

## Analisis *Marginal Rate of Technical Substitution* (MRTS) pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Resa Noelsa<sup>\*</sup>, Eti Kurniati

Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

\*resanoelsa021@gmail.com, etika0101@gmail.com

**Abstract.** Factors of production from a production process allow mutual substitution, for example capital and labor. Capital can be used to use labor through the use of machines so that the amount of *output* used through the amount of capital and the amount of work varies. This can be described in terms of *isoquants*. The ability to substitute between two factors of production can be expressed through the *Marginal Rate of Technical Substitution* (MRTS). to analyze the level of substitution and the effect of its change on substitution. In this study, the *Cobb-Douglas* production function is used with capital ( $K$ ) and labor ( $L$ ) variables. It is found that the MRTS can determine the ratio of the two *input* variables that produce the intensity of the capital-intensive and labor-intensive factors of production that form a convex *isoquant* curve. A change in MRTS causes the same change in  $K$  to  $L$ .

**Keywords:** *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS), Cobb-Douglas, elasticity of substitution.*

**Abstrak.** Faktor produksi dari suatu proses produksi memungkinkan bisa saling substitusi, misalnya modal dan tenaga kerja. Modal bisa menggantikan fungsi tenaga kerja melalui penggunaan mesin sehingga untuk memproduksi sejumlah *output* yang sama bisa melalui penggunaan jumlah modal dan jumlah tenaga kerja yang bervariasi. Hal tersebut dapat digambarkan dalam *isoquant*. Kemampuan substitusi antar dua factor produksi dapat dinyatakan melalui *Marginal Rate of Technical Substitution* (MRTS). untuk menganalisa tingkat substitusi dan akibat dari perubahannya terhadap elastisitas substitusi. Pada penelitian ini digunakan fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan variabel modal ( $K$ ) dan tenaga kerja ( $L$ ). Diperoleh bahwa MRTS dapat menentukan rasio kedua variabel *input* yang menghasilkan intensitas faktor produksi bersifat padat modal dan padat tenaga kerja yang membentuk kurva *isoquant* berbentuk konveks. Perubahan *MRTS* menyebabkan perubahan yang sama pada  $K$  terhadap  $L$ .

**Kata Kunci:** *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS), Cobb-Douglas, elastisitas substitusi.*

## A. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu eksak yang tidak dapat dipisahkan dari kehidupan sehari-hari sebagai ilmu yang terstruktur dan saling berhubungan. Matematika sebagai induk dari cabang ilmu yang lain khususnya pada bidang ekonomi membuat perkembangannya semakin pesat seiring dengan perkembangan metodologi, kemampuan analisis dan pendekatan yang dilakukan. Fenomena ekonomi adalah kegiatan yang dilakukan dengan mempertimbangkan berbagai aspek dan melibatkan perilaku masyarakat dengan berbagai latar belakang sosial, budaya, karakter, sifat, kondisi alam hingga kepercayaan yang berbeda [1].

Salah satu bahasan dalam ilmu ekonomi adalah teori produksi. Salah satu fungsi produksi yang sering digunakan adalah fungsi *Cobb-Douglas*. Fungsi *Cobb-Douglas* dengan dua variabel biasanya menggunakan variabel Modal ( $K$ ) dan Tenaga Kerja ( $L$ ). Modal dan tenaga kerja merupakan variabel yang bisa saling substitusi. Modal bisa menggantikan tenaga kerja melalui mesin, sehingga untuk jumlah *output* yang sama bisa diperoleh menggunakan variasi jumlah modal dan jumlah tenaga kerja yang berbeda. Hal ini bisa dilihat dalam *isoquant*. Kemampuan substitusi antar dua faktor produksi dapat dinyatakan melalui *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)*.

$K$  menunjukkan jumlah modal dan  $L$  menunjukkan jumlah tenaga kerja.  $K/L$  bisa lebih besar dari 1 yang berarti pada proses produksi menggunakan lebih banyak modal dibandingkan tenaga kerja. Sedangkan, saat  $K/L$  lebih kecil dari satu berarti proses produksi menggunakan modal dengan proporsi yang lebih kecil dari tenaga kerja. Hal ini berkaitan dengan bagaimana elastisitas substitusi faktor untuk menunjukkan kaitannya dengan *MRTS*.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah menentukan elastisitas substitusi antar faktor produksi menggunakan *MRTS*. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan elastisitas substitusi antar faktor produksi menggunakan *MRTS*.

## B. Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode literatur yang dilakukan dengan pengumpulan data pustaka, membaca jurnal ilmiah dan buku-buku referensi. Teknik ini bertujuan untuk mengungkapkan berbagai teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang sedang dihadapi/diteliti sebagai bahan rujukan dalam pembahasan hasil penelitian.

## C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

### Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan Dua Input Variabel Bebas

Kegiatan utama dari setiap perusahaan adalah mengubah *input* menjadi *output*. Perusahaan dengan keterbatasan sumber daya yang ada menginginkan hasil produksidapat memenuhi target *output* tertentu. Dalam mencapai tujuan tersebut, untuk menyederhanakan persoalan yang ada para ahli ekonomi menerapkan ilmu matematika untuk membangun model produksi hubungan antara *input* dan *output* yang diformulasikan sebagai berikut.

$$q = f(K, L, M, \dots)$$

Dimana  $q$  mewakili *output* perusahaan dari barang tertentu selama suatu periode,  $K$  mewakili penggunaan modal selama periode tersebut,  $L$  mewakili jumlah *input* tenaga kerja,  $M$  mewakili jumlah bahan baku yang digunakan, dan notasi “...” menunjukkan kemungkinan lain variabel yang mempengaruhi proses produksi. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya diambil dua variabel yaitu modal ( $K$ ) dan tenaga kerja ( $L$ ). Sementara variabel yang lain dianggap konstan sehingga fungsi berbentuk:

$$q = f(K, L)$$

Salah satu fungsi produksi yang sering digunakan adalah fungsi *Cobb-Douglas*. Fungsi *Cobb-Douglas* dengan dua variabel modal ( $K$ ) dan tenaga kerja ( $L$ ) adalah sebagai berikut:

$$q = f(K, L) = AK^aL^b$$

Dengan  $A, a, b$  konstanta positif.

Dengan kemajuan teknologi maka modal ( $K$ ) dapat mensubstitusi tenaga kerja ( $L$ ) melalui penggunaan mesin karena mesin dapat menggantikan tenaga kerja dalam menghasilkan suatu *output*. Sehingga untuk kuantitas *output* yang sama bisa dihasilkan melalui jumlah modal

dan jumlah tenaga kerja bisa bervariasi.

**Produk Fisik Marginal dengan Dua *Input* Variabel Bebas**

Produk Fisik Marginal atau *Marginal Physical Product (MP)* dari suatu *input* adalah *output* tambahan yang dapat diproduksi menggunakan satu unit tambahan suatu *input* dengan menganggap *input* lainnya bernilai konstan. Secara matematis,

produk fisik marginal dari modal:

$$MP_K = \frac{\partial q}{\partial K}$$

$$MP_K = q_K$$

produk fisik marginal dari tenaga kerja:

$$MP_L = \frac{\partial q}{\partial L}$$

$$MP_L = q_L$$

Produk fisik marginal dari fungsi dua *input* merupakan turunan parsial (*the partial derivative*). Dengan demikian menggambarkan bahwa semua penggunaan *input* lainnya dianggap konstan pada beberapa tingkat penggunaan sementara *input* yang diinginkan adalah *input* variabel.

Secara matematis asumsi dari *diminishing physical productivity* adalah suatu asumsi tentang turunan parsial kedua dari fungsi produksi yaitu

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} = \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = q_{KK} < 0$$

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = q_{LL} < 0$$

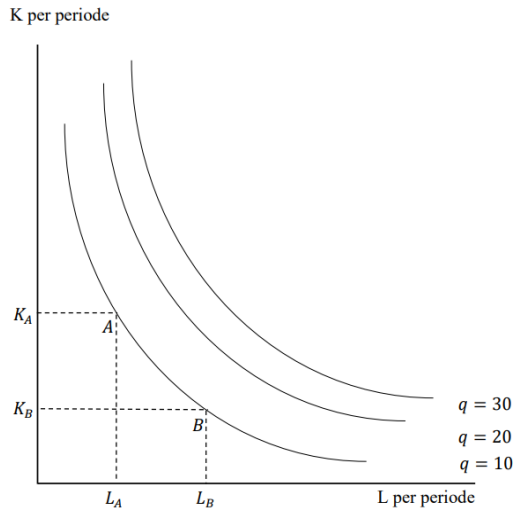
**MRTS dan Produk Fisik Marginal dengan Dua *Input* Variabel Bebas**

*Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* merupakan tingkat substitusi pada satu unit *input* variabel dengan sejumlah variabel lainnya dengan mempertahankan *output* konstan disepanjang *isoquant*. *Isoquant* memiliki kemiringan yang menunjukkan tingkat substitusi yang dapat dilakukan oleh variabel yang saling berhubungan dan dapat disubstitusikan secara marginal dengan mempertahankan hasil produksi yang sama. *MRTS* digunakan untuk memperlihatkan bahwa *slope isoquant* mengasumsikan bahwa *input* suatu variabel akan meningkat dan variabel lainnya menurun. Salah satu contohnya adalah tenaga kerja (*L*) dapat diganti dengan modal (*K*). Formula dalam matematika,

$$MRTS (L \text{ for } K) = \left. \frac{-dK}{dL} \right|_{q=q_0}$$

Dalam notasi tersebut, terlihat bahwa *output* bernilai konstan karena tenaga kerja dapat diganti dengan modal.

Substitusi satu *input* dengan *input* lain dalam fungsi produksi dapat diilustrasikan dengan peta *isoquant*. Pada fungsi produksi  $q = f(K, L)$  dengan contoh *input* yaitu modal (*K*) dan tenaga kerja (*L*), *isoquant* mencatat kombinasi *K* dan *L* yang mampu menghasilkan tingkat *output* tertentu. Misalnya, semua kombinasi *K* dan *L* pada kurva dengan nilai  $q = 10$ .



**Gambar 1.** Peta *isoquant*

Peta *isoquant* seperti yang diperlihatkan pada gambar 1 diatas, menunjukkan ada banyak cara alternatif untuk memproduksi sepuluh unit *output*. Dalam proses produksi dapat memilih menggunakan modal lebih sedikit dan tenaga kerja yang lebih banyak atau menggunakan modal lebih banyak dan tenaga kerja yang lebih sedikit. *Isoquant* dapat didefinisikan sebagai sebuah kombinasi antara jumlah *input* dengan jumlah *input* lainnya untuk menghasilkan tingkat *output* tertentu. *Isoquant* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(K, L) = q_0$$

Dimana  $q_0$  pada persamaan (9) menunjukkan banyaknya *isoquant* di bidang  $K$ - $L$  yang mewakili tingkat *output* tertentu.

*Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa *slope* dari *isoquant* adalah negatif. Jika:

$$q = f(K, L)$$

Maka turunan total dari fungsi produksi adalah sebagai berikut:

$$dq = \frac{\partial f}{\partial L} \cdot dL + \frac{\partial f}{\partial K} \cdot dK = MP_L \cdot dL + MP_K \cdot dK$$

Yang memperlihatkan perubahan kecil pada  $K$  dan  $L$  akan berpengaruh pada *output*. Untuk  $dq = 0$  disepanjang *isoquant*, diperoleh

$$0 = MP_L \cdot dL + MP_K \cdot dK$$

$$-MP_K \cdot dK = MP_L \cdot dL$$

Yang menunjukkan bahwa sepanjang *isoquant* *output* dari penambahan  $L$  seimbang dengan pengurangan  $K$  yang sesuai.

$$-\frac{dK}{dL} \Big|_{q=q_0} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Dimana

$$-\frac{dK}{dL} \Big|_{q=q_0} = MRTS$$

Hasil pada persamaan (10) memperlihatkan bahwa *isoquant* mempunyai *slope* negatif.  $MP_L$  dan  $MP_K$  tidak negatif jadi *slope isoquant* adalah negatif dari *MRTS*. Untuk fungsi *Cobb-Douglas*

$$q = AK^aL^b$$

Maka diperoleh *MRTS* sebagai berikut:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{AK^a bL^{b-1}}{aAK^{a-1}L^b} \\ &= \frac{AK^a bL^{b-1}}{bAK^a L^{b-1}} \\ &= \frac{AK^{a-1}L^b}{bK} \\ &= \frac{bK}{aL} \end{aligned}$$

Jika fungsi merupakan return to scale dan  $K > L$  maka  $MRTS > 1$ . Jika fungsi produksi merupakan constant dan incesing return to scale dan  $K < L$  maka  $MRTS > 1$ .

**Elastisitas Substitusi dengan Dua *Input* Variabel Bebas**

Elastisitas substitusi ( $\sigma$ ) dapat digunakan untuk menggambarkan perubahan *MRTS* mengakibatkan perubahan pada proporsi ( $K/L$ ). *MRTS* memiliki keterkaitan dengan rasio *marginal product* ( $MP_L/MP_K$ ) yang menunjukkan tingkat dimana *input* modal ( $K$ ) dapat menggantikan tenaga kerja ( $L$ ). Berdasarkan hal tersebut, untuk memperoleh nilai elastisitas substitusi ( $\sigma$ ) dapat dilakukan dengan cara turunan parsial pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan dua variabel *input*. Karena  $MP_L = q_L$  dan  $MP_K = q_K$  sehingga diperoleh turunan parsial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} MP_L = q_L &= \frac{AbK^a L^b}{L} \\ MP_K = q_K &= \frac{AaK^a L^b}{K} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (14) nilai *MRTS* adalah

$$MRTS = \frac{bK}{aL}$$

Pada fungsi produksi  $q = f(K, L)$  elastisitas substitusi ( $\sigma$ ) menunjukkan perubahan yang proporsional pada  $K/L$  terhadap perubahan *MRTS* disepanjang *isoquant* yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{percent } \Delta(K/L)}{\text{percent } \Delta MRTS} \\ &= \frac{\frac{\Delta(K/L)}{K/L}}{\frac{\Delta MRTS}{MRTS}} \\ &= \frac{\Delta(K/L)}{K/L} \cdot \frac{MRTS}{\Delta MRTS} \\ &= \frac{\Delta(K/L)}{\Delta MRTS} \cdot \frac{MRTS}{K/L} \\ &= \frac{d(K/L)}{dMRTS} \cdot \frac{MRTS}{K/L} \\ &= \frac{d(K/L)}{dMRTS} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{K/L}{K/L} \\ &= \frac{d(K/L)}{dMRTS} \cdot \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Selanjutnya menghitung rasio dari  $\frac{d(K/L)}{dMRTS}$  dalam hal ini berdasarkan persamaan (12) maka,

$$dMRTS = \frac{b}{a} d(K/L)$$

Kemudian substitusikan persamaan (17) pada persamaan (16) sehingga diperoleh

$$= \frac{d(K/L)}{\frac{b}{a} d(K/L)} \cdot \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, memperlihatkan bahwa elastisitas substitusi pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* adalah  $\sigma = 1$ . Kondisi tersebut menunjukkan bahwa perubahan pada *MRTS* menyebabkan perubahan yang sama pada substitusi tenaga kerja (*L*) terhadap modal (*K*).

#### D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Garis singgung dari peta *isoquant* memiliki kemiringan negatif sementara *MRTS* adalah negatif dari kemiringan garis singgung tersebut. Maka *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* bernilai positif.
2. Jika nilai  $K > L$  untuk setiap *a* dan *b* dengan  $MRTS > 1$ , maka penggunaan modal mempunyai nilai substitusi yang lebih besar dibandingkan penggunaan tenaga kerja sehingga menunjukkan bahwa proses produksi memiliki sifat padat modal (*capital intensive*). Sedangkan, jika nilai  $K < L$  untuk setiap *a* dan *b* dengan  $MRTS < 1$ , maka penggunaan tenaga kerja mempunyai nilai substitusi yang lebih besar dibandingkan penggunaan modal sehingga menunjukkan bahwa proses produksi memiliki sifat padat tenaga kerja (*labor intensive*).
3. Elastisitas substitusi pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* bernilai 1. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa perubahan pada *MRTS* menyebabkan perubahan yang sama pada substitusi tenaga kerja (*L*) terhadap modal (*K*).

#### Daftar Pustaka

- [1] H. Safri, Pengantar Ilmu Ekonomi, Palopo: Lembaga Penerbit Kampus IAIN, 2018, pp. 103-104.
- [2] R. P. Daniel L. Rubinfeld, Mikroekonomi edisi keenam, Jakarta: Indeks, 2007.
- [3] M. D. Muhammad Hasan, Pengantar Ekonomi: Teori dan Aplikasi, Gowa: Pustaka Taman Ilmu, 2018.
- [4] D. I. Yuliadi, Teori Ekonomi Makro Islam, Depok: Raja Grafindo Persada, 2018.
- [5] W. N. Christoher Snyder, Macroeconomis Theory Basic Principles and Extensions Sixth Edition, Maso, United States America: Thomson Higher Education, 1995.
- [6] M. D. B. B. Suci Azzahra, "Analisis Aplikasi dan Penerapan Matematika Pada Ilmu Ekonomi Fungsi Permintaan dan Penawaran," vol. 11 No. 1, pp. ISSN: 2087-4669, 2020.
- [7] G. Vincent, Total Quality Management, Jakarta: Gramedia Pustaka utama, 1996.
- [8] N. Walter, Mikroekonomi Intermediate dan Aplikasinya, Jakarta: Binarupa Aksara, 1995.
- [9] J. A. Dahlan, Analisis Kurikulum Matematika, Jakarta: Universitas Terbuka, 2011.
- [10] C. E. F. John P. Gould, Microeconomy Theory, California: Home Illonois, 1975, p. 345.
- [11] D. Haryono, Filsafat Matematika, Bandung: Alfabeta, 2014.
- [12] E. M. Dadang Ruhiat, "Penerapan Sub Pokok Fungsi pada Matematika Ekonomi terhadap Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran," *Jurnal Ilmiah Akuntansi*, pp. 90-96, 2018.
- [13] S. Sukirno, Makroekonomi Modern: Perkembangan Pemikiran Dari Klasik Hingga Keynesian Baru, Depok: Raja Grafindo Pustaka, 2000.
- [14] Soeratno, Mikro Pengantar Edisi Ke-1, Yogyakarta: STIE YKPN, 2000.
- [15] Shafana Ninda Rizkya, Gunawan Gani. (2021). *Analisis Faktor yang Mempengaruhi Kesadaran Penduduk dalam Vaksin Covid-19 Menggunakan Metode Multivariate*

*Adaptive Regression Spline*. Jurnal Riset Matematika, 1(2), 154-162.