Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar *Max-Plus*

Cindi Meidisia[#1], Yusmet Rizal*[2], Helma*[3]

[1#]*Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*
[2,3]**Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[1]cindi2805@gmail.com
[2]yusmet_abdurrahman@yahoo.co.id
[3]helma667@yahoo.co.id

Abstract**—** Linear equation can be used for solving problem in the daily life. An issues such as the work network systemis an example of a problem that is solved by using linear equation with the basic operation used is the maximum operation (max) and addition operation (+). System of linear equation with basic operation such as maximum and addition is contained in the Max-Plus Algebra. Problem formulation in this research is " How to solve a system of linear equation in Max-Plus Algebra. The result that obtained in system of linear equation at the frist step then change it in to canonical,next it will be solved in the same way like in linear algebra. Solution from system of linear equation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ is$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{b}is\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{e} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{2}} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n+1}} \oplus \dots$. And solution from system of linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$exist ifthe greatest sub solving$(\widehat{\boldsymbol{x}})$with $-\hat{x}_j = \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right)$fulfill the system of linear equation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Keywords **—**Matrices, Max-Plus Algebra,System of Linear Equation.

Abstrak**—** Persamaan linear dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Masalah seperti sistem jaringan kerja merupakan suatu contoh masalah yang diselesaikan menggunakan persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+). Sistem persamaan linear dengan operasi dasar maksimum (max) dan penjumlahan (+) seperti ini terdapat pada Aljabar *Max-Plus*. Rumusan masalah pada penelitian ini adalah "Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*". Hasil yang didapatkan pada penelitian adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$ terlebih dahulu diubah kedalam bentuk kanonik, selanjutnya diselesaikan dengan cara yang sama seperti pada aljabar linear. Solusi dari sistem persamaan linear $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ adalah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{e} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{2}} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \oplus \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n+1}} \oplus \dots$. Dan solusi dari sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ada jika subpenyelesaian terbesarnya $(\widehat{\boldsymbol{x}})$dengan $-\hat{x}_j = \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right)$ memenuhi sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Kata kunci **—** Matriks, Aljabar *Max-Plus,*Sistem Persamaan Linear.

PENDAHULUAN

Persamaan linear dapat digunakan untukmemecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari, sepertisistem jaringan kereta, sistem jaringan telekomunikasi, sistem produksi, sistem pemrosesan pararel pada komputer, dan sebagainya.Hal ini dapat dilakukan dengan memodelkan masalah tersebut kedalam model matematika.Misalnya, suatu sistem jaringan kereta sederhana yang terdapat pada [3].

Permasalahan sistem jaringan kereta di atas merupakan suatu contoh pemodelan matematika yang merupakan sistem persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+).Pengoperasian seperti ini terdapat pada Aljabar *Max-Plus* [1].Oleh karena itu, masalah seperti sistem jaringan kereta diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*.

Beberapa sifat dari Aljabar *Max-Plus*, yaitu $\boldsymbol{R}_{max}{}^* \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}_{max} \backslash \{\varepsilon\}$ dengan operasi biner $\otimes$ membentuk grup dan Aljabar *Max-Plus* membentuk semi-field yang komutatif dan idempotent.Untuk pembuktian dari sifat ini bisa dilihat pada [3].Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dapat diperluas dalam bentuk matriks. Jika $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in R_{max}^{m \times n}$ dan $\boldsymbol{C} \in R_{max}^{n \times n}$ serta $\alpha \in R_{\max}$ maka diperoleh

$$(A \oplus B)_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij})$$
$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}$$
$$(\propto \otimes\ A)_{ij} = \propto \otimes A_{ij}, \text{untuk semua } i, j$$

Untuk penjelasan di atas yang lebih mendalam terdapat pada [4].

Sistem persamaan linear dalam Aljabar *Max-Plus*, yaitu $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$, dengan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in (R_{\max})^{n \times n}$, **b** dan **d** adalah matriks berukuran $n \times 1$ dimana b_i, $d_i \in R_{\max}$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Bentuk lain dari sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus* adalah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$, sistem persamaan linear $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ erat kaitannya dengan graf Precendence.DanSistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,mungkin saja tidak memiliki penyelesaian. Untuk itu masalah penyelesaian sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$dapat diperlemah dengan mendefinisikan konsep sub penyelesaian terbesardari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Penelitian ini diharapkan dapat menyelesaikan sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*, sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari seperti masalah sistem jaringan kereta.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis).Adapun metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan.Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari studi litelatur yang mengkaji tentang Aljabar *Max-Plus*, matriks, sistem persamaan linear, dan solusi sistem persamaan linear.
2. Menentukan solusi sistem persamaan linear $$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{d}$$
3. Menentukan solusi sistem persamaan linear $$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{b}$$
4. Menentukan solusi sistem persamaan linear $$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$
5. Menarik kesimpulan

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Sistem Persamaan Linear*$\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$

Sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$ dengan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in (\boldsymbol{R}_{max})^{nxn}$, **b** dan **d** adalah matriks berukuran $n \times 1$ dimana $b_i, d_i \in (\boldsymbol{R}_{max})$ untuk *i=1,2,…,n.* Sistem persamaan linear 2 variabel dari $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$ dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$ untuk 2 variabel, terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk kanonik dan selanjutnya akan diselesaikan seperti aljabar linear.

Dari persamaan (2) akan dibahas beberapa kasus, yaitu:

1. $a_{i1} < c_{i1}$, $a_{i2} > c_{i2}$, $b_1 = d_1$, dan $b_2 < d_2$

Bentuk kanonik [2] persamaan (2) adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dari persamaan (3) didapatkan 2 persamaan, yaitu:

$$(a_{12}x_2) \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus d_1 \quad (4)$$

$$(a_{22}x_2) = (c_{21}x_1) \oplus d_2 \quad (5)$$

Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubstitusikan persamaan (5) ke (4) diperoleh

$$(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus d_1$$

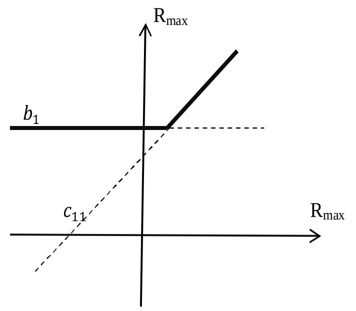
Karena $b_1 = d_1$ maka persamaan menjadi

$$(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus b_1 \quad (6)$$

Misalkan $b_1 \geq d_2$ dan $c_{21} = c_{11}$,maka persamaan (6) menjadi

$$(c_{21}x_1) \oplus b_1 = (c_{11}x_1) \oplus b_1 \quad (7)$$

Secara grafik, persamaan (7) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar. 2 Grafik persamaan 7

Dari Gambar 2, secara geometris solusi x_1 dari sistem persamaan (7) adalah mempunyai banyak solusi.

Selanjutnya, substitusikan nilai x_1 ke persamaan (5) dengan cara yang sama diperoleh nilai dari x_2. Dan itulah solusi dari sistem persamaan tersebut.

2. $a_{i1} < c_{i1}$, $a_{i2} > c_{i2}$, $b_1 > d_1$, dan $b_2 < d_2$

Bentuk kanonik persamaan (2) adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) didapatkan 2 persamaan, yaitu:

$$(a_{12}x_2) \oplus b_1 = c_{11}x_1 \quad (9)$$

$$a_{22}x_2 = (c_{21}x_1) \oplus d_2 \quad (10)$$

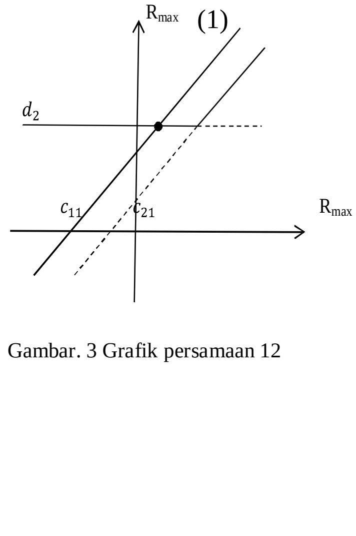
Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubstitusikan persamaan (10) ke (9) diperoleh

$$(c_{21}x_1) \oplus d_2 \oplus b_1 = c_{11}x_1 \quad (11)$$

Misalkan $d_2 > b_1$ dan $c_{21} < c_{11}$ maka persamaan (11) menjadi

$$(c_{21}x_1) \oplus d_2 = c_{11}x_1 \quad (12)$$

Secara grafik, persamaan (12) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar. 3 Grafik persamaan 12

Dari Gambar 3, secara geometris solusi x_1 dari sistem persamaan (12) adalah mempunyai solusi tunggal.

Selanjutnya, substitusikan nilai x_1 ke persamaan (10) dengan cara yang sama diperoleh nilai dari x_2. Dan itulah solusi dari sistem persamaan tersebut.

3. $a_{i1} < c_{i1}$, $a_{i2} > c_{i2}$, dan $b_i < d_i$

Bentuk kanonik persamaan (2) adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & a_{12} \\ \varepsilon & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \varepsilon \\ c_{21} & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dari persamaan (13) didapatkan 2 persamaan, yaitu:

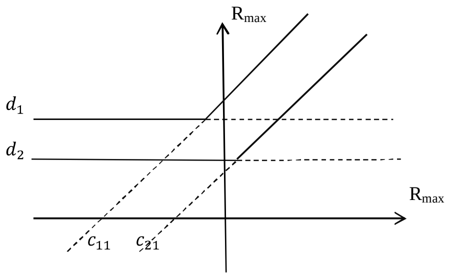
$$a_{12}x_2 = (c_{11}x_1) \oplus d_1 \quad (14)$$

$$a_{22}x_2 = (c_{21}x_1) \oplus d_2 \quad (15)$$

Misalkan $a_{22} = a_{12}$, jika disubstitusikan persamaan (15) ke (14) diperoleh

$$(c_{21}x_1) \oplus d_2 = (c_{11}x_1) \oplus d_1 \quad (16)$$

Misalkan $c_{21} < c_{11}$dan $d_2 < d_1$, maka secara grafik persamaan (16) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar. 4 Grafik persamaan 16

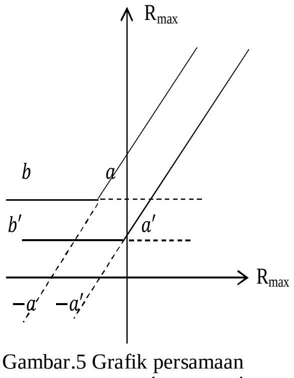
Dari Gambar 4, secara geometris solusi $x_1$dari sistem persamaan (16) adalah tidak mempunyai solusi.

Selanjutnya, substitusikan nilai x_1 ke persamaan (15) dengan cara yang sama diperoleh nilai dari x_2. Dan itulah solusi dari sistem persamaan tersebut.

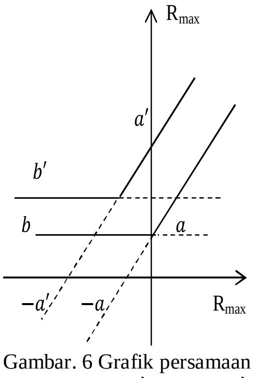
Jika diberikan bentuk umum dari permasalahan di atas, yaitu $ax \oplus b = a'x \oplus b'$. Maka didapatkan kemungkinan penyelesaian dari persamaan $ax \oplus b = a'x \oplus b'$, yaitu:

1. Tidak punya solusi

Grafik dari persamaan di atas yang tidak mempunyai solusi sebagai berikut:



Gambar.5 Grafik persamaan $a > a'$dan$b > b'$

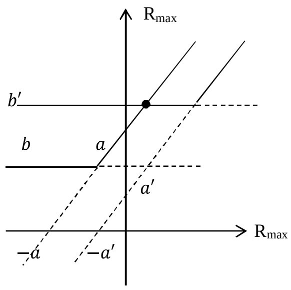


Gambar. 6 Grafik persamaan $a < a'$ dan $b < b'$

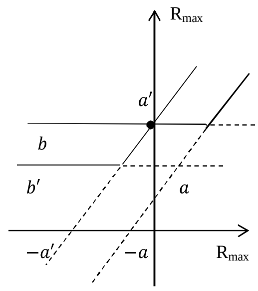
Dari Gambar 5 dan 6 secara geometris solusi dari persamaan $ax \oplus b = a'x \oplus b'$ tidak mempunyai titik temu, artinya sistem persamaan linear ini tidak mempunyai penyelesaian.

2. Mempunyai solusi tunggal

Grafik dari persamaan di atas yang mempunyai solusi tunggal sebagai berikut:



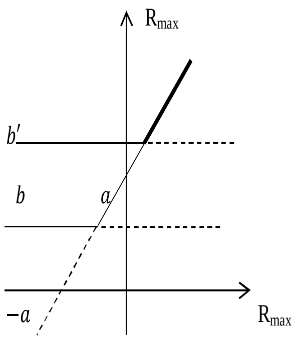
Gambar.7 Grafik persamaan $a > a'$dan$b < b'$



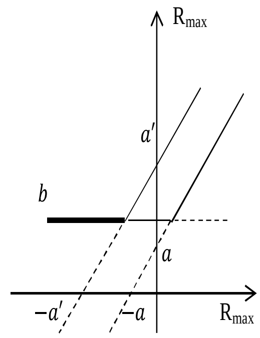
Gambar. 8 Grafik persamaan $a < a'$ dan $b > b'$

3. Mempunyai banyak solusi

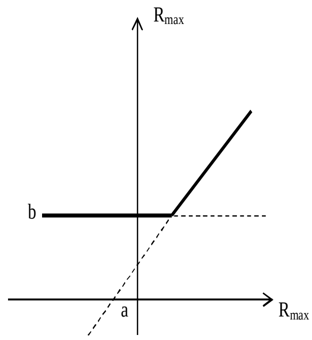
Grafik dari persamaan di atas yang mempunyai banyak solusi sebagai berikut:



Gambar.9 Grafik persamaan $a = a'$dan$b \neq b'$



Gambar. 10 Grafik persamaan $a \neq a'$ dan $b = b'$



Gambar.11 Grafik persamaan $a = a'$dan$b = b'$

Penyelesaian dari bentuk umum $ax \oplus b = a'x \oplus b'$ digunakan untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$. Dimana bentuk persamaan $ax \oplus b = a'x \oplus b'$ dinamakan Persamaan Affine.

B. *Sistem Persamaan Linear* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$

Penyelesaian sistem persamaan linear $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$erat kaitannya dengan graf precendence. Berikut akan dijelaskan penyelesaian sistem persamaan linear dari $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$, yaitu:

1. Misalkan $\boldsymbol{A} \in R_{max}^{n\times n}$ dan $\boldsymbol{b} \in R_{max}^{n}$, jika terdapat bobot rata-rata sirkuit graf $G(A)$ kurang dari atau sama dengan 0 dan $A^* \stackrel{\text{def}}{=} e \oplus A^+ = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^{\otimes i}$, maka didapatkan

$$\begin{aligned}
A^* \otimes b &= \bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i} \otimes b \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i} \otimes b\right) \oplus (e \otimes b) \\
&= A \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{-\infty} A^{\otimes i} \otimes b\right) \oplus (e \otimes b) \\
&= A \otimes (A^* \otimes b) \oplus b \qquad (17)
\end{aligned}$$

Selanjutnya pandang persamaan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ (18)

Misalkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \mathbf{b}$ (19)

Jika disubstitusikan persamaan (19) ke (18) maka diperoleh

$A^*\mathrm{b} = A(A^*b) \oplus b$

Jadi solusi dari $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$adalah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \mathbf{b}$

2. Misalkan bobot sirkuit dalam $G(A)$adalah negatif dan misalkan y adalah solusi persamaan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ selain $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}$, jika disubstitusikan y dalam $b \oplus (A \otimes x)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
y &= A \otimes y \oplus b \\
&= A \otimes [(A \otimes y) \oplus b] \oplus b \\
&= (A^2 \otimes y) \oplus (A \otimes b) \oplus b
\end{aligned}$$

Dengan mengulangi proses di atas didapatkan

$$\begin{aligned}
y &= b \oplus (A \otimes b) \oplus (A^{\otimes 2} \otimes y) \oplus (A^{\otimes 3} \otimes y) \\
&= b \oplus (A \otimes b) \oplus \dots \oplus (A^{\otimes (i-1)} \otimes b) \oplus (A^{\otimes i} \otimes b) \\
&= \bigoplus_{l=0}^{i-1} (A^{\otimes l} \otimes b) \oplus (A^{\otimes i} \otimes y)
\end{aligned}$$

Entri-entri $A^{\otimes i}$ adalah bobot maksimum dari path dengan panjang *i*. Untuk *i* cukup besar, setiap path memuat satu atau lebih sirkuit elementer turunan sebagai subpath dan kalau *i* menuju ∞ banyaknya sirkuit elementer yang terjadi menuju ∞, karena sirkuit mempunyai bobot negatif maka entri-entri $A^{\otimes i}$ menuju ε untuk *i* menuju ∞, yaitu

$$\lim_{i\to\infty} A^{\otimes i} \otimes y = \varepsilon$$

Jadi, untuk *i* menuju ∞ persamaan (18) menjadi $y = A^* \otimes b$, karena

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{i\to\infty} \bigoplus_{l=0}^{i-1} (A^{\otimes l} \otimes b) \\
&= \left(\lim_{i\to\infty} \bigoplus_{l=0}^{i-1} A^{\otimes l}\right) \otimes b \\
&= A^* \otimes b = x
\end{aligned}$$

Karena $y = x$ maka solusi dari $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ untuk semua sirkuit di $G(A)$ berbobot negatif adalah tunggal.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa "Jika bobot rata-rata sirkuit graf $G(A)$ kurang dari atau sama 0, maka $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{b}$ adalah penyelesaian dari $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ dan jika bobot sirkuit dalam $G(A)$ adalah negatif, maka solusi persamaan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ adalah tunggal".

C. *Sistem Persamaan Linear* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Salah satu sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*adalah $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.Kekurangan dari Aljabar *Max-Plus* adalah tidak adanya invers *additive*, hal ini menyulitkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus* tidak selalu mempunyai penyelesaian oleh karena itu, masalah penyelesaian $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ kemudian diperlemah dengan mendefinisikan konsep subpenyelesaian, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

Dari definisi tersebut diperoleh keterangan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ langkah awal yang harus dilakukan adalah mencari solusi persamaan subpenyelesaian terbesar ($\widehat{\boldsymbol{x}}$) dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned}
Ax \le b &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 \oplus a_{12}x_2 \oplus a_{13}x_3 \oplus \dots \oplus a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 \oplus a_{22}x_2 \oplus a_{23}x_3 \oplus \dots \oplus a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \oplus a_{m2}x_2 \oplus a_{m3}x_3 \oplus \dots \oplus a_{mn}x_n \le b_n \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \bigoplus_j (A_{ij} \otimes x_j) \le b_i, \forall_{i=1,2,\dots,m} \\
&\Leftrightarrow A_{ij} \otimes x_j \le b_i, \forall_{\ i,j} \\
&\Leftrightarrow A_{ij} + x_j \le b_i, \forall_{i,j}
\end{aligned}$$

Karena unsur setiap kolom matriks $\boldsymbol{A}$ tidak semuanya sama dengan ε, maka untuk setiap *j* selalu ada *i* sehingga $A_{ij} \neq \varepsilon$ yang berarti $-A_{ij}$ ada. Diketahui setiap $a \in R_{max}$

berlaku $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ dan $a \oplus \varepsilon = a$, maka koefisien-koefisien $A_{ij} = \varepsilon$ tidak akan berpengaruh pada nilai $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}$**,** sehingga berlaku

$$(A_{ij} + x_j \leq b_i, \forall_{i,j}) \Leftrightarrow (A_{ij} + x_j \leq b_i, \forall_{i,j} \text{dengan} A_{ij} \neq \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow (x_j \leq b_i - A_{ij}, \forall_{i,j} \text{dengan} A_{ij} \neq \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow (x_j \leq \min_i (b_i - A_{ij}), \forall_{i,j} \text{dengan} A_{ij} \neq \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow (-x_j \geq \max_i (-b_i + A_{ij}), \forall_j)$$

Jika vektor $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$
Didefinisikan dengan

$$-\hat{x}_j \geq \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right), \forall j = 1,2, \dots, n$$

Jadi subpenyelesaian dari sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah setiap vektor $\boldsymbol{x}'$ yang komponen-komponennya memenuhi

$$-x'_j \geq \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right), \forall j$$

Sehingga diperoleh:

$$-\hat{x}_j = \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right) \Leftrightarrow \hat{x}_j = \min_i \left(b_i - A_{ij}\right) \forall_{i,j} \text{dengan} A_{ij} \neq \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \hat{x}_j \leq b_i - A_{ij}, \forall_{i,j} \text{dengan} A_{ij} \neq \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \bigoplus_j (A_{ij} \otimes \hat{x}_j) \leq b_i, \text{untuk setiap i}$$
$$\Leftrightarrow A \otimes \hat{x} \leq b$$

Jadi, vektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ tersebut merupakan subpenyelesaian dari sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.Karena

$$-\hat{x}_j \geq \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right) = -\hat{x}_j$$

Maka

$$x'_j \leq \hat{x}_j, \forall j$$

Akibatnya

$$x'_j \leq \hat{x}_j$$

Sehingga vektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ merupakan subpenyelesaian terbesar dari sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan

$$-\hat{x}_j = \max_i \left(-b_i + A_{ij}\right)$$

Jika subpenyelesaian terbesar dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ memenuhi sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ maka subpenyelesaian terbesar merupakan solusi dari sistem persamaan linear tersebut. Selanjutnya, ditentukan perilaku dari penyelesaiansistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, untuk menentukan perilaku tersebut digunakan matriks ketidaksesuaian $\left(D_{A,b}\right)$ dan matriks tereduksi ketidaksesuaian $R_{A,b}$ [6]. Dari matriks tereduksi ketidaksesuaian $R_{A,b}$ terdapat 2 kasus, yaitu:

1. Jika semua baris dari matriks $R_{A,b}$ semua entri bernilai 0.
   Misal, baris ke-k dari matriks $R_{A,b}$ semua entri bernilai 0 dengan tidak menghilangkankeumumannya. Andaikan $\hat{\boldsymbol{x}}$ adalah suatu penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, maka

   $$\hat{x}_j \leq \min_l \left\{b_l - a_{lj}\right\} < (b_k - a_{kj})$$

   Atau

   $$-\hat{x}_j \geq \max_l \left\{-b_l + a_{lj}\right\} > (a_{kj} - b_k)$$

   Sehingga

   $$\hat{x}_j + a_{kj} < b_k, \forall j$$

   Dengan demikian $\hat{\boldsymbol{x}}$ tidak memenuhi persamaan ke-k, hal ini bertentangan dengan $\hat{\boldsymbol{x}}$ adalah suatu penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Akibatnya, $\hat{\boldsymbol{x}}$ bukan penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ atau persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tidak punya penyelesaian.

2. Jika setidaknya pada setiap baris matriks $R_{A,b}$ memuat entri bernilai 1.
   Misal, baris ke-k dari matriks $R_{A,b}$ tidak semua entri bernilai 0 dengan tidak menghilangkan keumumannya. Andaikan $\hat{\boldsymbol{x}}$ bukan suatu penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ maka

   $$-\hat{x}_j \leq \max\left\{b_k - a_{kj}\right\}, \forall k, j$$

   Sehingga

   $$\max_j \left\{a_{kj} + \hat{x}_j\right\} \leq b_k$$

   Dan jika $\hat{\boldsymbol{x}}$ bukan penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ maka ada suatu k dengan

   $$\max_j \left\{a_{kj} + \hat{x}_j\right\} < b_k$$

   Hal ini ekuivalen dengan

   $$\hat{x}_j < \left\{b_k - a_{kj}\right\}$$

   Karena

   $$-\hat{x}_j = \max\left\{-b_l + a_{lj}\right\}$$

   untuk beberapa l maka tidak ada entri di baris ke-k pada matriks $R_{A,b}$ yang bernilai 1. Hal ini bertentangan dengan pernyataan bahwa setiap matriks $R_{A,b}$ setidaknya memuat entri yang bernilai 1. Jadi, haruslah $\hat{\boldsymbol{x}}$ merupakan penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa jika suatu baris dari matriks $R_{A,b}$ semua entrinya 0, maka $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tidak mempunyai penyelesaian. Dan jika setidaknya pada setiap baris matriks $R_{A,b}$ memuat entri bernilai 1, maka $\hat{\boldsymbol{x}}$ adalah suatu penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Jika $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mempunyai penyelesaian maka terdapat dua kemungkinan penyelesaian, yaitu mempunyai solusi tunggal dan mempunyai banyak solusi [6]. Sehingga, terdapat dua kasus, yaitu:

1. Jika setiap baris $R_{A,b}$ hanya ada satu entri yang bernilai 1, maka disetiap baris $R_{A,b}$ terdapat suatu entri peubah tetap dan tidak ada entri slack sehingga semua entri $\boldsymbol{x}$ tetap, jadi penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah tunggal.

2. Jika suatu baris $R_{A,b}$ terdapat lebih dari satu entri yang bernilai 1 sehingga terdapat entri slack. Misalkan r_{ij} adalah satu entri slack pada $R_{A,b}$ dan $\hat{\boldsymbol{x}}$ adalah penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Karena r_{ij} bukanlah entri peubah tetap, maka tidak ada entri peubah tetap pada kolom ke- j dari matriks $R_{A,b}$. Jadi, persamaan bisa dicapai tanpa menggunakan entri $\hat{x}_j$. Dengan demikian walaupun nilai $\hat{x}_j$ menunjukkan nilai maksimum yang mungkin untuk entri ini, setiap nilai yang lebih kecil atau sama dengan $\hat{x}_j$ tidak mempengaruhi keberadaan persamaan baris yang telah ditetapkan. Akibatnya penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tidaklah tunggal atau mempunyai banyak penyelesaian.

Sehingga dari dua kasus di atas diperoleh kesimpulan, yaitu jika setiap baris dari matriks $R_{A,b}$ hanya ada satu entri yang bernilai 1, maka penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah tunggal dan jika ada entri slack pada matriks $R_{A,b}$, maka penyelesaian dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ tidaklah tunggal atau mempunyai banyak solusi.

SIMPULAN

Penyelesaian sistem persamaan linear pada aljabar *Max-Plus*, yaitu memenuhi:

1. Solusi dari sistem persamaan linear umum $\boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Cx} \oplus \boldsymbol{d}$ yaitu jika persamaan Affine $ax \oplus b = a'x \oplus b'$ memenuhi:

a. $(a' < a)$ dan $(b < b'))$ atau $((a < a')$ dan $(b' < b))$ Maka penyelesaiannya adalah $x = (b \oplus b')\,\phi\,\,(a \oplus a')$.

b. Jika tidak memenuhi persamaan di atas dan $a \neq a'$ dan $b \neq b'$, maka persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian.

c. $a = a'$ dan $b \neq b'$, maka penyelesaiannya adalah $x \geq (b \oplus b')\,\phi\,\,a$.

d. $a \neq a'$ dan $b = b'$, maka penyelesaiannya adalah $x \leq b\,\,\phi\,\,(a \oplus a')$.

e. $a = a'$dan $b = b'$, maka semua $x \in \boldsymbol{R}_{max}$adalah penyelesaian dari persamaan tersebut.

2. Sistem persamaan linear $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$

Solusi sistem persamaan linear $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} \oplus \boldsymbol{b}$ adalah $x = A^* \otimes b$ dengan $A^* = e \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots \oplus A^n \oplus A^{n+1} \oplus \dots$.

3. Sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Langkah awal untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, adalah dengan menententukan subpenyelesaian terbesarnya, yaitu $\hat{\boldsymbol{x}}$ dengan $-\hat{x}_j = \max_i(-b_i + A_{ij})$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1,2,3, \dots, n$. Jika subpenyelesaian terbesar memenuhi sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ maka subpenyelesaian terbesar merupakan penyelesaian dari sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dan sebaliknya.Selanjutnya ditentukan perilaku penyelesaian sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ denganmenggunakan matriks tereduksi dan matriks tereduksi ketidaksesuaian.

REFERENSI

[1] Baccelli,F.,Cohen,G.,olsde,G.j.,Quadrat, J.P. (2001). *Synchroni Zation and Linearity*, New York: Jhon willey and sons.

[2] Cohen,G., Quadrat, J.P, dan Stephane, G. (1998). *Max-Plus Algebra and System Theory: Where We Are and Where To Go Now*. Diambil tanggal 15 Juni 2013 dari http://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/IFAC Nantes-revised.pdf.

[3] Meidisia, Cindi. (2014). *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar Max-Plus*, Padang: Universitas Negeri Padang.

[4] Quadrat,J.P. (1995). *Max-Plus Algebra and Application to System Teory and Optimal Control*.Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland, August 1994, published by Birkhaüser, pp. 1502–1511, 1995.

[5] Rudhito, Andy, M. (2005). *Sistem Persamaan Linear Max-Plus*. SIGMA, Vol. 8, No. 2, Juli 2005: 157-164. ISSN: 1410-5888.

[6] Subiono. (2012). *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*, Surabaya: ITS.