

## Penerapan *Proof Without Word* pada Berbagai Bidang Matematika

Darmia<sup>1\*</sup>, Muhammad Abdy<sup>2</sup>, Rahmawati<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, FMIPA  
Universitas Sulawesi Barat

Email: [amidarmia@yahoo.co.id](mailto:amidarmia@yahoo.co.id)

<sup>2</sup>Program Studi Matematika, FMIPA  
Universitas Sulawesi Barat

Email: [muh.abdy@unsulbar.ac.id](mailto:muh.abdy@unsulbar.ac.id)

<sup>3</sup>Program Studi Matematika, FMIPA  
Universitas Sulawesi Barat

Email: [rahmah@unsulbar.ac.id](mailto:rahmah@unsulbar.ac.id)



©2019 J-HEST FDI DPD Sulawesi Barat. Ini adalah artikel dengan akses terbuka dibawah licensi CC BY-NC-4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

### ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana penggunaan *proof without word* dalam pembuktian secara deduktif pada bidang matematika. Teorema yang dibuktikan dalam penelitian ini meliputi bidang aritmatika, aljabar, geometri, dan trigonometri. Teorema tersebut dibuktikan dengan metode *proof without word*, yaitu pembuktian menggunakan gambar sesuai dengan bentuk teorema. Hasil yang diperoleh dalam penelitian *proof without word* pada bidang aritmetika didasarkan pada pembuktian sederhana yaitu jumlah kuadrat dan jumlah suku deret Fibonacci. Bidang aljabar didasarkan pada operasi penjumlahan dan pengurangan luas bangun. Bidang geometri, jumlah sudut vertex dari bintang dua dimensi bintang dan pembuktian teorema Pythagoras. Bidang trigonometri didasarkan pada identitas trigonometri. Hasil *proof without word* tersebut sebagai bukti alternatif pembuktian disamping pembuktian secara analitis.

**Kata Kunci:** Aritmetika, Aljabar, Geometri, Trigonometri, Proof Without Word

### ABSTRACT

The purpose of this study is to find out how to use *proof without a word* in proof deductively in the field of mathematics. The theorem that is proven in this study includes the fields of arithmetic, algebra, geometry, and trigonometry. The theorem is proven by a proof method without a word, which is proof using images in accordance with the theorem. The results obtained in *proof without word* research in the field of arithmetic are based on simple proof, namely the sum of squares and the number of Fibonacci sequence terms. The field of algebra is based on addition operations and reduction in the area of the building. The field of geometry, the number of vertex angles of a two-dimensional star and proof of the Pythagorean theorem. The trigonometry field is based on trigonometric identity. The *proof without word* result is proof of alternative proof besides analytical verification.

**Keywords:** Arithmetic, Algebra, Geometry, Trigonometry, Proof Without Word

### PENDAHULUAN

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan. Faktor intuisi dan pola berfikir induktif banyak berperan pada proses awal dalam merumuskan suatu konjektur

(conjecture) yaitu dugaan awal dalam matematika. Proses penemuan dalam matematika dimulai dengan pencarian pola dan struktur, contoh kasus dan objek matematika lainnya. Selanjutnya semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun suatu konjektur. Setelah konjektur

dapat dibuktikan kebenarannya, maka selanjutnya ia menjadi suatu Teorema. (Hernadi, 2009).

Pekerjaan memahami bukti bukan sesuatu yang mudah karena pembuktian lebih banyak melibatkan simbol dan pernyataan logika dari pada berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika. Kenyataan ini menjadikan seseorang malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan dianggap lebih sulit dan kurang menarik. Padahal banyak manfaat yang dapat diperoleh pada pengalaman membuktikan ini, salah satunya adalah melatih *logically thinking* dalam belajar matematika.

Terdapat beberapa metode pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan logika dasar. Misalnya bukti langsung dan bukti tak langsung. Selain metode tersebut, dalam matematika juga terdapat metode pembuktian yang jarang dijumpai dalam pembuktian pada teorema, yaitu *proof without word*.

*Proof without word* dapat dianggap sebagai 'bukti' yang menggunakan gambar atau visual, tidak mengandung kata-kata apapun selain simbol numerik dan geometris gambar. Pada umumnya, bukti tanpa kata adalah gambaran atau diagram yang membantu pembaca melihat mengapa suatu pernyataan matematis mungkin benar. (Putri, 2011).

Berbagai gagasan matematika tidak selalu jelas dengan *proof without word*. Jadi, pembuktian memerlukan penjelasan yang menarik. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas cara membuktikan teorema yang ada dalam matematika dengan menggunakan gambar. Peneliti akan membuktikan teorema yang berbeda dari teorema sebelumnya. Metode pembuktian tanpa kata ini bertujuan untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi yang dapat mempermudah dalam melakukan pembuktian secara deduktif. *Proof without word* dapat digunakan diberbagai bidang matematika. Namun bidang matematika yang akan dibahas pada penelitian ini adalah aritmetika, aljabar, geometri dan trigonometri. Dengan ini penulis akan meneliti bagaimanakah penggunaan *proof without*

*word* pada bidang aritmetika, aljabar, geometri, dan trigonometri.

Bidang matematika terdapat banyak teorema yang pembuktiannya digunakan dengan metode pembuktian matematika. Beberapa teorema pada matematika biasanya dibuktikan dengan bukti langsung dan bukti tak langsung.

Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi  $p \Rightarrow q$ . Di sini  $p$  sebagai hipotesis digunakan sebagai fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan  $p$  kita harus menunjukkan berlaku  $q$ . Secara logika pembuktian langsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan  $p \Rightarrow q$  benar dimana diketahui  $p$  benar. (Hernadi, 2009). Bukti langsung dalam matematika dapat dilihat dalam contoh pembuktian teorema berikut:

**Teorema 2.1:** Jika  $n$  adalah bilangan genap, maka  $n^2$  juga genap

Bukti :

Jika  $n$  bilangan genap maka  $n = 2k$ , untuk  $k =$  bilangan bulat. Maka

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k)^2 = 2m$$

dengan  $m = (2k)^2$ . Karena  $n^2 = 2m$  berarti  $n^2$  juga bilangan genap

Kita tahu bahwa nilai kebenaran suatu implikasi  $p \Rightarrow q$  ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya  $\sim q \Rightarrow \sim p$ . Jadi pekerjaan membuktikan kebenaran pernyataan implikasi dibuktikan lewat kontraposisinya. (Hernadi, 2009). Bukti tak langsung pada Teorema 2.1 diperlihatkan sebagai berikut

Bukti :

Akan dibuktikan secara tidak langsung maka pernyataan yang akan dibuktikan adalah

Jika  $n$  ganjil maka  $n^2$  juga ganjil misal  $n$  ganjil berarti  $n = 2k + 1$  dimana  $k$  adalah bilangan bulat, maka

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2p + 1 \end{aligned}$$

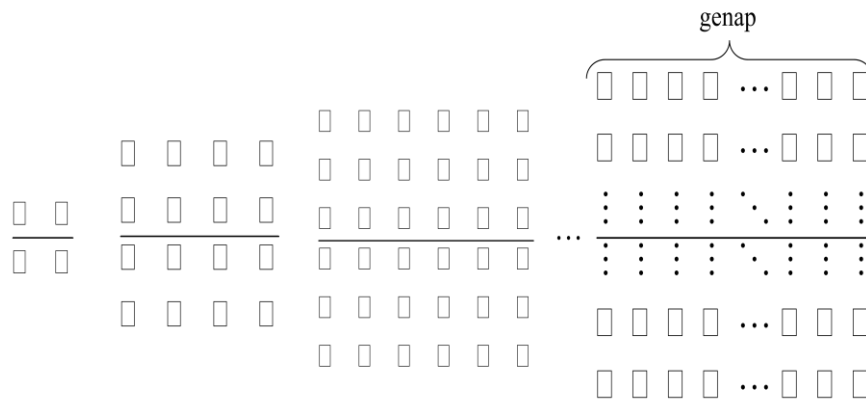
dengan  $p = 2k^2 + 2k$

karena  $n^2 = 2p + 1$  maka  $n^2$  bilangan ganjil. Berarti secara tidak langsung dapat disimpulkan jika  $n^2$  genap maka  $n$  juga genap.

*Proof without word* adalah gambaran atau diagram yang membantu pembaca melihat mengapa suatu pernyataan matematis mungkin benar. Bukti tanpa kata memerlukan penjelasan yang menarik, karena diberbagai gagasan matematika tidak selalu jelas dengan bukti tanpa kata. Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana cara membuktikan teori-teori yang ada dalam matematika dengan menggunakan gambar. Metode ini dilakukan untuk memperoleh ide, gagasan, dan intuisi dalam rangka pembuktian secara deduktif.

Bukti aljabar dengan bukti tanpa kata adalah seiring atau beriringan, karena beberapa teorema dalam matematika dapat dibuktikan dengan kedua metode tersebut. Yang membedakan hanyalah cara pembuktiannya, pada bukti aljabar yaitu membuktikan Teorema dengan menguraikan beberapa kata atau kalimat, yang biasanya diawali dengan kata “dipunyai, ambil sebarang, tulis, maka, jelas, dan lain-lain”. Sedangkan pada bukti tanpa kata, bukti cukup dengan gambar yang menjelaskan. *Proof without word* pada Teorema 2.1 digambarkan sebagai berikut.

Bukti :



Aritmetika merupakan cabang yang mempelajari operasi dasar bilangan. Operasi dasar aritmetika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, persen, pemangkatan dsb. Contoh dalam kehidupan sehari - hari menghitung uang, laba, rugi, dan bunga bank.

Barisan aritmetika adalah suatu barisan dengan selisih (beda) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Bentuk umum:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \text{ atau } a, (a + b), (a + 2b), \dots, (a + (n - 1)b)$$

Jika diketahui  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  merupakan suku-suku dari suatu barisan aritmetika, maka  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$  disebut deret aritmetika. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari barisan aritmetika.

Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad \text{atau} \quad a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b)$$

Aljabar adalah salah satu bidang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmetika. Ada beberapa jenis aljabar yaitu, aljabar dasar untuk menyelesaikan bilangan riil yang menggunakan peubah untuk menandakan variabel dan konstanta, aljabar abstrak yang mempelajari tentang grup dan ring, aljabar linear, yang mempelajari sifat-sifat khusus ruang vektor (termasuk matriks), aljabar universal yang mempelajari sifat-sifat yang dimiliki semua struktur aljabar, dan aljabar komputer yang mengumpulkan manipulasi simbolis benda-benda matematis.

Geometri adalah bagian dari matematika yang mengambil persoalan mengenai size, bentuk, dan kedudukan relatif dari rajah/kesalahan dan sifat ruang. Geometri lahir sebagai salah satu sumber dari beberapa matematika terapan yang ada selama ini. Pada mulanya, geometri hanya

dipergunakan sebagai ilmu praktis dan keahlian teknik. Diantaranya seperti pada masyarakat Babilonia dan Mesir yang menggunakan geometri sebagai pengukuran praktis pada pertanian kemudian diperluas untuk perhitungan panjang ruas garis, mencari luas dan menghitung isi atau volume benda tertentu. Selanjutnya geometri terus berkembang menjadi pengetahuan yang disusun secara menarik dan logis. (Wallance, 1972).

Sudut dalam geometri adalah besaran rotasi suatu ruas garis dari satu titik pangkalnya ke ujung yang lain. Selain itu, dalam bangun dua dimensi yang beraturan, sudut dapat pula diartikan sebagai ruang antara dua buah ruas garis lurus yang saling berpotongan. Jumlah sudut pada lingkaran  $360^\circ$ . jumlah sudut pada segitiga siku-siku  $180^\circ$ . Besar sudut pada persegi  $360^\circ$ . Untuk mengukur sudut dapat digunakan busur derajat. Secara bahasa trigon berarti tiga sudut, metri berarti mengukur, bidang ini membahas tentang sudut segitiga dan fungsi trigometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.

**METODE PENELITIAN**

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode studi pustaka dengan mengumpulkan berbagai referensi baik berupa buku, jurnal maupun sumber lain yang berkaitan dengan berbagai bidang matematika khususnya yang didalamnya terdapat teorema untuk dibuktikan dengan metode *proof without word*.

Langkah – langkah secara lengkap yang penulis gunakan pada penelitian ini mengumpulkan literatur terkait teorema pada bidang yang ditentukan yaitu, aritmetika

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

dan  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ , aljabar

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2$$

dan  $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ , geometri

Jumlah sudut vertex dari bintang =  $180^\circ$ .

$a^2 + b^2 = c^2$  pada segitiga siku-siku, trigonometri  $(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$  dan

$$(\tan \theta + 1)^2 + (\cot \theta + 1)^2 = (\sec \theta + \csc \theta)^2$$

membuktikan teorema yang telah dipilih pada

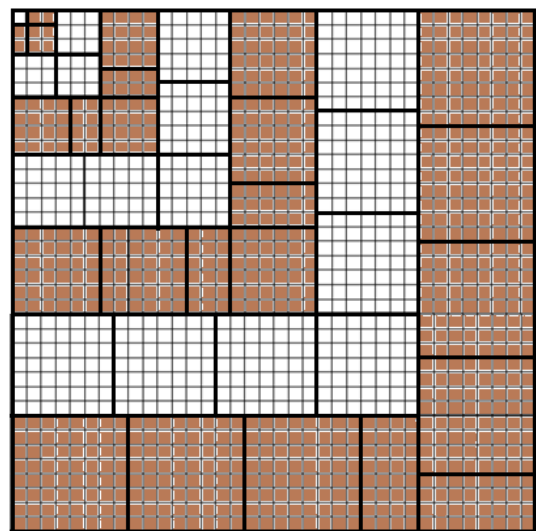
langkah sebelumnya dengan menggunakan metode pembuktian biasa (bukan *proof without word*) pada bidang aritmetika, aljabar geometri dan trigonometri, membuat visualisasi teorema dalam bentuk gambar dua atau tiga dimensi yang ditentukan, dan menentukan bentuk visualisasi sebagai pembuktian dengan metode *proof without word* pada setiap Teorema.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Pada metode *Proof Without Word* untuk Teorema Aritmetika

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Bukti :



Gambar teorema di atas menjelaskan  $1^3$  sama dengan satu kotak yang membentuk satu persegi dengan panjang sisi 1, sehingga kotak  $1^3$  sama dengan persegi dengan luas  $1^2$ . Selanjutnya  $1^3 + 2^3$  sama dengan 9 kotak yang membentuk satu persegi dengan panjang sisi  $1 + 2$  yang luasnya  $(1 + 2)^2$ , sehingga kotak  $1^3 + 2^3$  sama dengan persegi  $(1 + 2)^2$ . Selanjutnya sampai suku ke-8, dapat dibuktikan.

Metode *Proof Without Word* untuk Teorema Aljabar

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

Pembuktian teorema di atas adalah persegi dengan luas  $x^2$  dikurangi dengan persegi  $y^2$  yang ada didalam persegi  $x^2$ , hasilnya membentuk dua persegi panjang, persegi panjang pertama dengan panjang  $x$  dan lebar  $x - y$ , persegi panjang yang kedua dengan

panjang  $x - y$  dan lebar  $y$ , karena lebar persegi panjang yang pertama sama dengan panjang persegi panjang yang kedua, sehingga kedua persegi panjang bisa membentuk satu persegi panjang dengan panjang  $(x + y)$  dan lebar  $(x - y)$ . Jadi  $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$

#### **SIMPULAN DAN SARAN**

Metode *proof without word* merupakan solusi alternatif untuk pembuktian teorema matematika agar dapat dipahami secara lebih sederhana. Proses pembuktian *proof without word* dapat ditunjukkan secara geometris yang berfungsi untuk meyakinkan kebenaran suatu teorema. Penggunaan gambar pada pembuktian *proof without word* tergantung pada teorema yang akan dibuktikan. Sehingga teorema tersebut dijelaskan dengan menggunakan gambar yang sesuai. Gambar yang diterapkan adalah gambar bidang dua dimensi. Salah satu gambar sederhana yang sering digunakan adalah segiempat, karena beberapa teorema yang dibuktikan sudah jelas menggunakan segiempat.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

Alsina and Nelsen, R.B. 2010. *An Invitation to Proofs Without Words*. European Journal Of Pure And Applied Mathematics [www.ejpam.com](http://www.ejpam.com)

- Baeti, Nur. 2010. *Bukti Kombinatorial Tanpa Kata*. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
- Faires, Douglas. 2007. *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika Menggunakan Kompetisi Matematika Amerika*. Bandung: Pakar Raya Pustaka.
- Hernadi, Julan. 2009. *Metoda Pembuktian Dalam Matematika*. <http://julanhernadi.files.wordpress.com/2009/12/method-of-proof.pdf> (16 April 2010).
- Iskandar, Kasir. 1956. *Seri Buku Schaum Teori & Soal-soal Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.
- Kusni. 2003. *Geometri*. Semarang: UNNESPRESS.
- Mulyati, Sri. 1996. *Geometri Euclid*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Munir, Rinaldi. 2001. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Nelsen, R. 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, Washington. <http://www.xiaoe.org/data/2009-10/06/prfwwithout.pdf> (17 Juli 2010).
- Putri, Prahetsy Two Era. 2011. *Penerapan Bukti Tanpa Kata pada Bidang Matematika*. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
- Siang, Jong Jek. 2004. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi