



## Solusi Analitik Model Perubahan Garis Pantai Menggunakan Transformasi Laplace

Syarifah Meurah Yuni<sup>1</sup>, Ichsan Setiawan<sup>2</sup>, dan Okvita Maufiza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Syiah Kuala, Indonesia

<sup>2</sup>Jurusan Ilmu Kelautan, Fakultas Kelautan dan Perikanan, Universitas Syiah Kuala, Indonesia

Diterima 24 Mei 2014; Disetujui 12 Juni 2014

**Abstrak** – Perubahan garis pantai dapat terjadi karena adanya abrasi dan akresi yang terjadi di pantai. Abrasi dan akresi ini dapat menimbulkan kerugian yang besar seperti rusaknya kawasan pemukiman dan sarana transportasi. Salah satu upaya penanggulangan yang dilakukan untuk mengatasinya ialah dengan membangun bangunan pantai seperti groin. Pembangunan groin juga dapat menimbulkan perubahan garis pantai sehingga perlu diprediksi besarnya perubahan yang terjadi dengan membuat model matematika yang diturunkan dari persamaan kontinuitas. Persamaan perubahan garis pantai akibat pengaruh adanya groin berbentuk persamaan diferensial parsial parabolik dan diselesaikan secara analitik menggunakan transformasi Laplace. Persamaan ini memiliki satu nilai awal dan tiga syarat batas untuk memperoleh solusi di sebelah hulu dan hilir groin. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa sebelah hilir groin mengalami abrasi dan sebelah hulu groin mengalami akresi. Perubahan garis pantai dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti besarnya abrasi dan akresi yang terjadi, arah sudut datang gelombang, amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai, kedalaman air pada saat gelombang pecah, dan sudut datang gelombang pecah. Berdasarkan grafik yang didapat, terdapat kesesuaian antara pola grafik yang terbentuk pada solusi analitik dan solusi numerik yang diselesaikan dengan metode beda hingga.

**Kata kunci** : Abrasi, akresi, groin, perubahan garis pantai, solusi analitik, transformasi Laplace

### 1. Pendahuluan

Pantai merupakan kawasan yang secara intensif dimanfaatkan untuk berbagai kegiatan manusia, seperti kawasan pemukiman, pelabuhan, pariwisata, prasarana umum, dan sebagainya. Namun, seringkali upaya pemanfaatan kawasan pantai tidak dilandasi oleh pemahaman yang baik akan perilaku pantai. Akibatnya, timbul berbagai permasalahan pantai seperti abrasi yaitu proses penggerusan sedimen di pantai yang mengakibatkan mundurnya garis pantai dan akresi atau sedimentasi yaitu proses pengendapan sedimen di pantai yang mengakibatkan majunya garis pantai.

Abrasi dan akresi yang terjadi dapat menimbulkan kerugian yang sangat besar seperti rusaknya kawasan pemukiman dan prasarana transportasi. Biasanya upaya penanggulangan yang dilakukan adalah dengan membuat bangunan pelindung pantai seperti groin. Groin ialah bangunan yang biasanya dibuat tegak lurus

garis pantai untuk menahan transpor sedimen sehingga bisa mengurangi/menghentikan abrasi yang terjadi [7]. Pembangunan bangunan pelindung pantai tersebut juga dapat menimbulkan perubahan garis pantai. Walaupun perubahan yang terjadi tidak terlalu besar, studi mengenai perubahan garis pantai perlu dilakukan agar perencanaan pembangunan di kawasan pantai tidak berdampak negatif terhadap lingkungan.

Proses perubahan garis pantai sangat dipengaruhi oleh transpor sedimen di dekat pantai karena arus sejajar pantai yang dibangkitkan pada saat gelombang pecah. Penelitian tentang perubahan garis pantai telah banyak dilakukan secara numerik, salah satunya dengan menggunakan metode beda hingga. Teori *one-line* yang digunakan untuk menghitung perubahan garis pantai pertama kali diperkenalkan oleh Pelnard-Considere pada tahun 1956. Dalam teori ini profil pantai diasumsikan dalam keadaan konstan [8] melakukan penelitian perubahan garis pantai di delta Sungai Jeneberang Makassar dengan

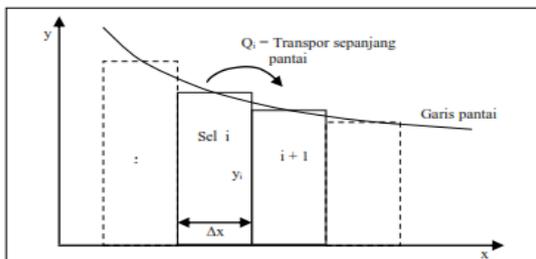
memperhitungkan transpor sedimen yang masuk dan keluar sel serta mempertimbangkan pengaruh tinggi dan sudut gelombang pecah menggunakan data *citra Landsat* tahun 1990, 1999, 2003, dan 2008 dan menemukan pantai yang berbentuk tonjolan mengalami abrasi sedangkan pantai yang berbentuk lekukan cenderung mengalami akresi. [5] melakukan prediksi perubahan garis pantai di Ulee Lheue dan Leupung dengan menggunakan metode *one-line* berdasarkan data gelombang dan menunjukkan adanya keserasian antara hasil simulasi dengan hasil observasi di pantai Ulee Lheue tahun 2007, yaitu adanya abrasi di bagian timur pantai dan akresi di bagian barat pantai dengan rata-rata tingkat kesalahan sebesar 10,4 % sedangkan di pantai Leupung bagian selatan dan utara terjadi abrasi dan di bagian tengah terjadi akresi dengan rata-rata tingkat kesalahan sebesar 4,8 %.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan model perubahan garis pantai akibat pengaruh adanya groin yang diturunkan dari persamaan kontinuitas sedimen secara analitik dengan menggunakan transformasi Laplace serta menganalisa faktor-faktor yang mempengaruhi perubahan garis pantai.

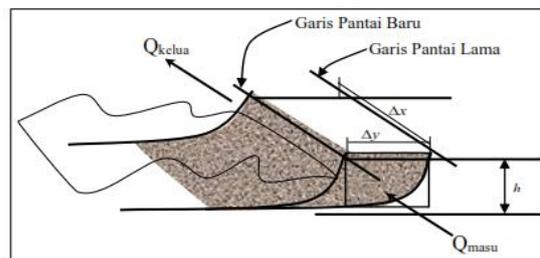
## 2. Metode Penelitian

### a. Persamaan Kontinuitas

Model perubahan garis pantai didasarkan pada persamaan kontinuitas sedimen dimana pantai dibagi menjadi sejumlah sel dan pada setiap sel ditinjau sedimen yang masuk dan keluar.



Gambar 1. Pembagian pantai menjadi sejumlah sel [6]



Gambar 2. Angkutan sedimen yang masuk dan keluar sel

Berdasarkan hukum kekekalan massa [7] yaitu jumlah laju aliran massa netto di dalam sel sama dengan laju perubahan massa di dalam sel tiap satuan waktu, sehingga didapat:

$$M_n = M_t$$

$$-\rho_s \Delta Q = \frac{\rho_s V}{\Delta t} \quad (1)$$

keterangan:

$\rho_s$  : rapat massa sedimen ( $kg/m^3$ )

$Q$  : transpor sedimen sepanjang pantai ( $m^3/hari$ )

$V$  : volume sedimen ( $m^3$ )

$t$  : waktu (s)

Volume sedimen di dalam sel diperoleh dengan asumsi bahwa kedalaman dasar pantai ( $h$ ) adalah homogen [6]:

$$V = h \Delta x \Delta y \quad (2)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke

persamaan (1) diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{1}{h} \frac{\Delta Q}{\Delta x} \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan persamaan kontinuitas sedimen. Untuk pembagian sel yang kecil, persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4)$$

keterangan:

$Q$  : transpor sedimen sepanjang pantai ( $m^3/hari$ )

$t$  : waktu (s)

$h$  : kedalaman air (m)

$x$  : absis searah panjang pantai (m)

$y$  : jarak antara garis pantai dan garis referensi (m)

Dalam persamaan (4) nilai  $h$ ,  $\Delta t$ , dan  $\Delta x$  tetap, sehingga  $\Delta y$  yaitu perubahan garis pantai hanya bergantung pada nilai  $\Delta Q$ . Jika nilai  $\Delta Q$  negatif maka

$\Delta y$  juga akan negatif yang berarti pantai mengalami abrasi. Jika nilai  $\Delta Q$  positif maka  $\Delta y$  juga akan positif yang berarti pantai mengalami akresi. Jika nilai  $\Delta Q = 0$  maka  $\Delta y = 0$  yang berarti pantai dalam kondisi stabil.

Persamaan kontinuitas tersebut terdiri atas dua variabel bebas  $x$  dan  $t$ , serta dua variabel terikat  $Q$  dan  $y$  sehingga perlu dicari hubungan antara  $Q$  dan  $y$ .

Dengan mengasumsikan sudut datang gelombang pecah kecil [2], maka besarnya transpor sedimen sepanjang pantai dapat dihitung dengan:

$$Q = Q_0 2\alpha_b \quad (5)$$

dimana

$$Q_0 = \frac{K\rho H_b^2 C_b}{16(\rho_s - \rho)(1-p)} \quad (6)$$

keterangan:

$Q_0$  : amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai ( $m^3/hari$ )

$Q$  : transpor sedimen sepanjang pantai ( $m^3/hari$ )

$K$  : konstanta

$\rho_s$  : rapat massa partikel ( $kg/m^3$ )

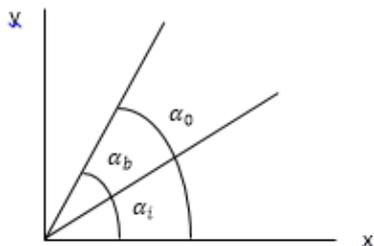
$\rho$  : rapat massa air laut ( $kg/m^3$ )

$p$  : porositas sedimen

$H_b$ : tinggi gelombang pecah ( $m$ )

$C_b$ : cepat rambat gelombang pecah ( $m/s$ )

$\alpha_b$ : sudut datang gelombang pecah ( $^\circ$ )



Gambar 3. Skema gelombang menuju garis pantai [3]

Keterangan gambar:

$\alpha_0$ : sudut datang gelombang pecah ke sumbu x ( $^\circ$ )

$\alpha_i$ : sudut antara garis pantai ke sumbu x ( $^\circ$ )

$\alpha_b$ : sudut datang gelombang pecah ke garis pantai ( $^\circ$ )

Hubungan antara ketiga sudut tersebut adalah:

$$\alpha_b = \alpha_0 - \alpha_i \quad (7)$$

Berdasarkan gambar,  $\alpha_i$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\tan \alpha_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7) dan (8) ke persamaan (5) diperoleh:

$$Q = Q_0 2(\alpha_0 - \tan^{-1} \frac{\partial y}{\partial x}) \quad (9)$$

Asumsikan pula sudut antara garis pantai ke sumbu x kecil (Dabees, 2000), maka persamaan (9) menjadi

$$Q = 2Q_0 \left( \alpha_0 - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (4) diperoleh:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2Q_0}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (11)$$

Persamaan (11) merupakan persamaan untuk menghitung perubahan garis pantai yang berbentuk persamaan diferensial parsial parabolik dan diselesaikan menggunakan transformasi Laplace. Persamaan ini menyatakan bahwa besarnya laju perubahan garis pantai  $y$  terhadap waktu  $t$  dipengaruhi oleh besarnya amplitudo transpor sedimen  $Q_0$  dan  $h$  di setiap sel  $x$ .

### b. Nilai Awal dan Syarat Batas

Penelitian ini menyelesaikan model perubahan garis pantai akibat pengaruh adanya groin secara analitik, sehingga nilai awal dan syarat batas yang digunakan adalah:

Nilai awal :  $y(x, 0) = 0$

Syarat batas :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \tan \alpha_b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, t) = 0$$

Dengan asumsi bahwa mula-mula garis pantai lurus maka diambil nilai awal  $y(x, 0) = 0$  yang menyatakan bahwa pada saat  $t = 0$  pantai tidak mengalami perubahan garis pantai artinya garis pantai lurus sepanjang  $x$ . Sedangkan syarat batas  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \tan \alpha_b$  menyatakan bahwa perubahan garis pantai di setiap sel  $x$  dipengaruhi oleh besarnya sudut datang gelombang pecah ke pantai di mana groin berada pada titik  $x = 0$ , syarat batas  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$  menyatakan bahwa untuk nilai  $x$  yang menuju  $\infty$  maka garis pantainya menuju 0 dan begitu juga untuk syarat batas  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, t) = 0$  menyatakan bahwa untuk nilai  $x$

yang menuju  $-\infty$  garis pantai menuju 0 artinya semakin jauh dari groin perubahan garis pantai yang ditimbulkan semakin kecil atau bahkan tidak mengalami perubahan karena sudah tidak mendapat pengaruh dari groin.

**c. Transformasi Laplace**

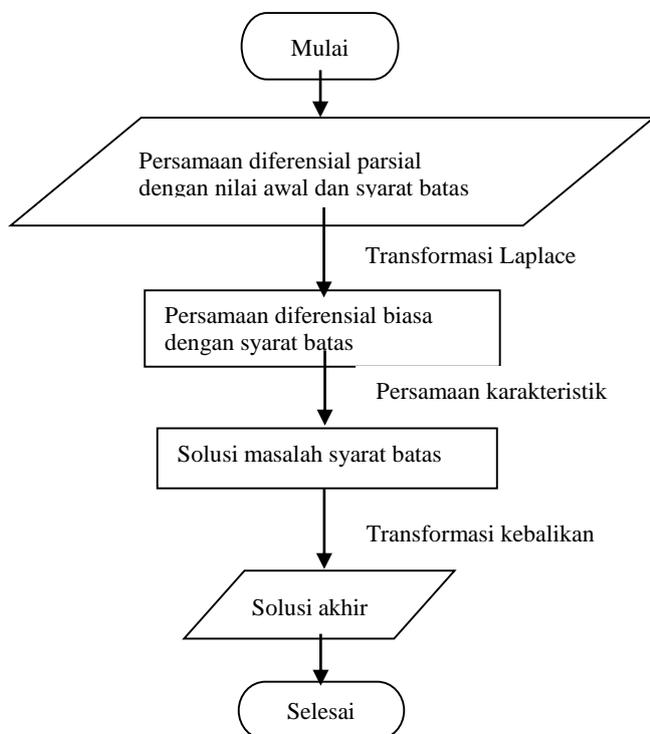
Misalkan  $f(t)$  didefinisikan untuk semua  $t \geq 0$ . Jika  $f(t)$  dikalikan dengan  $e^{-st}$  dan diintegrasikan terhadap  $t$  dari nol sampai tak hingga, integralnya ada, maka akan terbentuk fungsi dari  $s$ . Fungsi  $F(s)$  dinamakan transformasi Laplace dari  $f(t)$  dan dilambangkan dengan  $\mathcal{L}(f)$  [4].

Secara umum, transformasi Laplace didefinisikan sebagai berikut:

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Sebaliknya fungsi  $f(t)$  disebut transformasi kebalikan dari  $F(s)$  dan dilambangkan dengan  $\mathcal{L}^{-1}(F).f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$

Secara ringkas, langkah-langkah penyelesaian



Gambar 4. Diagram alir penyelesaian persamaan diferensial parsial menggunakan transformasi Laplace

**3. Hasil dan Pembahasan**

**3.1 Penyelesaian Model Perubahan Garis Pantai**

Adapun langkah pertama yang dilakukan adalah menerapkan transformasi Laplace bagi persamaan  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2Q_0}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  untuk ruas sebelah kiri terhadap variabel bebas  $t$ :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial y}{\partial t} dt \tag{12}$$

dengan menerapkan pengintegralan parsial didapat:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial y}{\partial t} dt &= e^{-st} y(x, t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -s e^{-st} y(x, t) dt \\ &= e^{-st} y(x, t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \\ &= y(x, 0) + s \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \end{aligned}$$

Substitusikan nilai awal  $y(x, 0) = 0$  ke persamaan di diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial y}{\partial t} dt &= s \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \\ &= sY(x, s) \end{aligned}$$

ngga,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \right] = sY(x, s) \tag{13}$$

kutnya terapkan juga transformasi Laplace bagi amaan (3.4) untuk ruas sebelah kanan:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x, s) \end{aligned} \tag{14}$$

Substitusikan persamaan (13) dan (14) ke persamaan (11) sehingga diperoleh bentuk:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x, s) = \frac{sh}{2Q_0} Y(x, s) \tag{15}$$

Persamaan (15) hanya mengandung turunan terhadap variabel bebas  $x$ , sehingga dapat dipandang sebagai persamaan diferensial biasa.

Langkah berikutnya adalah menerapkan transformasi Laplace untuk syarat-syarat batas yang diberikan.

Untuk syarat batas pertama  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \tan \alpha_b$  dengan menerapkan transformasi Laplace didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x}(0, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \tan \alpha_b dt \\ &= \tan \alpha_b \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \tan \alpha_b \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s} \tan \alpha_b \end{aligned} \quad (16)$$

Sedangkan untuk syarat batas kedua  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$  didapat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} Y(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Dan untuk syarat batas ketiga  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, t) = 0$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x, s) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^\infty e^{-st} y(x, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, t) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial biasa homogen orde kedua dengan syarat-syarat batas ini digunakan metode persamaan karakteristik. Pencarian solusi persamaan diferensial biasa ini dibagi ke dalam dua tahap, tahap pertama dilakukan untuk mencari solusi di sebelah hilir groin dengan menerapkan syarat batas pertama dan kedua sedangkan tahap kedua untuk mencari solusi di sebelah hulu groin dengan menerapkan syarat batas pertama dan ketiga.

Adapun persamaan karakteristik dari persamaan (15) dapat dituliskan sebagai:

$$r^2 - \frac{sh}{2Q_0} = 0$$

sehingga akar karakteristiknya adalah  $r_1 = \sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}$  dan

$r_2 = -\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}$ . Dengan demikian solusi umum dari persamaan diferensial biasa (15) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$Y(x, s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \quad (19)$$

Untuk memperoleh solusi di sebelah hilir groin mula-mula terapkan syarat batas  $\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x, s) = 0$  pada persamaan (19) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} Y(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( c_1 e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \right) = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} c_1 e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} + \lim_{x \rightarrow \infty} c_2 e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} = 0 \\ &= c_1 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} + c_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

karena  $c_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} = 0$ , maka persamaan (20) menjadi:

$$c_1 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} = 0$$

karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \neq 0$ , maka haruslah:

$$c_1 = 0$$

Substitusikan nilai  $c_1 = 0$  ke turunan pertama persamaan (19) terhadap  $x$  atau  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x, s)$  untuk mendapatkan nilai  $c_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x}(x, s) &= c_1 \frac{sh}{2Q_0} e^{\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} - c_2 \frac{sh}{2Q_0} e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \\ &= -c_2 \frac{sh}{2Q_0} e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat batas pertama  $\frac{\partial Y}{\partial x}(0, s) = \frac{1}{s} \tan \alpha_b$ , maka:

$$\begin{aligned} -c_2 \frac{sh}{2Q_0} &= \frac{1}{s} \tan \alpha_b \\ c_2 &= -\frac{\frac{1}{s} \tan(\alpha_b) \sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}}{\frac{sh}{2Q_0}} \\ c_2 &= -\frac{2Q_0 \sqrt{\frac{sh}{2Q_0}} \tan(\alpha_b)}{s^2 h} \end{aligned}$$

Solusi khusus permasalahan syarat batas persamaan diferensial biasa homogen orde kedua ini didapat dengan mensubstitusikan nilai  $c_1 = 0$  dan  $c_2 =$

$-\frac{2Q_0 \sqrt{\frac{sh}{2Q_0}} \tan(\alpha_b)}{s^2 h}$  ke persamaan (19) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Y(x, s) &= -\frac{2Q_0 \sqrt{\frac{sh}{2Q_0}} \tan(\alpha_b)}{s^2 h} e^{-\sqrt{\frac{sh}{2Q_0}}x} \\ &= -\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\frac{h}{2Q_0}}x\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (21)$$

Langkah selanjutnya adalah menerapkan transformasi kebalikan pada persamaan (21).

Menggunakan tabel transformasi Laplace, transformasi kebalikan bagi persamaan (21) adalah:

$$y(x, t) = -\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \left( 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{4t}} - \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x}{2\sqrt{t}} \right) \right)$$

Persamaan di atas merupakan solusi bagi persamaan perubahan garis pantai di sebelah hilir groin. Perubahan garis pantai  $y$  ditentukan oleh besarnya abrasi dan akresi yang terjadi pada pantai yang ditinjau serta arah sudut datang gelombang pecah.

Pada persamaan tersebut solusi  $y(x, t)$  terbagi kepada

dua suku, yaitu  $-\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{4t}}$  yang

menggambarkan kondisi pantai mengalami abrasi karena suku ini bernilai negatif di mana garis pantai

yang terbentuk mengikuti pola grafik  $e^{-\frac{hx^2}{4t}}$ . Sedangkan suku kedua yaitu

$$\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x}{2\sqrt{t}} \right)$$

menggambarkan kondisi pantai mengalami akresi karena suku ini bernilai positif dan garis pantai yang terbentuk mengikuti pola grafik

$$\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x}{2\sqrt{t}} \right).$$

*erfc* (complementary error function) yang terdapat pada solusi ini merupakan salah satu fungsi yang penting dalam fisika matematika. *erf* (complementary error function) seperti dalam Boas (2006) didefinisikan sebagai:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (22)$$

Fungsi ini juga dapat didekati dengan deret asimtotik yang dituliskan dalam bentuk:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + \dots \right) \quad (23)$$

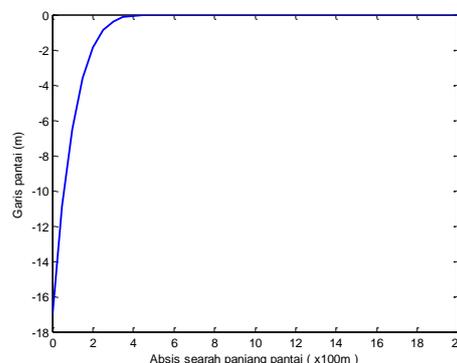
Berdasarkan persamaan solusi sebelah hilir groin dapat dilihat bahwa besarnya perubahan garis pantai  $y$  (abrasi dan akresi) dipengaruhi oleh nilai amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai  $Q_0$ , kedalaman laut

pada saat gelombang pecah  $h$ , dan sudut datang gelombang pecah ke garis pantai  $\alpha_b$ .

Semakin besar amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai  $Q_0$  maka semakin besar pula perubahan garis pantai  $y$  yang ditimbulkan begitupun sebaliknya. Sedangkan besarnya kedalaman laut pada saat gelombang pecah berbanding terbalik dengan besarnya perubahan garis pantai yang terjadi. Artinya semakin dangkal kedalaman laut pada saat gelombang pecah maka garis pantai yang ditimbulkan semakin besar namun semakin dalam kedalaman laut pada saat gelombang pecah maka garis pantai yang terjadi semakin kecil. Hal ini disebabkan karena semakin berkurang kedalaman laut semakin bertambah tinggi gelombang yang terbentuk.

Seperti halnya amplitudo, besar sudut datang gelombang pecah juga sebanding dengan besar perubahan garis pantai.

Solusi sebelah hilir groin dapat digambarkan ke dalam grafik berikut:



Gambar 5. Grafik garis pantai untuk  $x$  menuju  $\infty$

Gambar (5) diperoleh dengan memasukkan nilai  $K =$

$$0,401, \rho = 1030 \frac{kg}{m^3}, H_b = 1,5 m, g =$$

$$\frac{9,81}{\left(\frac{1}{24 \times 3600}\right)^2 \text{ hari}^2}, h_b = 2 m, \rho_s = 2650 \frac{kg}{m^3}, p =$$

$$0,4, \alpha_b = \frac{8x\pi}{180} \text{ radian}, t = 10 \text{ hari}, \text{ dan } x =$$

$$0: 2000 m.$$

Dalam penelitian ini, diasumsikan groin berada pada titik  $x = 0$ . Nilai  $K = 0,401$  diambil karena merupakan nilai konstanta seperti yang diusulkan CERC (Coastal Engineering Research Center).  $\rho =$

$1030 \frac{kg}{m^3}$  merupakan rapat massa air laut dan  $\rho_s = 2650 \frac{kg}{m^3}$  merupakan asumsi rapat massa pasir (sedimen) yang umumnya digunakan.  $p = 0,4$  merupakan porositas pasir pantai, sedangkan  $H_b = 1,5 m$ ,  $h_b = 2 m$ , dan  $\frac{8x\pi}{180}$  radian diambil dari data Triatmodjo (1999) untuk dibandingkan dengan solusi numerik yang ia hasilkan.

Seperti yang ditunjukkan dalam Gambar (5) sebelah hilir groin mengalami abrasi karena abrasi yang terjadi lebih besar daripada akresinya.

Dengan langkah yang serupa, didapat solusi sebelah hulu groin berbentuk:

$$y(x, t) = \frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan[(\alpha)_b] \left( 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{4t}} + \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \frac{-\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x}{2\sqrt{t}} \right) \right)$$

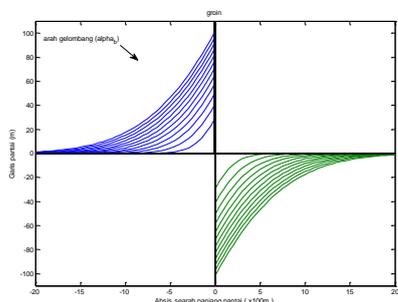
Persamaan di atas merupakan solusi persamaan perubahan garis pantai di sebelah hulu groin. Solusi  $y(x, t)$  dalam persamaan ini juga terbagi ke dalam dua

suku yaitu  $\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{4t}}$  yang menggambarkan kondisi pantai mengalami akresi karena suku ini bernilai positif untuk  $x$  menuju  $-\infty$ . Sementara suku

$$\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \frac{-\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x}{2\sqrt{t}} \right)$$

menggambarkan kondisi pantai mengalami abrasi karena bernilai negatif yang dipengaruhi oleh nilai  $x$  yang negatif.

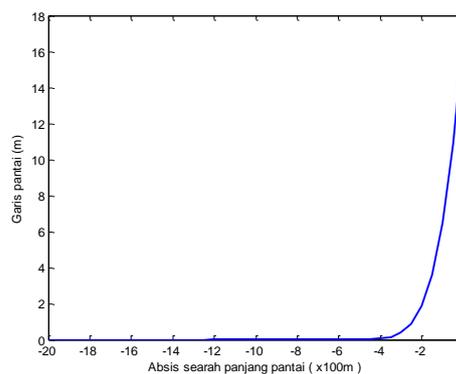
Beberapa elemen yang berpengaruh dalam persamaan



Gambar 7. Perubahan garis pantai tiap bulan selama satu tahun secara analitik ini yaitu amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai  $Q_0$ , kedalaman air pada saat gelombang pecah  $h$ , dan

sudut datang gelombang pecah  $\alpha_b$ . Dimana besarnya amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai  $Q_0$  dan sudut datang gelombang pecah  $\alpha_b$  sebanding dengan besarnya perubahan garis pantai yang ditimbulkan sedangkan besarnya kedalaman air pada saat gelombang pecah  $h$  berbanding terbalik dengan besarnya perubahan garis pantai.

Solusi sebelah hulu groin dapat digambarkan ke dalam grafik berikut:



Gambar 6. Grafik garis pantai untuk  $x$  menuju  $-\infty$

Gambar (6) diperoleh dengan memasukkan nilai-nilai yang sama seperti pada Gambar (5) hanya saja untuk range  $x$  yang digunakan berbeda yaitu nilai  $K = 0,401, \rho = 1030 \frac{kg}{m^3}, H_b = 1,5 m, g = \frac{9,81}{(\frac{1}{24 \times 3600})^2} \frac{m}{hari^2}, h_b = 2 m, \rho_s = 2650 \frac{kg}{m^3}, p = 0,4, \alpha_b = \frac{8x\pi}{180}$  radian,  $t = 10$  hari, dan  $x = -2000: 0 m$ .

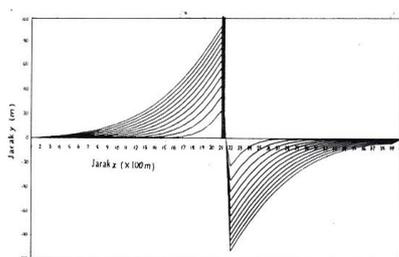
Berdasarkan grafik dapat dilihat bahwa sebelah hulu groin mengalami akresi karena akresi yang ditimbulkan lebih besar dari abrasinya.

### 3.2 Interpretasi Solusi ke Bentuk Grafik

Grafik-grafik berikut menunjukkan interpretasi solusi analitik yang dihasilkan dan solusi numerik yang dikerjakan [7].

Pada grafik, tampak bahwa semakin bertambahnya waktu maka sebelah hulu groin semakin mengalami akresi. Begitu juga pada sebelah hilir groin semakin

mengalami abrasi seiring dengan bertambahnya waktu.



Gambar 8. Perubahan garis pantai tiap bulan selama satu tahun secara numerik [7].

Berdasarkan grafik dapat dilihat bahwa terdapat kesamaan antara pola grafik yang dihasilkan dari solusi analitik dan numerik yaitu sebelah hulu groin mengalami akresi sedangkan sebelah hilir groin mengalami abrasi. Hal ini terjadi karena groin akan menahan gerak sedimen di sebelah hulu sementara transpor sedimen di sebelah hilir masih tetap terjadi namun suplai dari sebelah hulu terhalang oleh groin. Hanya saja pada solusi analitik groin diasumsikan berada pada titik  $x = 0$  sedangkan pada solusi numerik groin diasumsikan berada pada titik  $x = 21$ . Perbedaan besarnya garis pantai yang ditimbulkan antara analitik dan numerik merupakan besarnya nilai galat yang ditimbulkan solusi numerik.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi permasalahan model perubahan garis pantai

$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2Q_0}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  untuk nilai awal  $y(x, 0) = 0$  dan syarat batas  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \tan \alpha_b$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, t) = 0$  dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y(x, t) = \begin{cases} -\frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \left( 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{2Q_0}} - \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right) & \text{jika } 0 \leq x < \infty \\ \frac{2Q_0}{h} \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \tan(\alpha_b) \left( 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{hx^2}{2Q_0}} + \sqrt{\frac{h}{2Q_0}} x \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{h}{2Q_0}} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right) & \text{jika } -\infty < x \leq 0 \end{cases}$$

Kedua persamaan tersebut menyatakan bahwa sebelah hilir groin mengalami abrasi dan sebelah hulu groin mengalami akresi dengan asumsi groin berada pada titik  $x = 0$ .

2. Berdasarkan persamaan diketahui bahwa yang mempengaruhi perubahan garis pantai adalah besarnya abrasi dan akresi yang terjadi, arah datang gelombang, amplitudo transpor sedimen sepanjang pantai  $Q_0$ , kedalaman air pada saat gelombang pecah  $h$ , dan sudut datang gelombang pecah  $\alpha_b$ . Besarnya  $Q_0$  dan  $\alpha_b$  sebanding dengan besarnya garis pantai yang ditimbulkan sedangkan besarnya  $h$  berbanding terbalik dengan besarnya perubahan garis pantai.
3. Terdapat kesamaan antara pola grafik yang dihasilkan dari solusi analitik dan solusi numerik, yaitu sebelah hulu mengalami akresi dan sebelah hilir mengalami abrasi. Perbedaan besarnya perubahan garis pantai antara analitik dan numerik merupakan nilai galat yang ditimbulkan solusi numerik.

#### Daftar Pustaka

[1] Boas, M. L. 2006. *Mathematical Methods in the Physical Sciences* Third Edition. John Wiley & Sons, Inc, United States of America.  
 [2] Dabees, M. A. 2000. *Efficient Modelling of Beach Evolution*. Ph.D. Thesis. Queen University, Kingston, Ontario, Canada.  
 [3] Horikawa, K. 1988. *Nearshore Dynamics and Coastal Processes*. University of Tokyo Press. 522 pp.

- [4] Kreyszig, E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan* edisi keenam. Terjemahan dari *Advanced Engineering Mathematics*, oleh Bambang Sumantri, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- [5] Marhaway. 2009. *Prediksi Perubahan Garis Pantai di Ulee Lheue dan Leupung dengan Menggunakan Metode Satu Garis Berdasarkan Data Gelombang. Skripsi.* Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh.
- [6] Sakka, Purba, M., Nurjaya, I. W., Pawitan, H., dan Siregar, V. P. 2011. *Studi Perubahan Garis Pantai di Delta Sungai Jeneberang, Makassar. Jurnal Ilmu dan Teknologi Kelautan Tropis.* 3 (2) :112-126.
- [7] Triatmodjo, B. 1999. *Teknik Pantai* edisi kedua. Beta Offset, Yogyakarta.
- [8] USACE (U.S. Army Corps of Engineers). 2003. *Coastal Sediment Processes.* Department of the Army U.S. Army Corp of Engineers, Washington DC.