UNPjoMath Vol. 3 No 3 September 2020
ISSN: 977 235516589 Page 132-136

Metode Euler-Milstein untuk Solusi Numerik Persamaan Diferensial Stokhastik *Ornstein-Uhlenbeck*

Taufik Iqbal[#1], Muhammad Subhan[*2]

[#]*Jurusan Matematika, Universitas Negeri Padang*
Jl.Prof.Hamka,Padang,Sumatera Barat, Indonesia 25131

[1]taufikyoungpriece@gmail.com

[2]13subhan@fmipa.unp.ac.id

Abstract —The Ornstein-Uhlenbeck equation is a stochastic differential equation, this equation is often used in the financial mathematical model. However, to find the solution the Ornstein-Uhlenbeck equation is difficult to complete analytic so it can also be solved by looking for numerical solutions. To get a better numeric solution it is required a numeric method by looking at converged. The purpose of the study is to examine the Euler-Milstein method formula for the solution of the Ornstein-Uhlenbeck equation, shows that numerical solution of Ornstein-Uhlenbeck equation that resulted by Euler-Milstein method has strong convergence to exact solutions and create an algorithm to find the solution of Ornstein-Uhlenbeck equation with the Euler-Milstein method.

Keywords — stochastic differential Equations, ornstein-uhlenbeck equation, euler- milstein method

Abstrak—Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* merupakan suatu persamaan diferensil stokastik, persamaan ini banyak digunakan dalam model matematika keuangan. Namun, dalam mencari solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* sulit diselesaikan secara analitik sehingga dapat juga diselesaikan dengan mencari solusi numerik. Untuk mendapatkan solusi numerik yang lebih baik diperlukan metode numerik dengan melihat kekonvergenannya. Tujuan dari penelitian adalah mengkaji formula metode Euler-Milstein untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* selanjutnya menunjukkan bahwa solusi pada persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* yang didapat dari metode Euler-Milstein ini memiliki solusi yang konvergen atau mendekati solusi eksaknya serta membuat algoritma untuk mencari solusi persamaan Ornstein-uhlenbeck dengan metode Euler-Miltein.
ditulis.

Kata Kunci — persamaan diferensial stokastik, Persamaan *ornstein-uhlenbeck*, metode euler-milstein.

PENDAHULUAN

Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* merupakan suatu proses stokastik yang diberikan oleh persamaan diferensial stokastik, dengan aplikasi dari model ini yaitu dalam bidang matematika keuangan dan Ilmu fisika. Persamaan diferensial stokastik merupakan model untuk menjawab masalah-masalah yang distribusinya selalu berubah setiap perubahan waktu, maka dapat digambarkan sebagai sebuah proses stokastik. Sebuah persamaan diferensial stokastik dapat diperoleh dengan menambah sebuah suku gangguan yang bersifat random pada persamaan diferensial deterministik. Dan gangguan yang sifatnya acak disebut sebagai Brownian Motion/ proses Wiener.

Dalam sejarah, contoh tertua persamaan ini telah digunakan untuk menggambarkan gerak partikel di bawah pengaruh gesekan, dinamai oleh Leonard Ornstein dan George Eugene Uhlenbeck [1]. Contoh model yang menggunakan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ini misalnya pergerakan harga saham dan pergerakan angin. selisih antara solusi hampiran dan solusi sejati disebut dengan galat atau *error*. Tingkat bunga bank dan tingkat kemajuan usaha suatu perusahaan berubah-ubah secara tidak menentu, hal ini berpengaruh pada pergerakan harga saham,sehingga dapat dikatakan pergerakan harga saham mengikuti proses stokastik karena nilainya selalu berubah terhadap waktu dengan pola yang tidak terduga. Perilaku pergerakan harga saham dapat diestimasi menggunakan model pergerakan harga saham yang terkait dengan suatu persamaan differensial stokastik (PDS). Contoh lain dari persamaan diferensial stokastik ini yaitu model pergerakan angin yang dipengaruhi oleh tekanan udara dan kecepatan angin.

Dalam mencari solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* secara analitik yang sulit untuk didapatkan karena persamaan yang rumit dapat juga diselesaikan dengan metode numerik. Metode numerik disebut juga alternatif dari metode analitik, disebut demikian karena terkadang persoalan matematika sulit untuk diselesaikan secara analitik dapat diselesaikan dengan metode numerik. Namun dengan metode numerik kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik ini disebut juga solusi hampiran

Beberapa Metode numerik yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi sebuah persamaan differensial stokastik telah dikembangkan dengan masing-masing sifat konvergensinya, antara lain: metode Euler-Maruyama, metode Euler-Milstein, metode implisit dan metode eksplisit. Sebagian besar metode numerik pada persamaan diferensial stokastik itu diturunkan dari ekspansi Itô Taylor.

uhlenbeck. Untuk mengetahui apakah metode numerik yang digunakan telah diperoleh hasil yang diinginkan, perlu adanya analisis numerik,. Dalam menganalisis sebuah metode numerik,hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi .

Untuk mengetahui apakah dengan metode numerik yang kita gunakan telah memperoleh hasil yang diinginkan, perlu adanya analisis numerik dalam menganalisis sebuah metode numerik, hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi. Untuk membuktikan solusi numerik *Ornstein-Uhlenbeck* yang didapat menggunakan metode numerik ini mendekati solusi eksak dan dapat diterima dengan presentasi galat tertentu atau konvergen kuat. Kita membuktikan bahwa metode Euler-Milstein konvergen kuat jika fungsi suku deterministik dan suku difusi memenuhi kondisi lokal Lipschitz.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan kajian kepustakaan. Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah-langkah kerja yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari literatur mengenai persamaan diferensial stokastik dan metode numerik
2. Mengkaji prinsip penggunaan metode Euler-Mistein untuk menyelesaikan persamaan diferensial stokastik.
3. Membuktikan kekonvergenan metode Euler-Mistein untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck.*
4. Menyusun algoritma untuk pembuatan program komputer metode Euler-Mistein untuk menyelesaikan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck.*
5. Melakukan penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Euler-Milstein untuk persamaan Ornstein-Uhlenbeck

Sebagian besar metode numerik pada persamaan diferensial stokastik itu diturunkan dari ekpansi deret taylor.

Diberikan PDS Ornstein-Uhlenbeck:

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))dt + \sigma dWt \qquad t \in [0,T] \tag{1}$$

Secara umum dapat kita modelkan :

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk integral:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(X(t))dt + \int_{t_0}^{t} g(X(t))dW(t)$$

Diberikan dalam bentuk dikstritnya $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$, terhadap waktu yang kontinu sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(X(t))dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(X(t))dW(t) \tag{3}$$

Gunakan Ito taylor untuk mengekspasikan f dan g untuk mendapatkan :

$$df(X(s)) = (f'(X(s)f(X(s)) + \frac{1}{2}f''(s)(g(s))^2)d(s) + (f'(s)g(s))dW(s)$$

$$dg(X(s)) = (g'(X(s)g(X(s)) + \frac{1}{2}g''(s)(g(s))^2)d(s) + (g'(s)g(s))dW(s)$$

Diberikan $(t < s < t_{n+1})$, terhadap waktu yang kontinu sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(X(t)) = f(X(t)) + \int_t^s \left(f'(X(u)f(X(u) + \frac{1}{2}f''X(u)(g(x(u))^2 \right) du + \int_t^s \left(f'X(u)g(X(u)\right)dW(u) \tag{4}$$

$$g(X(t)) = g(X(t)) + \int_t^s \left(g'(X(u)g(X(u) + \frac{1}{2}g''X(u)(g(x(u))^2 \right) du + \int_t^s \left(g'X(u)g(X(u)\right)dW(u) \tag{5}$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + f(X(t))\int_{t_n}^{t_{n+1}} d(t) + g(X(t))\int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(t) + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_t^s g'(u)g(u)dW(u)dW(t) \tag{6}$$

Aplikasikan *Euler discretization* ke persamaan terakhir

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_t^s g'(u)g(u)dW(u)dW(t) \approx g'(s)g(u)\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_t^s dW(u)dW(t) \tag{7}$$

Sekarang misalkan $dY(s) = W(s)dW(s)$. Gunakan Lemma Ito, untuk mempermudah memperlihatkan $Y(s)$ memiliki solusi yaitu

$$Y(s) = \tfrac{1}{2}\left(W(s)\right)^2 - \tfrac{1}{2}s$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t)dW(t) = Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{1}{2}(W(t_{n+1}))^2 - \frac{1}{2}(W(t_n))^2 - \frac{1}{2}d(s) \tag{8}$$

Subsitusikan kembali ke dalam persamaan (7)

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_t^s g'(u)g(u)dW(u)dW(t) &\approx \frac{1}{2}g'(u)g(u)\left((W(t_{n+1}) - W(t_n))^2 - d(s)\right)\\ &= \frac{1}{2}g'(u)g(u)\left((\Delta W(t_n))^2 - d(s)\right)\end{aligned}$$

Dimana $\triangle W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$. Setelah itu subsitusikan persamaan (6) dan (8) untuk mendapatkan persamaan umun Euler Milstein untuk PDS *Ornstein-Uhlenbeck.*

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + f(X(t_n))(t_{n+1} + t_n) + g(X(t_n))(W(t_{n+1}) - W(t_n)) + \frac{1}{2}g(X(t_n)g'(X(t_n))(\Delta W(t_{n+1})^2 - d(s))$$

Dimana $n = 0, \dots, N$,$f\big(X(t_n)\big) = \lambda\big(\mu - X(t_n)\big)$ dan $g\big(X(t_n)\big) = \sigma$

Dua suku pertama pada persamaan diatas merupakan metode Euler-Maruyama dan suku selanjutnya merupakam metode Euler-Mistein untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*

B. Kekonvergenan Metode Euler –Milstein untuk *Ornstein-Uhlenbeck*

Diberikan PDS *Ornstein-Uhlenbeck*:

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))dt + \sigma dWt \quad t \in [0,T] \qquad (1)$$

Secara umum dapat kita modelkan :

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad t \in [0,T] \qquad (2)$$

E-Mistein didiskritisasi pada interval $[0,T]$ kedalam N selang, dimana lebar selang $h = \frac{T}{N}$

$$0 = t_0, \ t_1, \ t_2, \dots, \ t_{N-1}, \ t_N = T$$

untuk setiap $n \in \{0,1,2,\dots,N-1\}$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s))ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s))dW_s + \frac{1}{2}g(x(s))$$
$$((\Delta W_{n+1})^2 - h)$$

Untuk S∈ $[t_n, t_{n+1}]$ kita dapat menggunakan ekspansi deret taylor dari f dan g sekitar $X(t_n)$ untuk merupakan

$$f(x(s)) = f(X(t_n)) + Rf(S; t_n, X(t_n))$$
$$g(x(s)) = g(X(t_n)) + Rg(S; t_n, X(t_n))$$

Dimana $Rf \ dan \ Rg$ berbentuk

$$Rf(s; \ t_n, X(t_n)) = f'(x^*)(X(s) - X(t_n)) \qquad (3)$$
$$Rg(s; \ t_n, X(t_n)) = g'(X^{**})(X(s) - X(t_n)) \qquad (4)$$

Dimana $X^*, X^{**} \in [X(t_n), X(t_{n+1})]$

Telah dibuktikan bahwa Fungsi f dan g merupakan lipschitz global sehingga terdeferensial dimana pun kita peroleh:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(X(t_n))dS + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(X(t_n))dWs + \int_{t_n}^{t_{n+1}} RfdS$$
$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} Rg \ dW_s + \frac{1}{2}g(X(t_n))$$
$$((\Delta W_{n+1})^2 - d(s))$$

Andaikan e_n merupakan error saat waktu t_n, dan anggap bahwa tanpa kehilangan generalitas bahwa $h \le 1$:

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}) - y_{n+1}$$
$$= x(t_n) - y_n + hf(y_n) + \Delta W_{n+1}$$
$$g(x(t_n)) - \Delta W_{n+1}g(y_n) + \frac{1}{2}g(x(t_n))$$
$$g'(x(t_n))(\Delta W_{n+1})^2 - d(s)[g(x(t_n))$$
$$g'(x(t_n)) - g(y_n)g'(y_n)] + \tilde{R}_f + \tilde{R}_g$$

Dimisalkan $(X(t_n)) - f(y_n) = a$, $g(X(t_n)) - g(y_n) = b$, dan $g(X(t_n))g'(X(t_n)) - g(y_n)g'(y_n) = c$ Karena fungsi $g(X)$ merupakan fungsi konstan maka $b = 0$,maka :

$$e_{n+1} = e_n + ha + \frac{1}{2}((\Delta W_{n+1})^2 - h)c + \tilde{R}_f + \tilde{R}_g$$

Dimana $e_0 = 0$ ΔW_{n+1} adalah independen terhadap a, b, c dan e_n dengan

$$E[\Delta W_{n+1}] = 0 \, , E[(\Delta W_{n+1})^2] = h$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas dari persamaan diatas dan mengambil ekspetasinya

$$E[e_{n+1}^2] = E[e_n^2 + h^2a^2 + \frac{1}{2}h^2c^2 + \tilde{R}^2$$
$$+2(e_nha + e_n\widetilde{R}_f + e_n\widetilde{R}_g +$$
$$ah\tilde{R} + \frac{1}{2}((\Delta W_{n+1})^2 - d(s)) \ c\widetilde{R}]$$

Karena Δw_{n+1} independen sehingga persamaannya saling bebas dan dapat kita lakukakan seperti

$$E[e_{n+1}^2] \le E[|e_n|^2 h^2 k_4 |e_n|^2 + \frac{1}{2}h^2k_4^2|e_n|^2$$
$$\bar{R}^2 + 2(k_4h|e_n|^2 + |e_n\overline{Rf}| + hk_4$$
$$|\bar{R}| + \frac{1}{2}|k_4((\Delta w_{n+1})^2 - h)^2|)e_n\bar{R}$$
$$\le E[|e_n|^2] + h^2k_4E[|e_n|^2] + \frac{1}{2}h^2k_4^2$$
$$[|e_n|^2] + k_{11}h^3 + 2k_4hE|e_n|^2$$
$$+2\frac{h}{2}E[|e_n|^2] + 2.\frac{1}{2h}k_9h^3 2.\frac{1}{2}hk_4$$
$$E[|\bar{R}|^2] + 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}k_4(E[|\Delta w_{n+1}|^4]$$
$$-2E[|\Delta w_{n+1}|^2]E[h^2])E[|e_n|^2] \ E[|\bar{R}|^2])$$
$$\le E[|e_n|^2] + h^2k_4E[|e_n|^2]\frac{1}{2}h^2k_4^2E[|e_n|^2]$$
$$+k_{11}h^3 + 2k_4hE|e_n|^2 + \ hE[|e_n|^2]$$
$$+\frac{1}{h}k_9h^3 + hk_4k_{11}h^3 - \frac{1}{2}k_4 2h^2k_{11}$$
$$[|e_n|^2]$$
$$= E[|e_n|^2](1+h^2k_4 + \frac{1}{2}h^2k_4^2 + 2k_4h$$
$$h - \frac{1}{2}k_4 2h^2k_{11}) + h^4k_4k_{11} +$$
$$h^3\left(k_{11} + \frac{1}{h}k_9\right)$$
$$= E[|e_n|^2](+h^2k_4 + \frac{1}{2}h^2k_4^2 + 2k_4h + h$$
$$-\frac{1}{2}k_4 2h^2k_{11}) + h^4k_4k_{11} +$$
$$h^3\left(k_{11} + \frac{1}{h}k_9\right)$$
$$= E[|e_n|^2](1 + h^4k_4k_{11} + h^2(\frac{1}{2}k_4^2 + k_4$$
$$-\frac{1}{2}k_4k_{11}) + h(2k_4 + 1)) + h^4k_4k_{11}$$
$$h^3\left(k_{11} + \frac{1}{h}k_9\right)$$

Sehingga kita dapatkan

$$E[e_{n+1}^2] = E[|e_n|^2](1 + h^4k_4k_{11} + h^2$$
$$\left(\frac{1}{2}k_4^2 + k_4 - \frac{1}{2}k_4k_{11}\right)$$
$$+h(2k_4 + 1)) + \ h^4k_4k_{11}$$

Misalkan

$$K = \max(k_4k_{11}, \frac{1}{2}k_4^2 + k_4 - \frac{1}{2}k_4k_{11}, 2k_4$$
$$1, k_{11} + \frac{1}{h}k_9)$$

Maka kita dapatkan

$$E[e_{n+1}^2] = E[|e_n|^2](1 + Kh^4 + Kh^2 + Kh)$$
$$+Kh^4 + Kh^3$$

Kemudian karena $e_0 = 0$

$$[|e_n|^2] = \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} E[|e_{i+1}|^2 - |e_i|^2]$$
$$\le \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} E[|e_i|^2]\,[Kh^4 + Kh^2 + Kh]$$
$$+K(h^4 + h^3)$$
$$= KT(h^3 + h^2) + \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} E[|e_i|^2]$$
$$[Kh^4 + Kh^2 + Kh]$$

Sekarang

$$[|e_{n+1}^2| - |e_n^2|] \le E[|e_i|^2][Kh^4 + Kh^2 + Kh]$$
$$+K(h^4 + h^3)$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema Diskrit Gronwall

$$E[|e_n|^2] \le KT((h^3 + h^2)$$
$$e^{\sum_{i=1}^{N-1}(Kh^4 + Kh^2 + Kh)}$$
$$= \ KT((h^3 + h^2)e^{(KTh^3 + KTh + KT)}$$
$$E[|e_n|^2] \le 3KThe^{3KT}$$
$$E[|e_n|^2] \le Ch$$

Dimana

$$C = 3KTe^{3KT}$$

Sehingga

$E[|e_n|^2] \leq Ch$

Jadi, diperoleh $E[|e_N|^2] \leq Ch$ maka berdasarkan definisi kekonvergenan metode Euler-Milstein memiliki solusi konvergen kuat untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck.*

C. Algoritma Metode Euler –Milstein

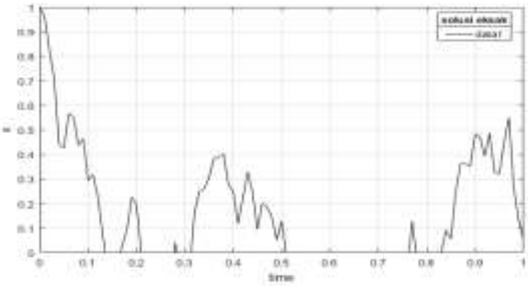
Berdasarkan bentuk umum metode Euler-Milstein diatas, maka dapat disusun algoritma dari metode Euler-Milstein untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* Algoritmanya adalah sebagai berikut:

Masukan : fungsi $f(X(t)) = \lambda(\mu - X(t))$ dan $g(X(t)) = \sigma$, didiskritisasi pada interval $[0, T]$ kedalam N selang, lebar selang $h = \frac{T}{N}$, dan X_0 (nilai awal).

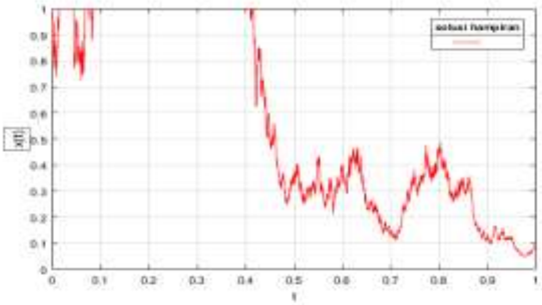
Keluaran: Solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* dengan metode Euler-Milstein.

Proses : (1) $dt \coloneqq \frac{T}{N}$,(2) dW bilangan acak berdistribusi normal dan $W \coloneqq cumsum(dW)$, (3) $Dt \coloneqq R * dt$ dan $L \coloneqq \frac{N}{R}$. (ukuran langkah metode Euler-Milstein), (4) $X_i \coloneqq X_0$, (5) for $i \coloneqq 1$ to L , $Winc \coloneqq sum(dW(R * j - 1$
$: R * j))$; , $X_{i+1} \coloneqq X_i + f(X_i) * Dt + g(X_i) * Winc$
$0.5 * (sig\text{^}2) * ((Winc\text{^}2) - Dt)$,End.

Dari Algoritma diatas didapatkan dengan program matlab grafik dibawah :

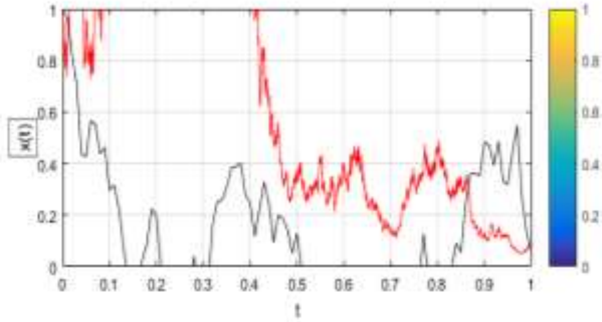


(a)



(b)

Gambar 1 Grafik Solusi Eksak (a) dan Solusi Hampiran (b)Dengan Metode Euler-Milstein untuk Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*



(c)

Gambar 2. Grafik Plot Kekonvergenan **(c)** Metode Euler-Milstein untuk Persamaan Ornstein-Uhlenbeck

Keterangan :

Pada persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* karena fungsi f dan g memenuhi kondisi Lipschitz, dan telah ditunjukkan bahwa metode Euler-Milstein memiliki kekonvergenan kuat dengan $\gamma = 1$. Pada grafik kekonvergenan diatas semakin kecil nilai γ kekonvergenannya semakin kuat karena grafiknya semakin mendekati grafik fungsi *Ornstein-Uhlenbeck*

SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang dilakukan dan simulasi secara numerik didapat kesimpulan bahwa:

1.Formula metode Euler-Milstein untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t)$$

Yaitu:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + f(X(t_n))(t_{n+1} - t_n) + g(X(t_n))(W(t_{n+1}) - W(t_n)) + \frac{1}{2} g(X(t_n)) g'(X(t_n)) ((\Delta W(t_{n+1}))^2 - d(s)$$

2. Pada penelitian ini diperoleh $E[|e_N|^2] \leq Ch$ maka berdasarkan definisi kekonvergenan metode Euler-Maruyama memiliki solusi konvergen kuat untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck.*

3. Algoritma metode Euler-Maruyama untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* yaitu

Masukan : fungsi $f(X(t)) = \lambda(\mu - X(t))$ dan $g(X(t)) = \sigma$, didiskritisasi pada interval $[0, T]$ kedalam N selang, lebar selang $h = \frac{T}{N}$, dan X_0 (nilai awal).

Keluaran: Solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* dengan metode Euler-Milstein.

Proses : (1) $dt \coloneqq \frac{T}{N}$,(2) dW bilangan acak berdistribusi normal dan $W \coloneqq cumsum(dW)$, (3) $Dt \coloneqq R * dt$ dan $L \coloneqq \frac{N}{R}$. (ukuran langkah metode Euler-Milstein), (4) $X_i \coloneqq X_0$, (5) for $i \coloneqq 1$ to L , $Winc \coloneqq sum(dW(R * j - 1$
$: R * j))$; , $X_{i+1} \coloneqq X_i + f(X_i) * Dt + g(X_i) * Winc$
$0.5 * (sig\text{^}2) * ((Winc\text{^}2) - Dt)$,End.

REFERENSI

[1] Dumas, Bernard.dan Luciano, Elica. 2017. *The Economics of Continuous-Time Finance* . The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.

[2] Fadugba dan Adegboyegun. 2013. *On the Convergence of Euler Maruyama Method and Milstein Scheme for the Solution of Stochastic Differential Equations* . International Journal of Applied Mahematics and modelling.Vol.1 No. 1,ISSN: 2336-0054

[3] *Gallagher, Robert. W. 2013. Stochastic Processes: Theory for Applications. Cambridge University Press*.

[4] *Higham, Desmond J. 2001. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM Review, Vol. 43, No 3. 525-546*

[5] Mao, Xuerong. 2007. *Stochastic Differential Equations and Applications 2nd Edition*. Woodhead Publishing

[6] Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Informatika

[7] Ross, Shepley L. 1989. Introduction To Ordinary Differential Equations - 4th Edition. John Wiley and Sons, Canada

.