

PENURUNAN PERSAMAAN DARCY DARI PERSAMAAN NAVIER-STOKES UNTUK RESERVOIR ALIRAN LINIER DAN RADIAL

Listiana Satiawati^{1*)} dan Prayang Sunni Yulia¹

¹Teknik Perminyakan Fakultas Teknologi Kebumihan dan Energi (FTKE) Universitas Trisakti,
jl. Kyai Tapa no. 1 Grogol, Jakarta Barat.

ABSTRAK

Perhitungan aliran hidrokarbon yang berupa minyak atau gas di dalam ilmu Teknik Perminyakan digunakan persamaan Darcy. Penurunan Persamaan Navier Stokes menghasilkan persamaan yang masih umum belum bisa dipakai untuk keadaan khusus, misalkan untuk aliran linier atau radial karena perumusannya menjadi berbeda. Dalam paper ini, persamaan Darcy yang didapat melalui bukti eksperimen, diturunkan dari persamaan Navier Stokes dengan beberapa asumsi dan penyederhanaan. Perhitungan pada paper ini menggunakan solusi numerik, yaitu menggunakan bahasa Fortran, sebagai salah satu pendekatan. Kemudian dengan menggunakan data lapangan digunakan persamaan Darcy dalam perhitungan debit dan kecepatan aliran fluida linier pada reservoir. Dan juga perhitungan tekanan mulai sumur sampai titik terluar dari reservoir dengan aliran fluida radial, sehingga bisa didapatkan data gradien tekanan dari sumur sampai titik terluar dari reservoir.

Kata kunci: Persamaan Navier-Stokes, Persamaan Darcy, Reservoir, Linier, Radial.

ABSTRACT

Calculation of hydrocarbon flow in the form of oil or gas in Petroleum Engineering is used the Darcy equation. Deriving the Navier Stokes equation produces a general equation that cannot be used for special conditions, for example linear or radial flow because the formulation is different. In this paper, the Darcy equation obtained through experimental evidence is derived from the Navier Stokes equation with several assumptions and simplifications. The calculation in this paper uses a numerical solution, which uses Fortran language, as one approach. Then by using field data, the Darcy equation is used in calculating the flow rate and the velocity of linear fluid in the reservoir. And also the calculation of the pressure from the well to the outermost point of the reservoir with radial fluid flow, so that the pressure gradient data can be obtained from the well to the outermost point of the reservoir.

Key word : Navier-Stokes equation, Darcy equation, Reservoir, Linear, Radial

***)Corresponding Author :** HP. 085310633820, listianasatiawati@trisakti.ac.id

PENDAHULUAN

Persamaan Darcy adalah suatu persamaan yang umum digunakan untuk menghitung debit, tekanan, dan kecepatan aliran baik aliran linier, aliran radial, aliran bola (spherical), atau setengah bola (hemospherical). Awalnya persamaan Darcy didapatkan dari hasil eksperimen tabung silinder lurus yang dilakukan oleh Darcy, analisa selanjutnya persamaan Darcy diturunkan dari Persamaan Navier Stokes untuk mencari solusi kasus yang lebih umum. Jadi Persamaan Darcy yang banyak dipakai dalam perhitungan aliran fluida di reservoir cukup valid karena ditunjang dengan analisa dan eksperimen.

PERMASALAHAN

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan persamaan Darcy yang didapatkan dengan penurunan persamaan Navier Stokes untuk aliran linier dan radial. Aliran linier adalah aliran fluida yang sejajar menuju kesuatu arah pada reservoir, sedangkan aliran radial adalah aliran

fluida yang menuju ke satu titik, dalam hal ini adalah sumur minyak atau gas dalam suatu reservoir. Dengan diturunkan Persamaan Darcy ini maka bisa diketahui asal mula persamaan Darcy dan bisa dikembangkan lagi untuk keperluan / problem yang khusus dalam masalah betuk aliran fluidanya.

METODOLOGI

Penurunan persamaan Darcy dari persamaan Navier Stokes mempergunakan analisa matematika sedang aplikasi persamaan Darcy dengan data lapangan menggunakan analisa numerik.

Prinsip-prinsip penurunan persamaan Darcy dari persamaan Navier Stokes adalah:

Persamaan Navier Stokes merupakan kekekalan momentum pada suatu fluida dan aplikasi hukum Newton ke 2 pada suatu kontinum. Ketika fluida diasumsikan inkompresibel, homogen dan Newtonian, μ adalah konstanta kecepatan dinamik (kecepatan dinamik yang konstan), dan untuk aliran stationer, bergerak pelan (*creeping*), maka Persamaan Navier - Stokes disederhanakan menjadi

Persamaan Stokes. Untuk media porous isotropik permeabilitas bukan lagi tensor orde 2 tetapi menjadi orde 0 atau skalar. Seperti kita ketahui tensor orde 0 disebut skalar, tensor orde 1 disebut dengan vektor selanjutnya adalah tensor orde 2, tensor orde 3 dan seterusnya. Dari penyederhanaan dan pembatasan-pembatasan diatas maka didapatkan persamaan Darcy.

Perhitungan untuk pengaplikasian Hukum Darcy dengan data lapangan digunakan perhitungan numerik untuk mempermudah dan menghemat waktu. Perhitungan numerik mempergunakan program *software* Fortran 95 dan pembuatan grafik kami menggunakan program *software* Exell.

HASIL DAN ANALISIS

Penurunan persamaan Darcy dari persamaan Navier Stokes [3]-[5],[7]

Persamaan Navier Stokes adalah persamaan aliran fluida

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla P + \nabla \cdot T + f \quad (1)$$

Merupakan kekekalan momentum pada suatu fluida dan aplikasi hukum Newton ke 2 pada suatu kontinum, dimana v adalah kecepatan aliran, ρ adalah densiti fluida, P adalah tekanan, T adalah komponen tensor *stress* total (tensor orde 2), f adalah gaya (tiap satuan volume) yang bekerja pada fluida, dan ∇ adalah operator del. f bisa berupa gaya pada badan (gaya tiap satuan volume), misal gaya gravitasi atau gaya sentrifugal.

Ketika fluida diasumsikan inkompresibel, homogen dan Newtonian, μ adalah konstanta kecepatan dinamik (kecepatan dinamik yang konstan). Bentuk *shear stress* adalah

$$\nabla \cdot T = \mu \nabla^2 v, \quad (2)$$

∇^2 adalah vektor laplacian. Persamaan menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + f \quad (3)$$

Derivatif material didefinisikan sebagai operator (per definisi):

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \quad (4)$$

Persamaan menjadi

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + f \quad (5)$$

Persamaan diatas mencerminkan Hukum Newton ke 2.

Untuk aliran stationer, bergerak pelan (*creeping*) dan inkompressible :

$$\frac{D(\mu u_i)}{Dt} = 0 \quad (6)$$

Maka Persamaan Navier - Stokes disederhanakan menjadi Persamaan Stokes

$$-\partial_i P + \mu \nabla^2 u_i + \rho g_i = 0 \quad (7)$$

μ adalah viskositas, u_i adalah kecepatan pada arah i , g_i adalah komponen gravitasi pada arah i , P adalah tekanan, ϕ adalah porositas, dan k_{ij} adalah tensor permeabilitas orde ke 2.

Diasumsikan gaya hambat viscositas adalah linier dengan kecepatan

$$\mu \nabla^2 u_i = -(k_{ij})^{-1} \mu \phi u_j \quad (8)$$

Ini akan memberikan kecepatan pada arah n

$$-(k_{ij})^{-1} \mu \phi u_j = -\partial_i P + \rho g_i \quad (9)$$

Dikalikan dengan $-k_{ni}$

$$k_{ni} (k_{ij})^{-1} \mu \phi u_j = -k_{ni} (\partial_i P - \rho g_i)$$

$$k_{ni} (k_{ij})^{-1} u_j = -\frac{k_{ni}}{\mu \phi} (\partial_i P - \rho g_i)$$

$$k_{ni} (k_{ij})^{-1} = \delta_{nj} \text{ adalah fungsi delta Dirac}$$

$$k_{ni} (k_{ij})^{-1} u_j = u_n$$

$$u_n = -\frac{k_{ni}}{\mu \phi} (\partial_i P - \rho g_i) \quad (10)$$

u adalah kecepatan pada arah n dibagi dengan ϕ

$$u_n \phi = -\frac{k_{ni}}{\mu} (\partial_i P - \rho g_i) \quad (11)$$

Untuk media porous isotropik permeabilitas bukan lagi tensor orde 2 tetapi menjadi orde 0 atau skalar, dimana yang bukan diagonal utama pada permeabilitas adalah nol, dan elemen diagonal utama sama

$$k_{ij} = 0, \text{ untuk } i \neq j \text{ sehingga } k_{ii} = k_{jj} = k$$

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k \quad (12)$$

Persamaan menjadi

$$v = u_n \phi = -\frac{k}{\mu} (\nabla P - \rho g) \quad (13)$$

Kecepatan (v) adalah kecepatan efektif (u_n) dikalikan porositas (ϕ)

Persamaan (13) merupakan Persamaan Aliran Fluida (Sifat fluida dalam reservoir) disebut dengan Hukum Darcy (*Darcy Law*), adalah hukum dasar dari gerakan fluida pada media berpori. Kecepatan dari suatu fluida homogen pada suatu media berpori sebanding dengan gradien tekanan dan berbanding terbalik dengan viscositas fluida.

Untuk reservoir yang datar (tidak miring) maka persamaan Darcy menjadi sbb :

$$v = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (14)$$

v adalah kecepatan (cm/s), Q adalah laju aliran volumetric (cm³/s), A adalah luas penampang lintang batuan (cm²), μ adalah viscositas fluida (centipoise), dP/dx adalah gradien tekanan (atmosfir/cm) dalam arah yang sama dengan v dan Q, dan k adalah konstanta batuan, permeabilitas (Darcy).

Tanda negatif (-) karena gradien tekanan negatif atau tidak searah dengan aliran.

Perhitungan aliran linier:

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{q}{A} dx = -\frac{k}{\mu} dP$$

diintegrasikan

$$\frac{q}{A} \int_0^L dx = -\frac{k}{\mu} \int_{P_1}^{P_2} dP$$

$$\frac{q}{A} x \Big|_0^L = -\frac{k}{\mu} P \Big|_{P_1}^{P_2}$$

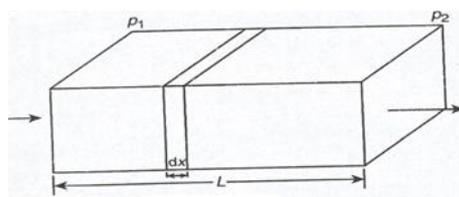
$$\frac{q}{A} (L - 0) = -\frac{k}{\mu} (P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{kA}{\mu L} (P_1 - P_2) \quad (15)$$

Konstanta normalisasi 0,001127 didapatkan dari penyesuaian satuan (*field unit*).

Maka persamaan menjadi :

$$q = 0,001127 \frac{kA}{\mu L} (P_1 - P_2) \quad (16)$$



Gambar 1 Aliran Linier

Perhitungan aliran radial:

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

A adalah luas selimut silinder = keliling lingkaran x tinggi silinder = $2\pi rh$. Persamaan Darcy menjadi :

$$\frac{q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu} \frac{dP}{dr} \quad (17)$$

Tanda + karena radius naik dengan kenaikan tekanan. Kemudian diintegrasikan

$$\frac{q}{2\pi h} \int_{r_{wf}}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{k}{\mu} \int_{P_{wf}}^{P_e} dP$$

$$\frac{q}{2\pi h} (\ln r_e - \ln r_{wf}) = \frac{k}{\mu} (P_e - P_{wf})$$

$$q = \frac{2\pi kh(P_e - P_{wf})}{\mu \ln \frac{r_e}{r_{wf}}} \quad (18)$$

Penyesuaian satuan (*field unit*) maka persamaan menjadi

$$q = \frac{0,00708 kh(P_e - P_{wf})}{\mu \ln \frac{r_e}{r_{wf}}} \quad (19)$$

$$q = 0,001127 \frac{kA}{\mu L} (P_1 - P_2)$$

$$q = \frac{0,00708 kh(P_e - P_{wf})}{\mu \ln \frac{r_e}{r_{wf}}}$$

Untuk *surface unit* $q = B_0 Q_0$

B_0 adalah *oil formation volume factor* [bbl/STB]

Q_0 adalah *oil flow rate* [STB/day]

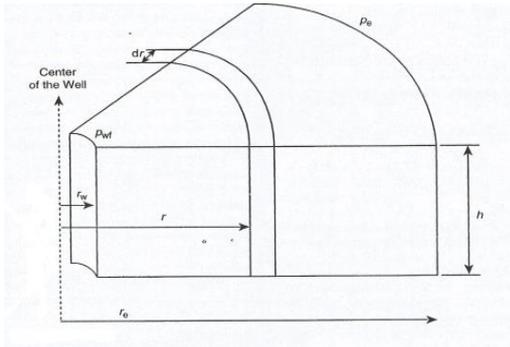
STB adalah *stock - tank barrel*

Sehingga,

$$Q_0 = \frac{0,00708 kh(P_e - P_{wf})}{\mu_0 B_0 \ln \left(\frac{r_e}{r_{wf}} \right)} \quad (20)$$

Tekanan pada radius r didapatkan

$$P = P_{wf} + \frac{Q_0 B_0 \mu_0}{0,00708 kh} \ln \left(\frac{r}{r_{wf}} \right) \quad (21)$$



Gambar 2 Aliran Radial

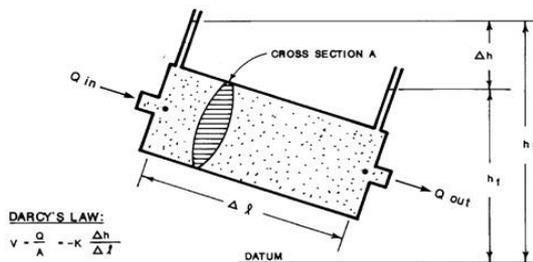
Tabel 1

Perhitungan debit fluida untuk aliran linier dan radial

Debit	
aliran linier	aliran radial
$q = 0,001127 \frac{kA}{\mu L} (P_1 - P_2)$	$q = \frac{0,00708 kh(P_e - P_{wf})}{\mu \ln \frac{r_e}{r_{wf}}}$

Tabel 1 menunjukkan perbedaan perhitungan debit pada reservoir dengan aliran fluida linier dan radial dengan *field unit*.

Percobaan Darcy:



Gambar 3 Percobaan Darcy [6]

Hukum Darcy adalah persamaan yang diturunkan secara fenomenologis menggambarkan aliran fluida melalui media berpori. Hukum ini dirumuskan oleh Henry Darcy berdasarkan hasil percobaan pada aliran air melalui media pasir. Hal ini juga membentuk dasar ilmiah permeabilitas cairan yang digunakan dalam ilmu-ilmu kebumihan. Meskipun Hukum Darcy (ekspresi dari kekekalan momentum) ditentukan secara eksperimental oleh Darcy, telah diturunkan juga dari persamaan Navier Stokes. Hukum Darcy digunakan untuk menggambarkan aliran minyak, air, dan gas melalui reservoir.

PEMBAHASAN DAN DISKUSI

Berikut ini adalah data yang didapatkan dari lapangan [1][2]. Untuk aliran linier data yang dipakai adalah:

L (panjang reservoir) 2000 ft,
 h (tinggi reservoir) 20 ft,
 l (lebar reservoir) 300 ft,
 k (permeabilitas) 100 mD,
 φ (porositas) 15%,
 P₁ (tekanan atas) 2000 psi,
 P₂ (tekanan bawah) 1990 psi,
 μ (viscositas) 2 cp

Untuk aliran radial laju aliran yang stabil:

Q₀ = 600 STB/day,

P (bottom-hole pressure) 1800 psi.

Analisa dari *pressure built up test* data menyatakan bahwa:

k (permeabilitas) 120 mD,
 h (ketebalan uniform) 25ft,
 dan data tambahan adalah
 r_{wf} (jari-jari sumur) 0,25 ft,
 B₀ = 1,25 bbl/STB,
 dan μ₀ = 2,5 cp.

Perhitungan secara numerik dengan mempergunakan program fortran 95.

Untuk aliran linier dipergunakan persamaan (16)

Program:

q=0.d0

q=0.001127d0*k*a*(p1-p2)/(mu*l)

Hasil perhitungan:

q = debit = 1.69050 bbl/day

v = kecepatan aliran = debit/luas penampang reservoir = q/A = 1.581909x10⁻³ ft/s

dimana A = h x l (ft²)

v_{eff} = kecepatan efektif

= kecepatan aliran / porositas

= v/φ = 1.054606x10⁻² ft/s

Untuk aliran radial dipergunakan persamaan (21)

Program:

p=0.d0

n=50

do 10 r=1,n

ar=REAL(r)

rrwf=ar/rwf

m=log(rrwf)

p=pwf+q0*b0*mu*m/(0.00708d0*k*h)

10 continue

Keterangan untuk *coding* Fortran :

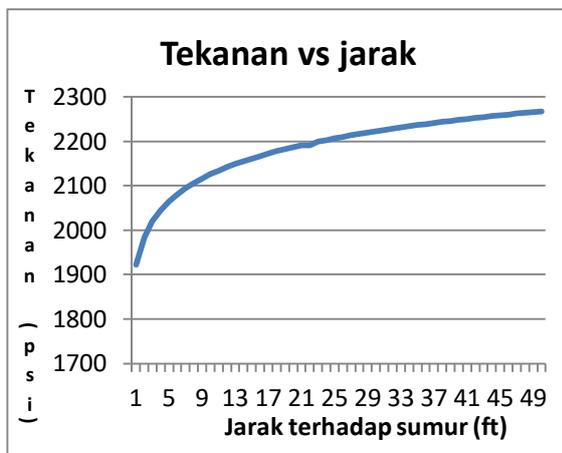
1. do .. continue adalah perintah untuk mengerjakan proses dibawahnya dengan harga r mulai 1 sampai n dengan penambahan angka 1

2. REAL(r) adalah fungsi untuk menjadikan r menjadi bilangan nyata (*real number*)

3. $\log(rrwf)$ adalah fungsi untuk menghitung logaritma alam (\ln) pada bilangan $rrwf$
4. Tanda * adalah untuk perkalian

Hasil perhitungan dalam bentuk grafik terdapat pada gambar 4.

Untuk jarak paling dekat dengan sumur, tekanannya paling kecil (1922,38 psi), untuk jarak paling jauh dari sumur tekanannya paling besar (2267,72 psi). Perbedaan tekanan (gradien tekanan) untuk jarak 1 ft, untuk daerah paling dekat dari sumur perbedaan tekanannya paling besar 1983,57 psi – 1922,38 psi = 61,19 psi, untuk daerah yang paling jauh dari sumur perbedaan tekanannya paling kecil 2267,72 psi – 2265,94 psi = 1,78 psi.



Gambar 4 Grafik Tekanan fungsi jarak dari sumur

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada paper ini, persamaan Darcy sudah diturunkan dari persamaan Navier Stokes, untuk aliran fluida yang linier dan radial. Dalam penggunaannya persamaan Darcy untuk aliran fluida linier bisa dipakai untuk menghitung debit fluida yang mengalir, umumnya dalam satuan bbl/day, juga bisa dipakai untuk menghitung kecepatan fluida yang mengalir dan kecepatan fluida efektif dengan satuan ft/s dan persamaan Darcy untuk aliran fluida radial bisa dipakai untuk menghitung tekanan fluida pada reservoir minyak atau gas pada jarak tertentu dari sumur dengan satuan psi, sehingga dapat diketahui tekanan terbesar adalah yang paling jauh dari sumur dan tekanan terkecil berada di dekat sumur. Serta perbedaan tekanan yang besar pada jari-jari reservoir terdekat dengan sumur dan perbedaan tekanan yang kecil pada jari-jari reservoir yang terjauh dari sumur.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini sudah disetujui oleh Lembaga Penelitian Universitas Trisakti, dan dibiayai oleh Universitas Trisakti dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Nomor: 92/FTKE/7/September/2018.

DAFTAR PUSTAKA

Erwin Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics, 10th edition”, John Wiley & sons, inc.

https://en.wikipedia.org/wiki/Derivation_of_the_Navier%E2%80%93Stokes_equations.

Hugh D. Young and Roger A. Freedman, “University Physics, 12nd edition”, Pearson Addison Wesley.

Mary L. Boas, “Mathematical Methods in the Physical Science”, John Wiley & Son

Tarek Ahmed and D. Nathan Meehan, “Advanced Reservoir Management and Engineering, Second edition”, Gulf Professional Publishing USA.

Tarek Ahmed, Ph.D., P.E., “Reservoir Engineering Handbook, Second edition”, Gulf Professional Publishing USA.

www.env.gov.bc.ca