimana $\theta_j$adalah parameter dibawah H_j, $\pi(\theta_j|H_j)$ adalah *prior*-nya, dan $P(data|H_j)$ adalah fungsi likelihood dari θ.

Kemudian nilai dari faktor bayes mempunyai skala klasifikasi untuk diinterpretasikan, skala ini pertama kali dicetuskan oleh Harold Jeffreys yang kemudian diadaptasi oleh Lee dan Wagenmaker (Quintana dan Williams, 2018). Skala klasifikasi untuk nilai faktor bayes ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Skala Klasifikasi Nilai Faktor Bayes (Quintana dan Williams, 2018)

Pendekatan secara bayes untuk membandingkan dua hipotesis adalah faktor bayes (Kass dan Raftery, 1995). Untuk pengujian hipotesis *t-student* sampel saling bebas, kita perlu menentukan distribusi sebelumnya yang sesuai untuk (μ_1, μ_2, σ^2). Gonen dkk (2005) menunjukan bahwa masalah pengujian ini dapat ditulis dalam format yang setara:

$H_0: \delta = \mu_1 - \mu_2 = 0$ melawan $H_1: \delta \neq 0$ …(2.15)

Oleh karena itu, Gonen dkk (2015) menganjurkan prior untuk δ/σ^2, bukan μ, di mana $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$. Setelah proses pemilihan ulang parameter dari (μ_1, μ_2, σ^2), prior yang disarankan diberikan oleh:

$\pi(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$ dan $\delta/\sigma|\mu, \sigma^2, \delta \neq 0 \sim N(\lambda, \sigma_a^2)$ …(2.16)

Dengan λ dan σ_a^2 adalah *hyperparameter* yang harus ditentukan sebelumnya. Jika kita tidak mempunyai informasi apapun, kita bisa mengambil $\lambda = 0$. Faktor bayes di bawah prior di atas adalah:

$$\mathrm{GBF}[H_1: H_0] = \left[\frac{1+\frac{t^2}{v}}{1+\frac{t^2}{\{v(1+n_\delta \sigma_a^2)\}}}\right]^{-\frac{v+1}{2}} (1 + n_\delta \sigma_a^2)^{-1/2} \quad \ldots(2.17)$$

Hyper-Prior Untuk σ_a^2

Wang dan Liu (2015) membahas prior yang tepat untuk σ_a^2, dinotasikan dengan $\pi(\sigma_a^2)$. Bentuk faktor bayes untuk pengujian hipotesis perbandingan dua rata-rata sampel saling bebas yang diusulkan ditulis sebagai berikut :

$$\mathrm{PBF}[H_1: H_0] = \int_0^\infty \left[\frac{1+\frac{t^2}{v}}{1+\frac{t^2}{v(1+n_\delta \sigma_a^2)}}\right]^{\frac{v+1}{2}} (1 + n_\delta \sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}} \pi(\sigma_a^2) d\sigma_a^2 \quad \ldots(2.18)$$

Lalu fungsi bayes faktor dapat disederhanakan menjadi:

$$\mathrm{PBF}[H_1: H_0] = \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\Gamma(a+1)} (1 + \frac{t^2}{v})^{(v-2a-2)/2} \quad \ldots(2.20)$$

Dimana $v = n_1 + n_2 - 2$, t didapat dari rumus t-statistik dan $a \in (-1, -\frac{1}{2})$. Kriteria keputusan yang digunakan dalam perhitungan faktor bayes ini adalah apabila nilai faktor bayes > 1 maka H_0 ditolak dan apabila nilai faktor bayes < 1 maka H_0 diterima.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Dalam pembahasan ini ini akan dibahas mengenai hasil dari hipotesis dua sampel saling bebas dengan menggunakan pendekatan bayesian untuk data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) berdasarkan provinsi Jawa Barat dengan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020.

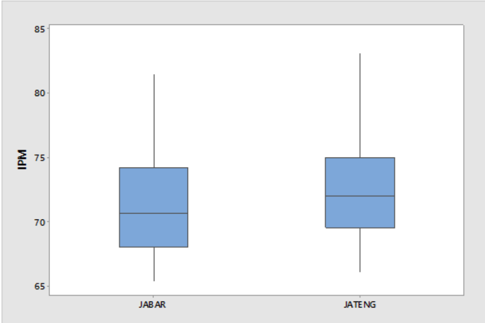
Deskripsi Data

Statistik untuk pendeskripsian data meliputi jumlah sampel, rata-rata, varian, nilai minimum, kuartil 1 (Q1), median, kuartil 3 (Q3), dan nilai maximum. Hasil perhitungan statistik ditampilkan pada Tabel 1

Tabel 1. Statistik Deskritif Data IPM Jawa Barat dan IPM Jawa Tengah

Variabel	N	Rata-Rata	Varian	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
Jawa Barat	27	71,64	22,29	65,36	68,06	70,66	74,21	81,51
Jawa Tengah	35	72,51	19,58	66,11	69,57	71,98	75	83,14

Dapat dilihat bahwa ada perbedaaan kecil nilai rata-rata diantara IPM Jawa Barat dan IPM Jawa Tengah. Untuk menggambarkan data secara grafik, penulis memilih metode boxplot yang ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Boxplot data IPM Jawa Barat dan IPM Jawa Tengah

Dari grafik boxplot dapat dilihat bahwa kotak boxplot IPM Jawa Barat lebih tinggi dari kotak boxplot Jawa Tengah, ini berarti data IPM Jawa Barat lebih menyebar dari IPM Jawa Tengah. Kemudian dapat dilihat bahwa kedua kelompok tampak simetris, data kedua populasi tidak terdapat data pencilan maupun nilai ekstrim, dan tampak tidak ada perbedaan nilai rata-rata.

Hasil Penerapan Uji Hipotesis Dua Sampel Saling Bebas Dengan Pendekatan Bayesian

Menentukan hipotesis:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ (Tidak ada perbedaan rata-rata Indeks Pembangunan Manusia (IPM) antara provinsi Jawa Barat dan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020).

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ **(**Terdapat perbedaan rata-rata Indeks Pembangunan Manusia (IPM) antara provinsi Jawa Barat dan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020).

Selanjutnya adalah menghitung nilai *t*-statistik yang akan digunakan pada perhitungan bayes faktor nanti. Dari Tabel 4.1 didapat nilai rata-rata dan varian dari setiap kelompok, maka nilai *t*-statistik sebagai berikut:

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s_p\sqrt{n_\delta}}$$

$$t = \frac{71{,}6429 - 72{,}514}{4{,}5559\sqrt{\frac{1}{37}+\frac{1}{35}}}$$

$$t = -0{,}74647$$

Setelah mendapatkan nilai *t*-statistik maka langkah berikutnya adalah menghitung nilai bayes faktor. Dalam penelitian ini penulis menggunakan nilai $a = \{-0.95, -0.9, -0.8, -0.75, -0.7, -0.6, -0.5\}$, maka nilai bayes faktor untuk setiap nilai a ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai PBF Untuk Setiap Nilai a

a	**-0,95**	**-0,9**	**-0,8**	**-0,75**	**-0,7**	**-0,6**	**-0,5**
PBF	0,1359	0,1161	0,0939	0,0816	0,0683	0,0378	0,2205

Kriteria penolakan H_0 dari metode pengujian hipotesis perbandingan dua rata-rata sampel saling bebas dengan pendektan bayes yang diusulkan oleh Wang dan Liu (2015) adalah apabila nilai faktor bayes > 1 maka H_0 ditolak dan apabila nilai faktor bayes < 1 maka H_0 diterima. Karena semua nilai PBF untuk setiap nilai a < 1
maka H_0 diterima atau tidak ada perbedaan rata-rata Indeks Pembangunan Manusia (IPM) antara provinsi Jawa Barat dan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020.

Berdasarkan nilai PBF pada Tabel 1, kekuatan nilai bayes faktor untuk menolak hipotesis H_0 berdasarkan skala klasifikasi untuk nilai faktor bayes ditampilkan pada Gambar 2 maka besarnya kekuatan bukti (data) mendukung hipotesis nol ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Kekuatan Bukti Mendukung H_0

a	**PBF**	**Kekuatan Bukti Mendukung H0**
-0,95	0,1359	Sedang
-0,9	0,1161	Sedang
-0,8	0,00939	Ekstrim
-0,75	0,0816	Kuat
-0,7	0,0683	Kuat
-0,6	0,0378	Kuat
-0,5	0,2205	Sedang

D. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan yaitu pengujian hipotesis untuk dua sampel saling bebas dengan pendekatan bayesian untuk data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) berdasarkan provinsi Jawa Barat dengan provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020 menujukan semua nilai PBF untuk setiap nilai $a < 1$
maka H_0 diterima maka data disimpulan bahwa tidak ada perbedaan rata-rata Indeks Pembangunan Manusia antara provinsi Jawa Barat dengan Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2020. Dapat dilihat bahwa pengujian dengan menggunakan uji frequentist maupun dengan pendekatan Bayesian menghasilkan kesimpulan yang sama, sehingga metode ini terbebas dari paradoks barlett dan paradoks informasi yang tidak diinginkan.

Dan besarnya kekuatan bukti (data) mendukung hipotesis nol berdasarkan klasifikasi nilai faktor untuk setiap nilai a menunjukan bukti yang cukup kuat untuk mendukung hipotesis nol.

Daftar Pustaka

[1] Good, P. I., & Hardin, J. W. (2012). *Common errors in statistics (and how to avoid them)*. John Wiley & Sons.

[2] Gönen, M., Johnson, W. O., Lu, Y., & Westfall, P. H. (2005). The Bayesian two-sample t test. *The American Statistician*, *59*(3), 252-257.

[3] Kendall, K. E., & Kendall, J. E. (2011). *Systems analysis and design* (Vol. 2013). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

[4] Lee, M. D., & Wagenmakers, E. J. (2014). *Bayesian cognitive modeling: A practical course*. Cambridge university press.

[5] Nuryadi, N., Astuti, T. D., Sri Utami, E., & Budiantara, M. (2017). Dasar-Dasar Statstk Penelitan.

[6] Sugiyono. (2010). Metode Penelitian Pendidikan Pendekatan Kuantitatif, kualitatif, dan R&D. Bandung: Alfabeta.

[7] Wang, M., & Liu, G. (2016). A simple two-sample Bayesian t-test for hypothesis testing. *The American Statistician*, *70*(2), 195-201.

[8] Quintana, D. S., & Williams, D. R. (2018). Bayesian alternatives for common null-hypothesis significance tests in psychiatry: a non-technical guide using JASP. *BMC psychiatry*, *18*(1), 1-8.