Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.10 No.1 (2016) Hal. 38-45

METODE DEKOMPOSISI LAPLACE UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NONLINIER

Sinar Ismaya, Yuni Yulida*, Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
**email: y_yulida@unlam.ac.id*

ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial linier dan nonlinier. Banyak fenomena alam yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial parsial nonlinier, seperti K-dV dan persamaan Burger. Untuk dapat menjelaskan fenomena alam yang berbentuk persamaan diferensial parsial nonlinier diperlukan metode pendekatan yang selanjutnya dapat diaplikasikan untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial tersebut. Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial non-linier adalah Metode Dekomposisi Laplace yang menggabungkan teori Transformasi Laplace dan Metode Dekomposisi Adomian.Penelitian ini dilaksanakan dengan menggunakan metode literatur, dengan prosedur sebagai berikut : Mengkaji tentang Persamaan Diferensial Parsial Non-Linier, Metode Dekomposisi Adomian, Transformasi Laplace dan Metode Dekomposisi Laplace; kemudian menentukan penyelesaian persamaan diferensial non-linier dengan Metode Dekomposisi Laplace. Hasil dari penelitian ini adalah diperoleh solusi persamaan diferensial parsial nonlinier Orde satu dengan menggunakan metode dekomposisi Laplace yaitu $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dengan $u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x)\right]$ dan $u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_n\}\right]; n \geq 0$ dan pada persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua adalah $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dengan $u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x) + \frac{1}{s^2}k(x)\right]$ dan $u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{A_n\}\right]; n \geq 0$

Kata kunci : *Persamaan Diferensial Parsial Non-Linier Metode Dekomposisi Laplace*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan terhadap satu atau lebih variabel bebas. Jika terdapat variabel bebas yang tunggal, turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*). Jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, turunannya adalah turunan parsial dan persamaannya disebut Persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) [1]. Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial parsial linier dan persamaan diferensial parsial nonlinier. Solusi persamaan diferensial parsial linier dapat ditentukan dengan berbagai metode, diantaranya transformasi laplace, metode pemisahan variabel, metode beda hingga, metode Euler dan metode D'Alembert. Di sisi lain, untuk menjelaskan fenomena alam yang berbentuk persamaan diferensial parsial nonlinier, seperti persamaan K-dv dan persamaan burger, diperlukan solusi eksak sehingga model dari persamaan diferensial parsial nonlinier dapat diinterpretasikan. Namun, karena terdapat bagian nonlinier maka sulit untuk menentukan solusi eksak dari persamaan ini. Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial nonlinier adalah Metode Dekomposisi Laplace yang menggabungkan teori Transformasi Laplace dan Metode Dekomposisi Adomian.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Secara umum persamaan diferensial parsial linier orde satu yang memiliki variabel tak bebas $u = f(x, y)$ dan variabel bebas x dan y berbentuk [6]:

$$A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y) \tag{1}$$

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan dua peubah bebas adalah

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)u = G(x,y) \tag{2}$$

Jika persamaan diferensial orde satu dan dua dengan peubah bebas *x* dan *y* tidak dapat dinyatakan dalam kedua persamaan diatas maka berturut-turut disebut persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu dan dua [5]

Berikut diberikan definisi transformasi Laplace untuk fungsi dua peubah dalam peubah *x* dan *t* :

Definisi 1 [7]

Diberikan fungsi dua peubah u(x,t) dimana t≥ 0 adalah peubah waktu. Misalkan U(x,s) adalah transformasi Laplace dari u(x,t) terhadap t, maka transformasi laplace dari fungsi dua peubah u(x,t) yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{u(x,t)\}$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt, \ s > 0. \tag{3}$$

Berikut disajikan sifat transformasi Laplace dari turunan parsial:

Sifat 2 [4]

Diberikan fungsi $u(x,t)$. Jika $\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$ maka

(i) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial U(x,s)}{\partial x}$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0)$

(iv) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\} = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$ (4)

Definisi 1 [8]

Invers transformasi Laplace untuk fungsi dua peubah (peubah *x* dan *t*) disajikan dalam definisi berikut:

Misalkan transformasi Laplace dari fungsi $u(x,t)$ *adalah* $U(x,s)$, $\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$, *fungsi* $u(x,t)$ *disebut invers transformasi Laplace dari U(x,s), yaitu:*

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}$$

Berikut disajikan metode dekomposisi Adomian untuk Persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu dan dua :
Persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu dituliskan dalam bentuk operator:

$$L_t u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{5}$$

dengan nilai awal $u(x,t)|_{t=0} = u(x,0)$

dan persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua dituliskan dalam bentuk operator:

$$L_{tt} u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{6}$$

dengan nilai awal $u(x,t)|_{t=0} = u(x,0)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = u_t(x,0)$$

dengan $L_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, R merupakan jumlahan operator sisa dari L_t , dan N adalah bagian nonliniernya.

Metode Dekomposisi Adomian mengasumsikan bahwa fungsi $u(x,t)$ adalah fungsi kontinu dan dapat didiferensialkan sehingga dapat dituliskan dalam bentuk deret tak hingga : $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$

Selanjutnya, bagian nonliniernya dituliskan dalam bentuk deret tak hingga, yaitu: $Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$

dengan A_n adalah polinomial Adomian dari $u_0, u_1, \ldots, u_n$, yaitu:

$$A_n(x,t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\lambda^n\right)\right]_{\lambda=0} \tag{7}$$

Jika $n = 0$ maka berdasarkan persamaan polinomial adomiannya adalah fungsi semula nonliniernya, yaitu:

$$A_0(x,t) = N(u_0(x,t)) \tag{8}$$

Jika $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka polinomial adomiannya adalah persamaan (7)

3. METODE

Metode yang digunakan bersifat studi literature. Prosedur penelitian dimulai dengan mengumpulkan dan mengkaji materi tentang Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier, Metode Dekomposisi Adomian, Transformasi Laplace dan Metode Dekomposisi Laplace; menentukan penyelesaian persamaan diferensial nonlinier dengan Metode Dekomposisi Laplace, serta penerapan dalam beberapa contoh.

4. PEMBAHASAN

4.1 Metode Dekomposisi Laplace untuk PDP Nonlinier Orde Satu

Langkah 1

Persamaan diferensial pada persamaan (5) kedua ruasnya dikenakan transformasi Laplace, yaitu:

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{1}{s}[\mathcal{L}\{g(x,t)\} + h(x) - \mathcal{L}\{Ru(x,t)\} - \mathcal{L}\{Nu(x,t)\}] \tag{9}$$

Langkah 2

Menentukan relasi rekursif dengan menerapkan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (9), diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{u_0\left(x,t\right)\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{g\left(x,t\right)\right\} + \frac{1}{s}h(x) \tag{10}$$

$$\mathcal{L}\left\{u_{n+1}\left(x,t\right)\right\} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{Ru_n\left(x,t\right)\right\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{A_n\right\}; n \geq 0 \tag{11}$$

Langkah 3

Menggunakan invers transformasi Laplace untuk menentukan solusi. Aplikasikan invers transformasi laplace pada kedua ruas (10) dan (11):
Sehingga akan menghasilkan:

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x)\right]$$

dan $$u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_n\}\right] ; n \geq 0$$

4.2 Metode Dekomposisi Laplace untuk PDP Non Linier Orde Dua

Langkah 1

Persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua pada persamaan (6) kedua ruasnya dikenakan transformasi Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{u\left(x,t\right)\right\} = \frac{1}{s^2}\left[\mathcal{L}\left\{g\left(x,t\right)\right\} + sh\left(x\right) + k(x) - \mathcal{L}\left\{Ru\left(x,t\right)\right\} - \mathcal{L}\left\{Nu\left(x,t\right)\right\}\right] \tag{12}$$

Langkah 2

Menentukan relasi rekursif dengan menerapkan metode dekomposisi pada persamaan (12), diperoleh:

$$\mathcal{L}\{u_0(x,t)\} = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x) + \frac{1}{s^2}k(x) \tag{13}$$

$$\mathcal{L}\{u_{n+1}(x,t)\} = -\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{A_n\}; n \geq 0 \tag{14}$$

Langkah 3

Menggunakan invers transformasi Laplace untuk menentukan solusi. Aplikasikan invers transformasi laplace pada kedua ruas persamaan (13) dan (14):

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x) + \frac{1}{s^2}k(x)\right]$$

dan $$u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{A_n\}\right] ; n \geq 0$$

Solusi persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu dan dua yaitu:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \Leftrightarrow u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

3.3 Penerapan Metode Dekomposisi Laplace

Diberikan persamaan diferensial parsial orde dua sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

dengan nilai awal:

$$u(x,0)=1-\frac{2}{x}$$

Persamaan diatas akan diubah ke dalam bentuk operator, yaitu:

$$L_t u(x,t) = Ru(x,t) - Nu(x,t) \tag{15}$$

dimana

$$L_t u\left(x,t\right)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$Ru(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$Nu(x,t)=u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=u\left(u\right)_x$$

Berikut langkah-langkah dalam menentukan solusi persaman diferensia parsial orde dua tersebut:

Langkah 1

Laplacekan kedua ruas persamaan (15):

$$\mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\}=\frac{1}{s}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)+\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\}-\mathcal{L}\left\{u\left(u\right)_x\right\}\right]$$

Langkah 2

Menerapkan metode dekomposisi pada persamaan, Adomian mengasumsikan penyelesaian dalam bentuk persamaan persamaan, yaitu:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

dan untuk suku nonlinier pada persamaan akan diuraikan menjadi:

$$u\left(u\right)_x=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

untuk $n = 0$, polinomial adomian yang digunakan adalah persaamaan (8),sedangkan untuk $n = 1,2,3 \ldots$ polinomial adomian yang digunakan adalah persaamaan (7)

Selanjutnya

$$\mathcal{L}\left\{u_0\left(x,t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{u_1\left(x,t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{u_2\left(x,t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{u_3\left(x,t\right)\right\}+\ldots$$

$$=\frac{1}{s}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\}-\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}\left\{A_n\right\}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{s}\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}\right\}+\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\right\}+\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}\right\}+\ldots\\-\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{A_0\right\}-\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{A_1\right\}-\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{A_2\right\}-\ldots\end{array}\right]$$

Persamaan diatas adalah bentuk deret rekursif yang dapat disajikan dalam :

$$\mathcal{L}\left\{u_0\left(x,t\right)\right\}=\frac{1}{s}\left(1-\frac{2}{x}\right) \tag{16}$$

$$\mathcal{L}\left\{u_{n+1}(x,t)\right\} = \frac{1}{s}\left[\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{A_n\right\}\right] \quad n \geq 0 \qquad (17)$$

Langkah 3

Aplikasikan invers transformasi laplace pada kedua ruas persamaan (16) dan (17):

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(1-\frac{2}{x}\right)\right]$$

$$u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{A_n\right\}\right)\right]; n \geq 0$$

Selanjutnya, menentukan nilai $u_0, u_1, \ldots$

(i). Nilai $u_0(x,t)$

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(1-\frac{2}{x}\right)\right] = \left(1-\frac{2}{x}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \left(1-\frac{2}{x}\right)$$

(ii). Nilai $u_1(x,t)$

akan dicari A_0 terlebih dahulu, yaitu:

$$A_0 = u_0(u_0)_x = \left(1-\frac{2}{x}\right)\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

Selanjutnya substitusikan A_0 ke u_1, diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{A_0\right\}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{-\frac{4}{x^3}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right\}\right)\right] \\ &= -\frac{2t}{x^2} \end{aligned}$$

(iii). Nilai $u_2(x,t)$

akan dicari A_1 terlebih dahulu, yaitu:

$$\begin{aligned} A_1 &= u_1(u_0)_x + u_0(u_1)_x \\ &= \left(-\frac{2t}{x^2}\right)\left(\frac{2}{x^2}\right) + \left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{4t}{x^3}\right) \\ &= \frac{4t}{x^3} - \frac{12t}{x^4} \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan A_1 ke u_2, diperoleh:

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{A_1\right\}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(-\frac{12t}{x^4}\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\left\{\frac{4t}{x^3}\right\} + \frac{12t}{x^4}\mathcal{L}\{1\}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{4t}{x^3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$= -\frac{2t^2}{x^3}$$

$$\vdots$$

Solusi dari persamaan diferensial parsial orde dua diatas adalah:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

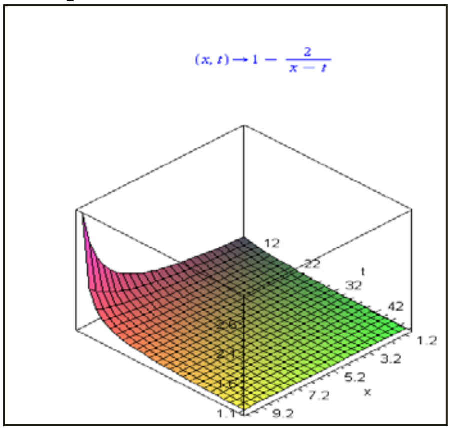
$$u(x,t) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) - \frac{2t}{x^2} - \frac{2t^2}{x^3} - \frac{2t^3}{x^4} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{2}{x}\left(1 + \frac{t}{x} + \frac{t^2}{x^2} + \frac{t^3}{x^3} + \frac{t^4}{x^4} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^n\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{x-t}$$

Berikut adalah gambar grafik tiga dimensi untuk solusi yang diperoleh dari contoh 2 menggunakan program Maple 11:



Gambar 1. Solusi $u(x,t) = 1 - \frac{2}{x-t}$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh terdapat tiga langkah dalam menentukan solusi persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu dan dua. Solusi persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu, yaitu:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ dengan } u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x)\right] \text{ dan}$$

$$u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_n\}\right] \; ; n \geq 0$$

dan solusi persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua, yaitu:

$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dengan $u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{g(x,t)\} + \frac{1}{s}h(x) + \frac{1}{s^2}k(x)\right]$ dan $u_{n+1}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru_n(x,t)\} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{A_n\}\right]$; $n \geq 0$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Ayres, F. Jr. 1999. *Persamaan Diferensial*. Erlangga. Jakarta.

[2]. Abassy, Tamer A. 2010. New treatment of adomian decomposition method with compaction equations. *Studies in Nonlinear Sciences 1 (2): 41-49.*

[3]. Khan, Majid and M.Hussain. 2010. Modified laplace decomposition method. Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, no. 36, 1769 - 1783.

[4]. Powers, David L. 1987. *Boundary Value Problems Third Edition*. Elsevier Inc. United States of America.

[5]. Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

[6]. Johnshon, Robin. 2010. The Notebook Series : First Order Partial Diferential Equation. School of Mathematics & StatisticsUniversity of Newcastle upon Tyne.

[7]. Schiff, L. Joel. 1999. The Laplace Transformation Aplication and Theory. Springer-Verlag New York Inc.

[8]. Yovanovich, M.M. -------. *Laplace Transform.*