

## Analisis Matematis untuk Pemompaan Air Tanah 2 Dimensi Steady pada Aquifer Bebas

Maizir

Jurusan Teknik Sipil, Institut Teknologi Padang, Jl. Gajah Mada Kandis Nanggalo,  
Padang – 25 143, Indonesia

Email: ir.maizir@gmail.com

Dikirim: 22 Mei 2020

Direvisi: 13 Juni 2020

Diterima: 2 Juli 2020

### ABSTRAK

Pemanfaatan air tanah untuk memenuhi kebutuhan air bersih dapat diambil dari sumber air tanah dengan menggunakan teknologi pompa. Pemompaan air tanah yang berlebihan dapat menyebabkan ketidakseimbangan *sink* – *source* yang mengakibatkan terjadinya defisit sumber air tanah itu sendiri. Masalah pemompaan sumber air tanah yang berpengaruh pada *source* dan *sink* ini dapat dianalisis secara matematis. Analisis matematis ini bertujuan untuk menurunkan persamaan matematis keadaan air tanah akibat pengaruh *source* dan *sink*. Analisisnya diturunkan dengan metode elemen hingga (finite element). Diskritisasi domain aliran air tanah, elemen hingganya menggunakan elemen segitiga dengan fungsi pendekatan linear. Hasil analisis matematis dengan metode elemen hingga ini ditujukan untuk pembuatan model simulasi matematik guna memprediksi aliran air tanah dua dimensi keadaan *steady* (steady-state) 2D pada aquifer bebas (unconfined aquifer) akibat perlakuan *sink* dan *source*. Parameter aquifer dianggap konstan sepanjang elemen, tetapi dapat bervariasi di antara elemen ke elemen lainnya. Syarat batas diberlakukan untuk kedua jenis batas yaitu batas *flux* spesifik dan batas *head* spesifik. *Sinks* dan *sources* dibolehkan pada titik nodal. Dari hasil analisis ini, jika dibuatkan model simulasinya dengan diberikan data masukan berupa debit *source* atau *sink*, keadaan awal dan keadaan batasnya, maka kita akan dapat mensimulasikan keadaan muka air tanah akibat pemompaan dengan perlakuan *source* dan/atau *sink*. Dari hasil simulasinya juga akan dapat menggambarkan keadaan elevasi muka air tanah sebelum dan sesudah adanya perlakuan *source* atau *sink*.

**Kata kunci:** air tanah, debit *source* atau *sink*, elevasi muka air tanah

### 1. PENDAHULUAN

Air, terutama air bersih untuk kebutuhan rumah tangga dan industri dapat diperoleh dari sumber air permukaan dan air tanah. Di kota-kota besar sumber air permukaannya sudah tidak dapat digunakan untuk memenuhi kebutuhan air bersih, karena pada umumnya sumber air tersebut sudah tercemar akibat limbah rumah tangga dan industri. Untuk memenuhi kebutuhan air bersih rumah tangga dan industri, masyarakat mendapatkannya dari sumber air tanah (Maizir, 2019). Pemanfaatan air tanah tersebut dilakukan dengan menggunakan teknologi pompa. Penggunaan pompa untuk menyedot air dari permukaan yang rendah ke tempat yang lebih tinggi sudah menjadi bagian aktivitas harian masyarakat. Pemanfaatan air tanah ini dari tahun ke tahun selalu menunjukkan peningkatan, terutama di kota-kota besar pada kawasan pemukiman yang padat dan kawasan industri. Peningkatan eksploitasi sumber daya air tanah bagaimanapun akan menimbulkan masalah tersendiri, seperti penurunan muka air tanah, perubahan lingkungan, bergesernya keseimbangan ekosistem dan lain-lain. Selain itu juga dapat menyebabkan terjadinya polusi terhadap air tanah, atau adanya intrusi air laut terhadap daratan. Untuk itu perlu diupayakan tindakan kearah konservasi sumber daya air tanah tersebut.

Secara umum air tanah diartikan sebagai air yang berada dan berasal dari lapisan tanah, baik air yang berada pada lapisan tanah tak jenuh maupun air yang berada pada lapisan tanah jenuh. Air yang berada pada lapisan tanah tak jenuh (soil water), akan menunjang kehidupan vegetasi di permukaan. Sedangkan air yang berada pada lapisan tanah jenuh (groundwater), menjadi deposit air di dalam lapisan tanah

(Panguriseng, 2018). Air tanah adalah air yang berada dan bergerak dalam lapisan tanah yang mudah dilalui oleh air, seperti lapisan pasir atau kerikil yang disebut dengan lapisan permeabel. Lapisan permeabel yang jenuh air disebut dengan lapisan aquifer. Selain itu ada lapisan tanah yang tidak bisa dilalui air, yaitu lapisan kedap air yang disebut dengan lapisan impermeabel. Aquifer tersebut dibedakan atas aquifer bebas dan aquifer tertekan. Aquifer bebas adalah aquifer jenuh air, lapisan pembatasnya hanya berada pada bagian bawah dan batas atasnya adalah muka air tanah itu sendiri. Sementara aquifer tertekan merupakan aquifer yang jenuh air yang di bagian atas dan bawahnya dibatasi oleh lapisan kedap (Kodoati & Syarif, 2010).

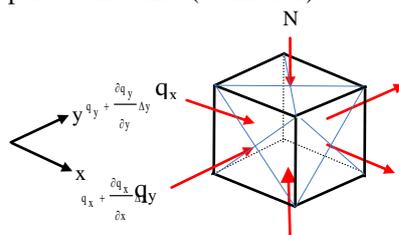
Volentino (2013) mengkaji pengawasan pemanfaatan air tanah oleh pemerintah di kawasan industri Kota Semarang menggunakan model deskriptif kuantitatif, hasil analisis penelitian ini diketahui bahwa seluruh kawasan industri memiliki kecenderungan untuk memanfaatkan air tanah dibandingkan air PDAM. Putri dkk (2018), mengidentifikasi sistem aliran air tanah, mengestimasi kuantitas, dan menganalisis kualitas air tanah di desa Sembangun, menggunakan pendekatan kuantitatif dan kualitatif dengan mengumpulkan data primer melalui metode sensus sumur dan mata air di Desa Sembangun. Lokasi sumur untuk *pumping test* metode *slug test* ditentukan dengan teknik *purposive sampling*. Hasil penelitian menunjukkan kondisi air tanah yang melimpah dan mengalir dari arah utara menuju barat daya yang merupakan lembah dengan mata air. Guvil (2018), meneliti untuk mengestimasi sebaran kawasan resapan air berbasis penggunaan lahan aktual di Kota Padang berdasarkan data parameter spasial seperti curah hujan, kemiringan lereng, peta jenis tanah, dan penggunaan lahan yang diperoleh dari data citra landsat 8 OLI dengan metode klasifikasi berbasis objek. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode skoring dan tumpang susun atau overlay. Penelitian ini memetakan sebaran kondisi daerah resapan air berdasarkan kondisi saat ini, penentuan daerah yang ditetapkan sebagai zona resapan air Kota Padang menggunakan metode kombinasi skoring dan aritmatik dalam analisis spasial. Hasil analisis menghasilkan enam kelas kondisi potensi daerah resapan air, yang terdiri dari kondisi baik, normal alami, mulai kritis, agak kritis, kritis dan sangat kritis.

Analisis aliran air tanah dapat dilakukan dengan pendekatan pemodelan, baik model fisik (eksperimen) maupun model matematik (numerik). Hasil analisis aliran air tanah ini bertujuan untuk menganalisis model matematik muka air tanah regional akibat pemompaan berdasarkan data masukan, syarat awal dan syarat batas yang diasumsikan, yang dapat memberikan simulasi keadaan elevasi muka air tanah regional serta simulasi peramalan keadaan masa datang. Model yang akan dianalisis ini adalah model aliran air tanah dua dimensi akibat proses pemompaan pada keadaan stabil (*steady state*) pada aquifer bebas. Analisis aliran air tanah dapat dinyatakan melalui persamaan pengatur yang diturunkan dari prinsip-prinsip dasar fisika. Model tersebut ditinjau secara numerik dengan menerapkan metode elemen hingga (*finite element method*). Untuk merumuskan persamaan pengatur kedalam persamaan dasar elemen hingga digunakan metode Galerkin. Lingkup analisis model yang dibahas ini adalah untuk kasus aliran air tanah pada aquifer bebas keadaan stabil (*steady state*), diskritisasi domain dengan menggunakan bentuk elemen segitiga.

## 2. PERSAMAAN DASAR ALIRAN AIR TANAH 2 DIMENSI STEADY

### 2.1 Persamaan Dasar Aliran Air Tanah

Persamaan dasar gerakan aliran air tanah diturunkan dari hukum kekekalan massa, dimana untuk suatu ruang pengamatan, berlaku bahwa jumlah massa aliran masuk dikurangi jumlah massa aliran keluar, sama dengan perubahan volume massa persatuan waktu (Gambar 1).



Gambar 1: Ruang pengamatan

Persamaan kontinuitas aliran keluar masuk (sink – source)  $I - O = \frac{\partial V}{\partial t}$  (2.1)

I adalah jumlah massa aliran masuk (inflow rate), O adalah jumlah massa aliran keluar (outflow rate), V adalah volume ruang pengamatan (Storage) dan t adalah waktu.

Pada ruang pengamatan tersebut berlaku:  $I = q_x \cdot \Delta y + q_y \cdot \Delta x + N \cdot \Delta x \cdot \Delta y$  (2.2)

$$O = (q_x \Delta x \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x}) \Delta y + (q_y + \Delta y \cdot \frac{\partial q_y}{\partial y}) \Delta x$$
 (2.3)

$q_x$  dan  $q_y$  adalah debit persatuan lebar pada aquifer, N adalah debit rata-rata per unit luas,  $\Delta x$  dan  $\Delta y$  sisi-sisi ruang pengamatan.

Perubahan volume dalam ruang pengamatan adalah:  $\frac{\partial V}{\partial t} = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$  (2.4)

S adalah koefisien volume ruang (storage coefficient) dan h tinggi muka air tanah (hydraulic head) pada aquifer. Substitusikan persamaan (2.2) s.d (2.4) kedalam persamaan (2.1), diperoleh:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y - \frac{\partial q}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y + N \cdot \Delta x \cdot \Delta y = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y$$
 (2.5)

dengan membagi suku-suku persamaan (2.5) dengan  $(\Delta x \cdot \Delta y)$ , didapat persamaan diferensial parsial berikut:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + N = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$
 (2.6)

**Hukum Darcy**

Persamaan (2.6) mengandung 3 variabel bebas, yaitu  $q_x$ ,  $q_y$  dan h. Agar persamaan tersebut dapat diselesaikan, diperlukan persamaan tambahan, yaitu dari persamaan aliran air tanah berdasarkan hukum Darcy (Bear,1972). Kecepatan spesifik aliran air tanah dalam arah tertentu s menurut Darcy dinyatakan sebagai:

$$v_s = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial s}$$
 (2.7a)

h adalah tinggi muka air tanah (head) dan k adalah koefisien permeabilitas atau hantaran hidraulik (hydraulic conductivity) yang tergantung pada sifat butiran dan cairan, yaitu:  $k = \frac{\kappa \cdot \rho \cdot g}{\mu}$  (2.7b)

$\kappa$  adalah permeabilitas hakiki (intrinsic permeability) dan  $\mu$  kekentalan cairan. Untuk ruang pengamatan dengan kedalaman h yang sama dengan tinggi air tanah (Gambar 2.1), debit spesifik ke arah x dan y adalah:

$$q_x = -k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \qquad q_y = -k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

atau  $q_x = -T \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \qquad q_y = -T \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$  (2.8)

T adalah transmisitas aquifer  $\longrightarrow (T = k \cdot h)$

Dari hasil substisusi persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.6), didapat persamaan pengatur untuk aliran air tanah dua dimensi unsteady sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = S \frac{\partial h}{\partial t}$$
 (2.9)

atau  $\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = S \frac{\partial h}{\partial t}$  (2.9a)

Persamaan ini menggambarkan konservasi massa air tanah pada suatu titik dalam sisten aliran air tanah dalam keadaan transien. Keadaan steady terjadi bila gradien hidrolis permukaan air tanah sama dengan 0 ( $\partial h / \partial t = 0$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = 0$$

atau 
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = 0 \tag{2.10}$$

N kapasitas pengisian kembali (recharge) ruang tampungan aquifer yang dapat berupa source dan sink. Karena muka air pada kedalaman h tidak linear, maka menurut asumsi Dupuit dipakai nilai (h<sup>2</sup>) sebagai variabel hitungan, yaitu:

$$h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2}$$

$$h \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2}$$

Apabila persamaan ini digabung kembali ke dalam persamaan (2.10), diperoleh persamaan matematik untuk aquifer bebas sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} k_x \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k_y \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} + N = 0 \tag{2.11}$$

Jika N = 0, (1/2)k<sub>x</sub> = D<sub>x</sub> dan (1/2)k<sub>y</sub> = D<sub>y</sub>, maka persamaan (2.11) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D_x \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} = 0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) diatas adalah persamaan pengatur untuk aliran air tanah dalam aquifer bebas dua dimensi tanpa memperhitungkan laju infiltrasi (N). Apabila keadaan aquifer dipengaruhi oleh debit pemompaan (sink) atau debit pengisian (source), maka persamaannya menjadi:

$$D_x \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} + Q = 0 \tag{2.13}$$

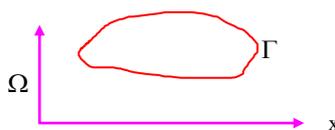
Q adalah debit pengisian atau debit pemompaan

**2.2 Definisi matematis aliran air tanah**

Persamaan (2.13) adalah persamaan aliran air tanah dalam aquifer bebas dua dimensi yang menggambarkan konservasi massa air tanah pada titik tertentu dalam sistem aliran air tanah. Untuk menyelesaikan bagian-bagian persamaan diferensial parsial tersebut, dibutuhkan spesifikasi tambahan dari masalah aliran air tanah. Biasanya solusi dalam bentuk keadaan transien dan keadaan steady tergantung kepada definisi domain solusinya (solution domain), paramater aquifer, *sinks-sources*, dan syarat batasnya. Untuk keadaan transient, juga perlu dinyatakan syarat awalnya.

**Domain**

Domain adalah nama yang diberikan untuk mengidentifikasi ruang analisis aliran air tanah, domain khusus untuk kasus aliran air tanah dalam keadaan steady atau domain ruang dan waktu untuk kasus aliran air tanah dalam keadaan transien. Secara umum domain adalah kondisi geografis dari aliran air tanah, yang dalam analisis ini adalah aliran air tanah pada aquifer bebas, dimana penyelesaian persamaan (2.10) atau persamaan (2.13). Dalam model aliran air tanah ini domainnya merupakan suatu areal geografi. Secara matematis areal dinyatakan dengan domain Ω dalam bidang koordinat x-y yang dikelilingi batas domain Γ (lihat gambar 2). Batas domain dapat berupa batas alam daerah aliran berupa sungai, danau atau batas alam lain dengan jenis permeabilitas yang kontras.



**Gambar 2:** Domain penyelesaian.

**Paramater aquifer**

Parameter aquifer adalah koefisien tumpungan S dan transmisitas T dalam domain aliran. Transmisitas T adalah hasil perkalian koefisien permeabilitas atau hantaran hidraulik k dengan ketebalan aquifer h. Koefisien tumpungan S adalah hasil perkalian tumpungan spesifik aquifer  $S_0$  dengan ketebalan aquifer. Dapat dinyatakan bahwa perubahan tegangan total pada tanah akan berakibat pula pada tegangan butiran dan tekanan air tanah:

$$d\sigma = d\sigma + dp \tag{2.14a}$$

Jika tegangan total tetap, sedangkan tekanan air berubah, maka:

$$d\sigma = 0 = d\sigma + dp \rightarrow d\sigma = -dp \tag{2.14b}$$

berarti pada suatu titik di dalam aquifer, jika tekanan air berkurang menurut (2.14b) tegangan antar butir akan bertambah, sehingga aquifer memadat karena porositas berkurang. Hal ini menyebabkan sejumlah air tanah mengalir keluar ruang simpan di dalam aquifer. Sebaliknya terjadi pengisian ruang simpan di dalam aquifer bila perubahan tekanan adalah penambahan tekanan air. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa tumpungan spesifik aquifer  $S_0$  adalah perubahan volume air (keluaran atau imbuan) persatuan volume

aquifer persatuan perubahan tekanan: 
$$S_0 = \frac{\Delta U_w}{U_t \cdot \Delta p} \tag{2.15a}$$

atau persatuan perubahan tinggi piezometrik: 
$$S_0 = \frac{\Delta U_w}{U_t \cdot \Delta h} \tag{2.15b}$$

dimensi  $S_0$  adalah  $[L]^{-1}$ . Harganya ditentukan dari test aquifer, sumur *geologic logs*, data geohydrologis atau informasi lain tentang sistem aliran air tanah.

**Syarat batas dan syarat awal**

Syarat batas adalah pernyataan matematik dari keadaan aliran air tanah pada batas daerah aliran. Secara umum keadaan batas tersebut dapat dibagi atas dua tipe, yaitu batas flux spesifik dan batas head spesifik.

Batas flux spesifik dapat dinyatakan dari hubungan: 
$$T \cdot \frac{\partial h}{\partial n} = q_b (\Gamma) \tag{2.16}$$

dimana  $\partial/\partial n$  adalah turunan berarah normal (normal derivative) pada batas dan  $q_b$  adalah debit spesifik yang masuk ke dalam daerah aliran persatuan panjang batas domain, merupakan fungsi posisi.

Keadaan batas head spesifik dinyatakan dari hubungan: 
$$h = h_b (\Gamma) \tag{2.17}$$

dimana  $h_b$  adalah head spesifik, merupakan fungsi posisi. Kondisi batas tersebut harus sesuai dengan keadaan alami, misalnya keadaan batas flux spesifik berada pada batas dengan permeabilitas kontras, dan keadaan batas head spesifik berada pada muka air alami seperti sungai atau danau. Syarat awal adalah tinggi muka air tanah (head) dari daerah aliran.

**Sinks dan sources**

*Sinks* adalah debit pengambilan (discharge) dan *sources* adalah debit pengisian (recharge). *Recharge* umumnya mekanisme aliran infiltrasi, perkolasi, curah hujan, pengembalian aliran air irigasi, limbah domestik maupun yang lainnya. Sedangkan *discharge* umumnya dalam bentuk mekanisme pemompaan, debit aliran ke sungai atau danau dan jenis pemakaian air tanah lainnya.

**3. METODA ELEMEN HINGGA CARA GALERKIN**

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metoda elemen hingga mempunyai beberapa langkah:

1. Menetapkan jawaban pendekatan (*trial solution*) berdasarkan syarat batas dan syarat awal.
2. Mensubstitusikan jawaban pendekatan tersebut ke dalam persamaan diferensial asal dan mentransformasikannya ke dalam sistem persamaan aljabar dengan sejumlah persamaan yang mengandung sejumlah bilangan anu (variable).
3. Penyelesaian sistem persamaan tersebut ditujukan untuk mendapatkan bilangan anu (variable) dari jawaban pendekatan pada poin 1.

Dasar dari metoda ini adalah menggantikan jawaban sebenarnya (exact solution) dari persamaan diferensial parsial asal dengan jawaban pendekatan melalui kontinuitas bagian-bagian kecil (elemen). Fungsi kontinu dari elemen tersebut dinyatakan oleh koefisien-koefisien fungsi yang menyatakan hubungan titik-titik diskrit, dimana harga fungsi di antara nodal dihitung dengan fungsi interpolasi di atas elemen-elemen. Sebagai jawaban pendekatan, tentu hasilnya tidak persis sama dengan jawaban sebenarnya. Perbedaan ini menghasilkan residu. Dalam metoda elemen hingga residu tersebut diusahakan sedapat mungkin menuju nol melalui pemilihan koefisien pada fungsi interpolasi.

**3.1 Metode Galerkin**

Jika jawaban sebenarnya dari persamaan diferensial parsial adalah:

$$f(h) = 0 \tag{3.1}$$

h mewakili jawaban dalam domain  $\Omega$  yang terlingkup dalam batas  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Syarat batasnya adalah:

$$T \frac{\partial h}{\partial n} = q_b(\Gamma_1) \text{ pada } \Gamma_1$$

dan  $h = h_b(\Gamma_2)$  pada  $\Gamma_2$  (3.2)

n berarah keluar, sebagai turunan normal di batas.

Penyelesaian  $f(h) = 0$ , kita asumsikan sebagai jawaban pendekatan dengan bentuk:

$$h = \hat{h} = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \phi_i \tag{3.3}$$

$\hat{h}$  adalah deret pendekatan untuk h,  $\phi_i$  fungsi pendekatan bebas linier pada domain  $\Omega$ , dan  $H_i$  koefisien bilangan tak tentu. Selisih jawaban pendekatan dengan jawaban sebenarnya adalah residu, yaitu

$$R = f(\hat{h}) - f(h) \tag{3.4}$$

karena  $f(h) = 0$ , maka:  $R = f(\hat{h})$

Agar residu mendekati nol dan merata pada seluruh domain  $\Omega$ , dapat didekati melalui pemilihan koefisien bilangan tak tentu  $H_i$ , sehingga:  $\int_{\Omega} R \cdot d\Omega = 0$  (3.5)

dan untuk dapat menghasilkan sejumlah persamaan,  $H_i$  dihitung dengan memasang fungsi pemberat (weighting function) di tiap elemen, yaitu:  $\int_e R \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$  (3.6)

dimana  $w_i$  adalah fungsi pemberat bebas linier yang dinyatakan sebagai:

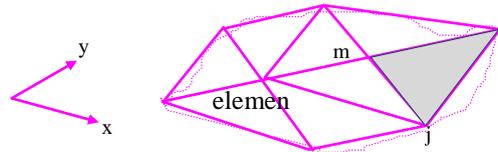
$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{bila } x \text{ dalam } \Omega_i \\ 0 & \rightarrow \text{bila } x \text{ di luar } \Omega_i \end{cases}$$

Menurut Galerkin, yang menjadi fungsi pemberat tersebut adalah fungsi pendekatan (*trial functions*) itu sendiri, yaitu:  $w_i(x) = \phi_i(x)$  (3.7)

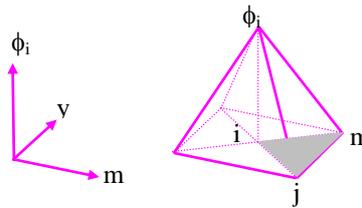
sehingga persamaan (3.6) menjadi:  $\int_e R \cdot \phi_i \cdot d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$  (3.8)

***Fungsi pendekatan pada domain dua dimensi (2D)***

Bentuk elemen segitiga biasa dipakai untuk menyatakan domain dua dimensi irregular, seperti terlihat pada Gambar 3. Bentuk elemen segitiga dengan sudut-sudut langsung akan lebih mudah menggambarkan geometri yang kompleks. Jika kita gunakan fungsi pendekatan linear dengan elemen segitiga, maka proses analisisnya hanya melibatkan rumusan integral yang sederhana. Fungsi pendekatan linear yang ditunjukkan pada Gambar 4, adalah berbentuk piramid dengan nodal-nodal poligonal sebagai alas. Pada nodal i harga fungsi pendekatan bernilai 1, sedangkan pada nodal lainnya dalam domain harganya nol. Begitu juga pada elemen segitiga yang lainnya, dimana nodal i yang dimilikinya mempunyai nilai fungsi pendekatan yang bervariasi dari 1 pada nodal i menuju nol pada nodal yang lainnya.



**Gambar 3:** Domain solusi 2D didiskritisasi dengan elemen segitiga

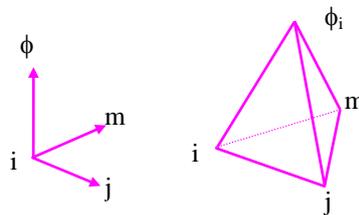


**Gambar 4:** Fungsi pendekatan linier nodal i di atas domain

Fungsi pendekatan dinyatakan oleh bidang yang melalui 3 titik yaitu  $(x_i, y_i, 1)$ ,  $(x_j, y_j, 0)$  dan  $(x_m, y_m, 0)$ , dapat dinyatakan dengan fungsi linear sebagai berikut:

$$\phi_i^e = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y \tag{3.9}$$

$a_i$ ,  $b_i$  dan  $c_i$  adalah koefisien yang ditetapkan dari koordinat nodal yang diketahui. Superskrip e pada  $\phi_i^e$  menyatakan bagian dari  $\phi_i$  berasosiasi dengan elemen e (lihat Gambar 5).



**Gambar 5:** Fungsi pendekatan pada elemen

Bentuk lengkap dari fungsi pendekatan tersebut dapat diperoleh dengan menyatukan semua fungsi pendekatan pada elemen yang berasosiasi dengan nodal i. Ketiga koefisien dari persamaan (3.9), dapat diperoleh dengan menuliskan persamaan untuk nodal lainnya pada elemen e, yaitu:

$$\begin{aligned} 1 &= a_i + b_i x_i + c_i y_i \\ 0 &= a_i + b_i x_j + c_i y_j \\ 0 &= a_i + b_i x_m + c_i y_m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dalam notasi matrik persamaan (3.10) untuk nodal i, j, dan m dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) diselesaikan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2A^e} (x_j \cdot y_m - x_m \cdot y_j) \\ b_i &= \frac{1}{2A^e} (y_j - y_m) \\ c_i &= \frac{1}{2A^e} (x_m - x_j) \end{aligned} \tag{3.12}$$

dimana:  $2A^e = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_m y_i - x_i y_m) + (x_j y_m - x_m y_j)$  (3.13)

$A^e$  adalah luas elemen segitiga. Substitusikan persamaan (3.12) pada persamaan (3.13) untuk mendapatkan:

$$\phi_i^e = \frac{1}{2A^e} [(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j) y]$$
 (3.14a)

Dengan cara yang sama dapat diperoleh fungsi pendekatan untuk nodal j dan m

$$\phi_j^e = \frac{1}{2A^e} [(x_m y_i - x_i y_m) + (y_m - y_i)x + (x_i - x_m) y]$$
 (3.14b)

$$\phi_m^e = \frac{1}{2A^e} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i) y]$$
 (3.14c)

**3.2 Aplikasi pada kasus aliran air tanah dua dimensi (steady state).**

Persamaan aliran air tanah dua dimensi steady adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) + N = 0$$
 (3.15)

Langkah pertama menentukan jawaban pendekatan (coba-coba):  $h = \hat{h} = \sum_{i=1}^5 H_i \cdot \phi_i$  (3.16)

$\phi_i$  dinyatakan seperti pada persamaan (3.14).

Selanjutnya persamaan (3.15) dinyatakan dalam bentuk residu Galerkin, yaitu:

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) + N$$
 (3.17)

Langkah kedua merumuskan persamaan integral dengan mensubstitusikan harga R kedalam persamaan (3.8), yaitu:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) + N \right) \phi_i \cdot dx \cdot dy \quad (i=1,2,\dots,n)$$
 (3.18)

Persamaan (3.18) tidak dapat diselesaikan dengan fungsi pendekatan linear karena mengandung bentuk turunan kedua, untuk itu perlu dilakukan reduksi dengan mengingat bentuk integral berikut:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} \phi_i + \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial y^2} \phi_i \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma$$
 (3.19)

$\Gamma$  adalah batas domain  $\Omega$ ,  $n_x$  dan  $n_y$  adalah komponen x dan y dari unit vektor normal pada  $\Gamma$ . Substitusikan persamaan (3.19) pada persamaan (3.18), diperoleh:

$$\iint_{\Omega} \left( T \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} - T \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{\Omega} N \phi_i dx dy - \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma = 0 \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$
 (3.20)

Persamaan (3.20) masih dapat dikembangkan dengan mensubstitusikan persamaan (3.16) padanya, didapat:

$$\sum_{j=1}^n \iint_{\Omega} \left( T \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + T \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) H_j dx dy - \iint_{\Omega} N \phi_i dx dy - \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma = 0 \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$
 (3.21)

Persamaan (3.21) dapat dinyatakan dalam bentuk matrik, yaitu:  $[A] \{H\} = \{F\}$  (3.22)  
dengan elemen tipikal dari  $[A]$  dan  $\{F\}$  adalah:

$$A_{ij} = \iint_{\Omega} \left( T \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + T \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy$$
 (3.23a)

dan  $F_i = \iint_{\Omega} N \phi_i dx dy + \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma$  (3.23b)

Guna membangkitkan seperangkat persamaan aljabar yang diwakili oleh persamaan (3.22) diperlukan penampilan integrasi dari fungsi coba dalam bentuk bentuk integral berikut:

$$\int_{\Omega} \int \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy ; \tag{3.24a}$$

$$\int_{\Omega} \int \phi_i dx dy ; \quad \text{dan} \tag{3.24b}$$

$$\int_{\Gamma} \phi_i d\Gamma \tag{3.24c}$$

Untuk proses intergal ini kita perlukan penampilan basis elemen, membangkitkan matrik elemen dan kemudian hasil tranformasinya dijadikan matrik global. Karena ada tiga nodal dalam elemen segitiga, maka setiap matrik elemen akan berorde tiga.

**Matrik kekakuan (stiffness matrix) [ A ]**

Bentuk tipikal matrik kekakuan pada elemen [A<sup>e</sup>] adalah:

$$[A^e] = T^e \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} \end{bmatrix} dx .dy + T^e \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} dx .dy \tag{3.25}$$

T<sup>e</sup> adalah transmisisitas elemen, dapat dipindahkan keluar integral karena dapat diasumsikan konstan sepanjang elemen. Matrik kekakuan global diperoleh dengan penjumlahan. Tiap nodal memperoleh sumbangan dari nodal elemen lain. Misalnya, nodal i dan j dalam elemen lokal berhubungan dengan nodal p dan q dalam sistem nodal global, maka matrik kekakuan pada elemen A<sub>ij</sub><sup>e</sup> ditambahkan pada matrik kekakuan global A<sub>pg</sub>. Cara operasi ini diulang untuk tiap nodal dalam elemen dan untuk seluruh elemen didalam domain Ω.

Pada penyelesaian persamaan (3.25), langkah pertama adalah menurunkan fungsi pendekatan dalam elemen, yaitu:

$$\frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (a_1 + b_1 .x + c_1 .y) \tag{3.26}$$

adalah:  $\frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} = b_1$  (3.27)

atau  $\frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} = \frac{1}{2A^e} (y_j - y_m)$  (3.28)

Dengan cara serupa juga diperoleh:

$$\frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} = \frac{1}{2A^e} (x_m - x_j) \tag{3.29}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.28) dan (3.29) kedalam persamaan (3.23) didapatkan:

$$A_{ij}^e = T^e \int_{\Omega} b_i .b_j .dx .dy + T^e \int_{\Omega} c_i .c_j .dx .dy \tag{3.30}$$

koefisien b<sub>i</sub>,b<sub>j</sub>,c<sub>i</sub>,c<sub>j</sub> konstan sepanjang elemen, maka

$$A_{ij}^e = T^e .b_i .b_j .\int_{\Omega} dx .dy + T^e .c_i .c_j .\int_{\Omega} dx .dy \tag{3.31}$$

atau 
$$A_{ij}^e = \frac{T^e}{4A^e} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_m - x_j)(x_i - x_m)] \tag{3.32}$$

**Vektor pembebanan (load vector): {F}**

Vektor pembebanan timbul karena *sinks-sources* dan *flux* spesifik pada keadaan batas. Bentuk N dalam persamaan (3.15) mewakili distribusi *sources* sebagai daerah *recharge*, atau juga dapat mewakili titik *sinks* sebagai *discharge* (debit) dari sebuah sumur. Untuk kasus ini, N dinyatakan dengan hubungan:

$$N(x, y) = -\sum_k Q_k \cdot \delta.(x - x_k, y - y_k) \tag{3.33}$$

$Q_k$  adalah debit dari sumur,  $x_k$  dan  $y_k$  adalah koordinat letak sumur, dan  $\delta$  adalah fungsi delta Dirac. Fungsi delta Dirac memiliki sifat khas sebagai fasilitas integral dari bentuk *sinks-source*. Pertama, fungsi ini memiliki harga 1 unit pada titik  $(x_k, y_k)$  dan berharga nol dititik selainnya.

$$\delta.(x - x_k, y - y_k) \cdot dx \cdot dy = \begin{cases} 1 & \text{pada titik } (x_k, y_k) \\ 0 & \text{dititik lain} \end{cases} \tag{3.34}$$

Selain itu fungsi inipun mempunyai sifat tambahan, yaitu:

$$\iint_{\Omega} \delta.(x - x_k, y - y_k) \cdot dx \cdot dy = 1 \tag{3.35}$$

$(x_k, y_k)$  terletak dalam domain  $\Omega$ .

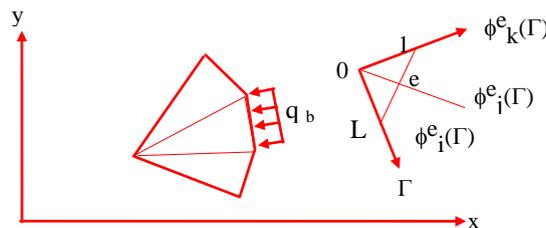
Berdasarkan sifat-sifat fungsi delta Dirac di atas, maka integral  $\iint_{\Omega} N \cdot \phi_i \cdot dx \cdot dy$  pada persamaan (3.24b) adalah

sama dengan  $Q_k$  jika  $x_k$  dan  $y_k$  adalah koordinat dari nodal. Kemudian untuk *sources* atau *sinks*, vektor gaya global dirakit dengan menambahkan  $Q_k$  kepada  $F_i$  asalkan  $Q_k$  terletak pada nodal  $i$ . *Flux* spesifik pada syarat-batas tampil dalam vektor pembebanan sebagai hasil integral dari bentuk reduksi persamaan diferensial asal. Bentuknya adalah:

$$\int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma \tag{3.36}$$

yang tampil dalam persamaan (3.24b). Bentuk ini dapat diubah sebagai berikut:

$$\int_{\Gamma} T \frac{\partial \hat{h}}{\partial n} \phi_i d\Gamma \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial n} \text{ adalah turunan arah normal pada batas } \Gamma. \tag{3.37}$$



**Gambar 6:** Definisi flux pada batas

Menurut hukum Darcy 
$$T \frac{\partial \hat{h}}{\partial n} = q_b \tag{3.38}$$

$q_b$  adalah debit aliran air tanah masuk domain aliran arah normal bidang batas (lihat Gambar 6).

Kembali ke bentuk diatas, dapat kita tuliskan sebagai:

$$\int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i d\Gamma = \int_{\Gamma} q_b \phi_i d\Gamma \tag{3.39}$$

Memakai bentuk ruas kanan persamaan ini, mudah dibangkitkan vektor pembebanan pada elemen dan kemudian hasilnya ditransformasikan menjadi vektor pembebanan global. Vektor pembebanan pada elemen akan memiliki ordo dua, karena dua nodal berada pada segmen batas.

Bentuk tipikal vektor pembebanan pada elemen akan menjadi:

$$\{ F^e \} = q_b \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \end{bmatrix} d\Gamma \tag{3.40}$$

L adalah panjang dari segmen batas.

Dalam integral persamaan (3.40), dievaluasi fungsi pendekatan sepanjang segmen batas, dimana  $\phi_{(x,y)}^e$  diwakili oleh fungsi satu dimensi  $\phi_i^e(\Gamma)$ . Fungsi tersebut mempunyai harga 1 unit pada nodal i dan bervariasi linear menuju nol pada nodal j. Demikian juga  $\phi_j^e(\Gamma)$  memiliki harga 1 unit pada nodal j dan nol pada nodal i.

I. Konsekwensinya:

$$\int_0^L \phi^e d\Gamma = \frac{1}{2}L \tag{3.41}$$

$$\{ F^e \} = \begin{bmatrix} q_b \frac{L}{2} \\ q_b \frac{L}{2} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Untuk flux spesifik di syaratbatas, vektor gaya global diperoleh dengan penjumlahan, untuk memberikan nodal global sumbangan diperoleh dari vektor pembebanan elemen lainnya. Misalnya, jika nodal i dalam sistem nodal elemen, berhubungan dengan nodal p dalam sistem nodal global maka debit perbatasan (boundary discharge) memberi sumbangan kepada vektor gaya global dengan cara penambahan  $F_i^e$  (di dalam vektor pembebanan pada elemen) kepada  $F_p$ .

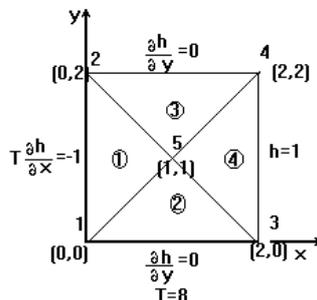
Jadi untuk persoalan dalam Gambar 7, maka vektor gaya global adalah:

$$\{ F \} = \{ Q \} + \int_{\Gamma} \{ q_b \} d\Gamma \tag{3.43}$$

**3.3 Contoh aplikasi pada kasus sink – source dua dimensi.**

Dalam domain aliran sederhana seperti terlihat pada Gambar 7, berlaku persamaan aliran air tanah dua dimensi untuk keadaan steady berikut, (persamaan 3.15):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = 0$$



**Gambar 7:** Domain 2D untuk keadaan steady

Domain dibagi atas 4 elemen segitiga dengan batasan  $0 \leq x \leq 2$  dan  $0 \leq y \leq 2$ .

Untuk itu berlaku syarat batas:

$$T \cdot \frac{\partial h}{\partial n} = -1 \quad \text{untuk } x = 0 \text{ dan } 0 \leq y \leq 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad \text{untuk} \quad \begin{cases} y = 2 \text{ dan } 0 \leq x \leq 2 \\ y = 0 \text{ dan } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

dan  $h = 1$  untuk  $x = 2$  dan  $0 \leq y \leq 2$

Langkah pertama penyelesaian kasus ini dengan metode elemen hingga cara Galerkin adalah menentukan jawaban pendekatan:

$$h = \hat{h} = \sum_{i=1}^5 H_i \cdot \phi_i \tag{3.17}$$

$\phi_i$  adalah fungsi pendekatan bebas linier, seperti dinyatakan pada persamaan (3.3).

Langkah kedua merumuskan persamaan integral dengan mensubstitusikan harga R ke dalam persamaan (3.18), yaitu:

$$\int_0^2 \int_0^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) + N \right) \phi_i \, dx \, dy \quad i=1,2,3,4,5 \tag{3.18a}$$

Agar persamaan (3.18a) yang mengandung bentuk turunan kedua dapat diselesaikan dengan fungsi pendekatan linear, maka perlu dilakukan reduksi dengan memanfaatkan bentuk persamaan integral (3.19), yaitu:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} \phi_i + \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial y^2} \phi_i \right) dx dy = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i \, d\Gamma \tag{3.19}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.20) pada persamaan (3.19a) akan diperoleh:

$$\int_0^2 \int_0^2 \left( T \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} - T \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \right) dx dy - \int_0^2 \int_0^2 N \phi_i \, dx dy - \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i \, d\Gamma = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{3.21a}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.17) kedalam persamaan (3.21a) didapat:

$$\sum_{j=1}^5 \int_0^2 \int_0^2 \left( T \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + T \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) H_j \, dx dy - \int_0^2 \int_0^2 N \phi_i \, dx dy - \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) \phi_i \, d\Gamma = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{3.22a}$$

Untuk domain seperti gambar (3.3) matrik kekakuan pada elemennya adalah:

$$[A^1] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad [A^2] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \tag{3.25a}$$

$$[A^3] = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad [A^4] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Kemudian matrik kekakuan globalnya adalah:

$$[A] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & 32 \end{bmatrix} \tag{3.25b}$$

Vektor gaya globalnya adalah:  $\{F\} = \{Q\} + \int_{\Gamma} \{q_b\} \, d\Gamma \tag{3.43}$

atau  $\{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.44}$

**Batas head spesifik**

Syarat batas head spesifik dijatuhkan pada saat substitusi harga head yang diketahui ke dalam persamaan (3.23). Untuk kasus seperti persamaan (3.15) dan (3.16), maka persamaan (3.25b) dan (3.44) dapat disubstitusikan kedalam persamaan (3.24) untuk memperoleh:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Harga  $H_3$  dan  $H_4$  diketahui dari syarat batas head spesifik (persamaan (3.16b) dan dengan mensubstitusikan harga  $H_3=1$  dan  $H_4=1$  kedalam persamaan (3.45) didapat:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \\ -8 & -8 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Kemudian penyelesaian persamaan (3.45) untuk syarat batas adalah:

$$\{ H \} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \\ 1 \\ 1 \\ 1.25 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

H juga dinyatakan sebagai harga h pada titik nodal

**4. KESIMPULAN**

Hasil analisis elemen hingga ini bertujuan untuk menyusun program komputer untuk penyelesaian persoalan aliran air tanah dua dimensi keadaan *steady* (steady-state) 2D pada aquifer bebas (unconfined aquifer). Elemen hingga yang digunakan dalam program, adalah berbentuk elemen segitiga dengan fungsi pendekatan linear. Parameter aquifer dianggap konstan sepanjang elemen, tetapi dapat bervariasi di antara elemen ke elemen lainnya. Syarat batas diberlakukan untuk kedua jenis batas yaitu batas *flux* spesifik dan batas *head* spesifik. *Sinks* dan *sources* dibolehkan pada titik nodal.

Model matematika aliran air tanah ini juga bisa digunakan untuk meramalkan keadaan air tanah akibat pemompaan atau pengisian (sink – source) pada masa yang akan datang. Selain itu juga bisa ditujukan untuk menyusun model simulasi guna membuat gambaran perubahan keadaan elevasi muka air tanah sebelum dan sesudah berlangsungnya pemompaan. Penurunan muka air akibat pemompaan, harus dibatasi sedemikian rupa sehingga tidak menimbulkan dampak negatif terhadap lingkungan sekitarnya. Analisis aliran air tanah dengan keadaan steady 2D ini dapat diterapkan untuk kasus-kasus sederhana. Untuk kasus yang lebih kompleks masih diperlukan analisis untuk keadaan aliran transien, keadaan lapisan tanah yang sangat beragam, sebagaimana yang sering ditemui di lapangan.

**DAFTAR PUSTAKA**

Bear, J. (1979), *Hydraulic of Groundwater*, Water Resources and Environmental Engineering, Mc. Graw-Hill, Newyork.

Guvil, Q, Driptufany, D.M., (2018). Analisis Potensi Daerah Resapan Air Kota Padang. dipresentasikan pada Seminar Nasional Geomatika 2018: Penggunaan dan Pengembangan Produk Informasi Geospasial Mendukung Daya Saing Nasional. <http://semnas.big.go.id/index.php/SN/article/view/1025/213>

Kodoati R.J & Syarif, R. (2010). *Tata Ruang Air*. Penerbit: Andi Yogyakarta

Maizir. (2019). Pengaruh Pemanfaatan Sumberdaya Air Tanah dalam Pembangunan Kawasan Industri Baru, *Jurnal Teknik Sipil ITP* Vol. 6 No.2 Juli 2019, P-ISSN 2354-8452, E-ISSN 2614-414X

Panguriseng, D. (2018). *Pengelolaan Air Tanah* (Internet). Universitas Muhammadiyah Makassar. <https://www.researchgate.net/publication/323616772>

- Putri, M.A, Risanti, A.A. (2018). Sistem Aliran dan Potensi Air Tanah di Sebagian Desa Sembangun Ditinjau dari Aspek Kwantitas dan Kualitas, *Majalah Geografi Indonesia*, Vol. 32, No.2, (115 - 161), DOI: 10.22146/mgi. 32297. Fakultas Geografi UGM dan Ikatan Geograf Indonesia (IGI), ISSN 0125 - 1790 (print), ISSN 2540-945X (online),
- Segerlind, L. J. (1984). *Applied Finite Element Analysis*,. (Second Edition) John Wiley & Sons.
- Verruijt, A. (1982). *Theory of Groundwater Flow*. (Second Edition) The Macmillan Press Ltd. London and Basingstoke.
- Volentino, D. (2013). Kajian Pengawasan Pemanfaatan Sumberdaya Air Tanah di Kawasan Industri Kota Semarang, *Jurnal Wilayah Dan Lingkungan*, Volume 1 Nomor 3, 265-274