UNPjoMath Vol. 4 No 1 Maret 2021
ISSN: 977 235516589 Page 55-59

Menentukan Luas Daerah Segitiga Spheris

Mulyadi[#1], Mirna[*2], Riry Sriningsih[*3]

[#]*Student of Mathematics Department, Universitas Negeri Padang*
[*]*Lecturer of Mathematics Department, Universitas Negeri Padang*
Jl. Prof. Dr. Hamka, Padang, Indonesia

[1]darkleo2407@gmail.com
[2]mirna_ujang@yahoo.com
[3]srirysriningsih@yahoo.com

Abstract**—**Spherical Triangle is a triangle on surface of ball that formed by circles which cutting the ball. The circle that forms a Spherical Triangle are circles which cutting the ball in center. Area of Spherical Triangle is different from Euclid Triangle. This study look at how to find the Area of Spherical Triangle. The result obtained in this study is how to find the area of Spherical Triangle that must knows about dihedral angle or trihedral angle that forms spherical triangle.

Keywords **—** spherical triangle, dihedral angle, trihedral angle.

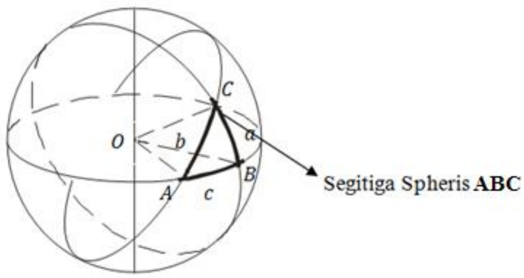
Abstrak**—**Segitiga Spheris merupakan sebuah segitiga pada permukaan bola yang dibentuk oleh lingkaran-lingkaran yang memotong bola tersebut. Lingkaran yang membentuk sebuah segitiga Spheris merupakan lingkaran yang memotong bola melewati titik pusatnya. Luas daerah dari Segitiga Spheris tidak sama dengan Segitiga Euclid. Penelitian ini mengkaji cara menentukan luas daerah Segitiga Spheris. Hasil yang didapat pada penelitian ini adalah untuk menentukan luas daerah Segitiga Spheris harus diketahui sudut-sudut dihedral atau sudut-sudut trihedral dari segitiga spheris tersebut.

Kata Kunci**—**segitiga spheris, sudut dihedral, sudut trihedral.

PENDAHULUAN

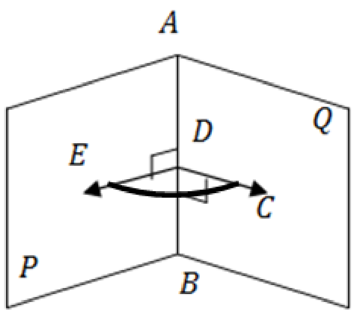
Segitiga merupakan sebuah bangun datar yang dibentuk oleh tiga titik yang tidak segaris dan setiap titik tersebut dihubungkan oleh sebuah garis. Segitiga dapat dibedakan dalam beberapa bentuk berdasarkan sisi dan sudutnya. Berdasarkan sisi, ada 3 jenis segitiga yang dikenal yaitu segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sebarang. Berdasarkan sudut, ada 3 jenis segitiga yang dikenal yaitu segitiga lancip, segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul.

Kebanyakan orang hanya mengenal jenis segitiga pada bidang datar, pada dasarnya ada jenis segitiga yang bentuk permukaannya tidak datar yaitu segitiga speris. Segitiga spheris merupakan sebuah segitiga yang terdapat pada permukaan bola yang mana segitiga spheris ini dibentuk oleh bidang-bidang yang memotong sebuah bola dan membentuk lingkaran besar. Lingkaran besar dibentuk oleh bidang yang memotong bola melewati titik pusat bola seperti gambar 1.



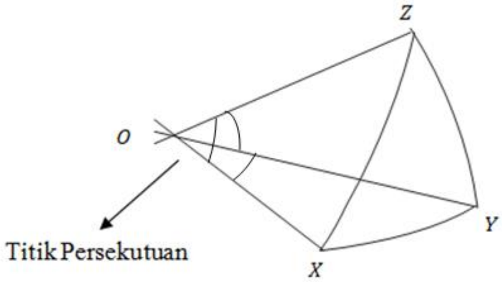
Gambar 1. Segitiga Spheris ABC

Segitiga spheris merupakan segitiga yang terdapat pada permukaan bola sehingga segitiga ini bukanlah bangun datar, maka dalam segitiga spheris dikenal sudut dihedral dan sudut trihedral yang membentuk segitiga spheris tersebut. Sudut dihedral adalah sudut yang terbentuk oleh perpotongan dua buah bidang dan membentuk sebuah garis persekutuan atau garis potong seperti gambar 2.



Gambar 2. Sudut Dihedral

Sudut trihedral merupakan sudut yang terbentuk dari perpotongan tiga bidang yang mempunyai satu dan hanya satu titik persekutuan seperti pada gambar 3.



Gambar 3. Sudut Trihedral

Jika luas daerah segitiga dapat ditentukan dengan mengalikan salah satu sisi dari segitiga tersebut dengan tinggi segitiga kemudian dibagi dua, yang mana tinggi segitiga haruslah tegak lurus dengan sisi yang akan dikalikan maka hal ini belum tentu dapat kita gunakan dalam menentukan luas daerah segitiga spheris. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji bagaimana menentukan luas daerah Segitiga Spheris.

METODE

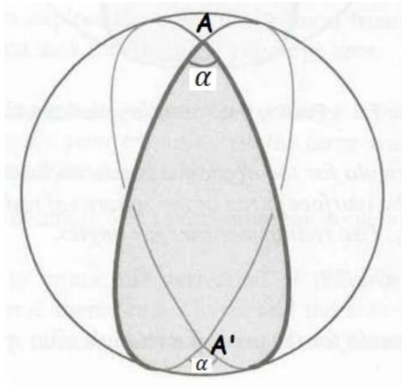
Penelitian ini adalah penelitian dasar. Adapun metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan kajian kepustakaan. Langkah kerja yang dilakukan adalah meninjau permasalahan yang dihadapi, kemudian mencari teori-teori yang dapat dijadikan penunjang untuk menjawab permasalahan tersebut.

Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Menelaah tentang definisi Segitiga Spheris.
2. Menelaah tentang sudut dihedral dan trihedral beserta teorema-teorema yang berlaku pada sudut tersebut. Kemudian mengkaitkan antara sudut dihedral dan trihedral tersebut dengan definisi Segitiga Spheris.
3. Menelaah hubungan sudut dan sisi berdasarkan teorema ataupun sifat dasar yang telah diperoleh sebelumnya.
4. Menentukan luas Segitiga Spheris berdasarkan teorema ataupun sifat dasar yang telah diperoleh sebelumnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini dibahas tentang bagaimana menentukan luas daerah dari sebuah segitiga spheris jika diketahui besar ketiga sudut yang membentuk segitiga tersebut dan jika diketahui sudut-sudut trihedralnya. Sebelum menentukan luas daerah dari sebuah segitiga spheris, maka diperlukan hal berikut ini. Perhatikan gambar 4 berikut:



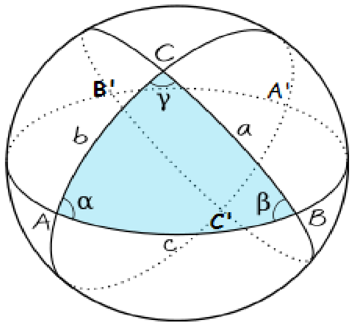
Gambar 4. Lune

Misalkan AA' adalah sebuah daerah yang dinamakan lune yang terbentuk dari perpotongan dua buah lingkaran besar pada bola yang memiliki besar sudut α. Jika α sebesar $\frac{\pi}{2}$ maka bola tersebut akan dibagi menjadi empat daerah yang sama sehingga luas dari sebuah lune adalah πr^2. Jika besar sudut lune adalah α maka luas daerah dari lune tersebut adalah

$$S_{AA'} = \frac{\alpha}{360} x 4\pi r^2 \qquad (1)$$
$$S_{AA'} = \frac{\alpha}{2\pi} x 4\pi r^2$$
$$S_{AA'} = 2\alpha r^2$$

A. *Luas Segitiga Spheris Jika Diketahui Sudut-Sudut Dihedral*

Segitiga spheris dibentuk oleh perpotongan tiga buah lingkaran besar yang melewati titik pusat bola. Perpotongan dari tiga buah lingkaran tersebut membentuk sudut-sudut yaitu sudut α, β, dan γ seperti gambar 5 berikut:

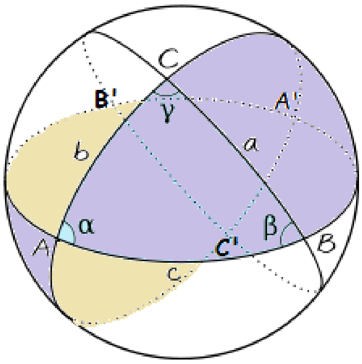


Gambar 5. Daerah Segitiga Spheris

UNPjoMath Vol. 4 No 1
ISSN: 977 235516589

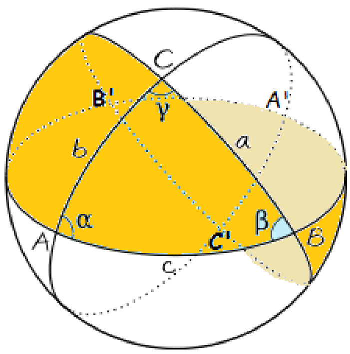
Maret 2021
Page 55-59

Perhatikan Gambar 5. A', B' dan C' berturut-turut merupakan pencerminan titik A, B, dan C terhadap titik pusat bola. Bidang yang dibatasi oleh AA', BB' dan CC' tersebut dinamakan lune. Selanjutnya dapat diperhatikan bahwa segitiga spheris ABC dibentuk oleh ketiga lune tersebut. $A'B'C'$ merupakan pencerminan dari ABC terhadap titik pusat bola sehingga luas dari segitiga ABC sama dengan luas segitiga $A'B'C'$.



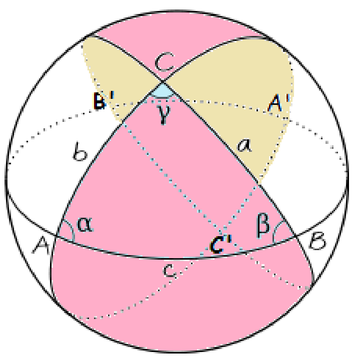
Gambar 6. Daerah Lune α

Luas lune $S_{AA'} = \frac{\alpha}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\alpha r^2$ (2)



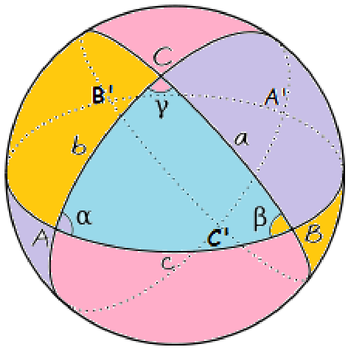
Gambar 7. Daerah Lune β

Luas lune $S_{BB'} = \frac{\beta}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\beta r^2$ (3)



Gambar 8. Daerah Lune γ

Luas lune $S_{CC'} = \frac{\gamma}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\gamma r^2$ (4)



Gambar 9. Permukaan bola ditutupi Lune α, β, γ

Jika diperhatikan gambar 9 dapat dilihat bahwa luas permukaan bola dapat ditutupi oleh masing-masing dua buah lune AA', BB', dan CC' tetapi lune tersebut menutupi tiga kali segitiga spheris ABC dan tiga kali segitiga spheris $A'B'C'$ sehingga didapatkan luas permukaan bola adalah

$$S_{bola} = 2S_{AA'} + 2S_{BB'} + 2S_{CC'} - 4S_{ABC} \quad (5)$$

Dari persamaan …(1),…(2), dan …(3) diperoleh

$$4\pi r^2 = 2(2\alpha r^2) + 2(2\beta r^2) + 2(2\gamma r^2) - 4S_{ABC}$$

$$4S_{ABC} = 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4\pi r^2$$

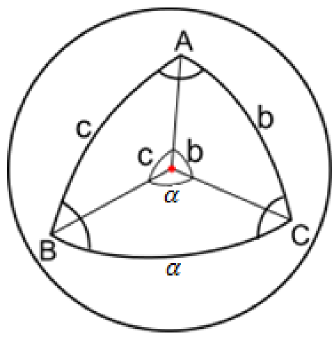
$$S_{ABC} = r^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2$$

Sehingga diperoleh luas daerah segitiga spheris jika diketahui sudut dihedralnya yaitu α, β, dan γ adalah

$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2 \quad (6)$$

B. *Luas Segitiga Spheris Jika Diketahui Sudut-Sudut Trihedral*

Segitiga Spheris dibentuk oleh perpotongan tiga buah lingkaran besar yang melewati titik pusat bola. Ketiga bidang tersebut berpotongan pada satu titik yaitu titik pusat sehingga membentuk sudut trihedral seperti gambar 10 berikut:



Gambar 10. Segitiga Spheris

Perhatikan gambar 10 a, b, dan c adalah sudut-sudut trihedral yang dibentuk oleh perpotongan tiga buah bidang lingkaran. Untuk menentukan luas segitiga spheris membutuhkan sudut-sudut dari segitiga spheris itu sendiri yaitu α, β, dan γ. Pada gambar sudut-sudut tersebut belum diketahui sehingga kita harus menentukan besar sudut-sudut tersebut. Berdasarkan sifat-sifat segitiga spheris yaitu

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (7)$$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$ (8)
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ (9)
persamaan (7), (8), dan (9) dapat diubah menjadi

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (10)$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \quad (11)$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (12)$$

Untuk menentukan sudut α :
Misalkan $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (13)$$

Subtitusikan persamaan (10) ke (13), maka diperoleh

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-(\cos^2 b+\cos^2 c)+(\cos^2 b \cos^2 c)-(\cos^2 a-2\cos a \cos b \cos c+\cos^2 b \cos^2 c)}{\sin^2 b \sin^2 c} \quad (14)$$

Selesaikan persamaan (14) sehingga diperoleh

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\sin \alpha = \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin b \sin c}$$

Maka diperoleh besar sudut α adalah

$$\alpha = arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin b \sin c} \quad (15)$$

Untuk besar sudut β:
Misalkan $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, maka

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \quad (16)$$

Subtitusikan persamaan (8) ke (16), maka diperoleh

$$\sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = \frac{(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 c)-(\cos b-\cos a \cos c)^2}{\sin^2 a \sin^2 c}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1-(\cos^2 a+\cos^2 c)+(\cos^2 a \cos^2 c)-(\cos^2 a-2\cos a \cos b \cos c+\cos^2 a \cos^2 c)}{\sin^2 a \sin^2 c} \quad (17)$$

Selesaikan persamaan (17) sehingga diperoleh

$$\sin^2 \beta = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 c}$$

$$\sin \beta = \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin c}$$

diperoleh besar sudut β adalah

$$\beta = arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin c} \quad (18)$$

Untuk besar sudut γ :
Misalkan $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, maka

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma \quad (19)$$

Subtitusikan persamaan (9) ke (19), maka diperoleh

$$\sin^2 \gamma = 1 - \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right)^2$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-(\cos c-\cos a \cos b)^2}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1-(\cos^2 a+\cos^2 b)+(\cos^2 a \cos^2 b)-(\cos^2 c-2\cos a \cos b \cos c+\cos^2 a \cos^2 b)}{\sin^2 a \sin^2 b} \quad (20)$$

Selesaikan persamaan (20) sehingga diperoleh

$$\sin^2 \gamma = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\sin \gamma = \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin b}$$

diperoleh besar sudut γ adalah

$$\gamma = arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin b} \quad (21)$$

Setelah didapatkan besar $\alpha, \beta,$ dan γ, maka subtitusikan persamaan tersebut pada persamaan luas daerah segitiga spheris yang telah didapatkan sehingga diperoleh

$$S_{ABC} = \left(arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin b \sin c} + arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin c} + arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin a \sin b} - \pi \right) r^2 \quad (22)$$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan, maka diperoleh :

1. Luas daerah segitiga spheris jika diketahui sudut-sudut dihedral misalkan $\alpha, \beta,$ dan γ dan jari-jari bola r adalah

$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2$$

2. Luas segitiga spheris jika diketahui sudut-sudut trihedral misalkan a,b, dan c dan jari-jari bola r adalah

$$S_{ABC} = \left(arc \sin \frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}}{\sin b \sin c} + \right.$$

$$arc\sin\frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)^{\frac{1}{2}}}{sin\ a\ sin\ c}+$$
$$\left. arc\sin\frac{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)^{\frac{1}{2}}}{sin\ a\ sin\ b}-\pi\right)r^2.$$

REFERENSI

[1] Anggraini, Mellysa Putri. 2012. *Sifat-Sifat yang Berhubungan dengan Sudut dan Sisi pada Segitiga Spheris*, Skripsi. Padang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.

[2] Ayres, JR. Frank. 1954. *Theory And Problems (of Plane and Spherical) Trigonometry*, New York: Schaum Publisning CO.

[3] Barnelt, R. A., Ziegler, M. R., dan Byleen, K.E.(2007). *Analytic Trigonometry*, United States of America: John Wiley & Sons.

[4] Brannan, D. A., Esplen, M. F., dan Gray, J.J. (1999). *Geometry*, Cambridge: University Press.

[5] Lewis, H. 1973. *Geometry A Contemporary Course 3rd.Edition*, New York: Mccormick-Mathers Publishing Company.

[6] Kusno. 2004. *Geometri*, Jember: Universitas Jember.