



PEMBENTUKAN PERSAMAAN VAN DER POL DAN SOLUSI MENGUNAKAN METODE *MULTIPLE SCALE*

Farohatin Na'imah, Yuni Yulida, Muhammad Ahsar K

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat, Indonesia

Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

Email: farohatinn@gmail.com

ABSTRACT

Mathematical modeling is one of applied mathematics that explains everyday life in mathematical equations, one example is Van der Pol equation. The Van der Pol equation is an ordinary differential equation derived from the Resistor, Inductor, and Capacitor (RLC) circuit problem. The Van der Pol equation is a nonlinear ordinary differential equations that has a perturbation term. Perturbation is a problem in the system, denoted by ε which has a small value $0 < \varepsilon < 1$. The presence of perturbation tribe result in difficulty in solving the equation using analytical method. One method that can solve the Van der Pol equation is a multiple scale method. The purpose of this study is to explain the constructions process of Van der Pol equation, analyze dynamic equations around equilibrium, and determine the solution of Van der Pol equation uses a multiple scale method. From this study it was found that the Van der Pol equation system has one equilibrium. Through stability analysis, the Van der Pol equation system will be stable if $\varepsilon = 0$ and $-\infty < \varepsilon \leq -2$. The solution of the Van der Pol equation with the multiple scale method is

$$x(t, \varepsilon) = \frac{2A_0}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-\varepsilon t}}} \sin(t).$$

Keywords: Van der Pol equation, equilibrium, stability, multiple scale.

ABSTRAK

Pemodelan matematika merupakan salah satu bidang matematika terapan yang menjelaskan permasalahan kehidupan sehari-hari dalam pernyataan matematika, salah satunya adalah persamaan Van der Pol. Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial biasa yang diturunkan dari masalah sirkuit Resistor, Induktor, dan Kapasitor (RLC). Persamaan Van der Pol berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinear dan memiliki suku perturbasi. Perturbasi adalah gangguan pada sistem yang dinotasikan dengan ε bernilai kecil, yaitu $0 < \varepsilon < 1$. Suku perturbasi mengakibatkan persamaan Van der Pol sulit diselesaikan secara analitik. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Van der Pol adalah metode *multiple scale*. Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan terbentuknya persamaan Van der Pol, menganalisis perilaku dinamik di sekitar ekuilibrium, dan menentukan solusi persamaan Van der Pol dengan menggunakan metode *multiple scale*. Dari penelitian ini diperoleh bahwa sistem persamaan Van der Pol memiliki satu ekuilibrium. Melalui analisis kestabilan, sistem persamaan Van der Pol akan stabil jika $\varepsilon = 0$, dan $-\infty < \varepsilon \leq -2$. Solusi persamaan Van der Pol dengan metode *multiple scale* adalah

$$x(t, \varepsilon) = \frac{2A_0}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-\varepsilon t}}} \sin(t).$$

Kata kunci : Persamaan Van der Pol, ekuilibrium, kestabilan, *multiple scale*.

1. PENDAHULUAN

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang mengalami perubahan terhadap waktu dapat dinyatakan dalam pemodelan matematika terapan yaitu persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memiliki turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas [11]. Contoh permasalahan yang dapat dimodelkan adalah rangkaian listrik. Rangkaian listrik yang terdiri dari Resistor, Induktor dan Capacitor atau dikenal dengan rangkaian listrik RLC adalah jaringan listrik yang dirangkai seri. Pada rangkaian listrik ini merupakan acuan dari Persamaan Van der Pol dengan komponen resistor diganti semikonduktor [12].

Persamaan Van der Pol berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinear dan memiliki suku perturbasi yang dinotasikan dengan ε dan bernilai kecil yaitu $0 < \varepsilon < 1$. Suku perturbasi ini mengakibatkan persamaan Van der Pol sulit diselesaikan dengan analitik. Akan tetapi metode perturbasi dapat menyelesaikan persamaan Van der Pol tersebut [13]. Metode perturbasi adalah metode yang digunakan untuk menentukan solusi aproksimasi suatu persamaan diferensial yang memiliki perturbasi. Salah satu metode perturbasi adalah metode *multiple scale*. Metode *multiple scale* adalah metode penyelesaian yang ditulis dalam skala waktu berbeda [9]. Artikel ini mengkaji kembali beberapa literatur seperti [6, 12, 13] dengan tujuan membahas kembali bagaimana terbentuknya persamaan Van der Pol, menyelidiki perilaku dinamik di sekitar ekuilibrium serta menentukan solusi dari Persamaan Van der Pol dengan menggunakan metode *multiple scale*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dijelaskan reduksi orde, ekuilibrium, linearisasi, nilai eigen, sifat kestabilan, perturbasi, *multiple scale* yang digunakan dalam pembahasan.

2.1 Reduksi Orde

Reduksi orde adalah mengubah suatu persamaan orde- n ke dalam sistem persamaan orde-satu.

Berikut diberikan persamaan diferensial linier orde- n dengan koefisien konstan [5].

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = Q(y) \quad (1)$$

$$\text{Didefinisikan } y_1 = x, y_2 = \frac{dx}{dt}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \quad (2)$$

Persamaan (2) diturunkan dan ditulis kembali turunannya dalam bentuk variabel baru, yaitu y_1, y_2, \dots, y_n , sehingga didapatkan sistem persamaan diferensial orde-satu berikut

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} y_{n-1}}{dt^{n-1}} &= y_n \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d^n y_n}{dt^n} = -a_n(t)y_1 - \dots - a_n(t)y_n + Q(y)$$

2.2 Ekuilibrium dan Linierisasi

Diberikan Sistem persamaan diferensial nonlinier berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4)$$

Ekuilibrium adalah titik $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ bila pada Persamaan (4) berlaku $f(\hat{x}) = 0$ [10].

Diberikan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear (4). Hasil linearisasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk n peubah di sekitar ekuilibrium $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ adalah [4]:

$$f_i(x) = f_i(\hat{x}) + \nabla f_i(\hat{x})(x - \hat{x}) + o(|x - \hat{x}|) \quad (5)$$

dengan $f_i(\hat{x}) = 0$ [10]. Persamaan (5) menjadi

$$f_i(x) = \nabla f_i(\hat{x})(x - \hat{x}) + o(|x - \hat{x}|) \quad (6)$$

Karena $f(\hat{x}) = 0$, maka ada perturbasi sangat kecil yaitu $v = x - \hat{x}$ di sekitar ekuilibrium.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

dengan mengabaikan suku yang lain yaitu $o(|x - \hat{x}|)$, maka Persamaan (6) menjadi

$$f_i(x) = \nabla f_i(\hat{x})(x - \hat{x})$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n$, dengan demikian diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - \hat{x}_1) \\ (x_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \hat{x}_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Persamaan (8) disebut linearisasi di sekitar ekuilibrium. Berdasarkan Persamaan (7) dan (8), $\frac{dx}{dt} = f(x)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dv}{dt} = J(\hat{x})v \quad (9)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

J matriks Jacobian. [4]

2.3 Nilai Eigen

Penentuan nilai eigen diperlukan untuk mengetahui sifat kestabilan. jika A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x dinamakan vektor eigen dari A jika memenuhi [1]:

$$Ax = \lambda x$$

dengan λ adalah suatu skalar. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

2.4 Analisis Kestabilan

Jika sistem persamaan diferensial tidak dapat diselesaikan dengan analitik, maka untuk menyelidiki kestabilannya dapat melalui nilai eigen λ_i . Jika sistem persamaan diferensial hanya menghasilkan nilai eigen $\lambda_{1,2}$ maka digunakan Tabel 1 berikut [5].

Tabel 1. Sifat Kestabilan Sistem yang dilinearisasi

No	Nilai Eigen $\lambda_{1,2}$	Sistem yang dilinearisasi	
		Tipe Ekuilibrium	Kestabilan
1	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	<i>Improper node</i> atau <i>spiral</i>	Stabil asimtotik
2	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	<i>Saddle point</i>	Tidak stabil
3	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	<i>Improper node</i> atau <i>spiral</i>	Tidak stabil
4	$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	<i>Spiral</i>	Stabil asimtotik
5	$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	<i>Spiral</i>	Tidak stabil
6	$\lambda_{1,2} = \pm ib$	<i>Center</i> atau <i>spiral</i>	Stabil atau tidak

2.5 Multiple Scale

Multiple scale adalah salah satu metode perturbasi dalam beberapa skala. Sebagai ilustrasi diberikan Persamaan berikut [8]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad \text{dengan kondisi awal } x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \quad (11)$$

Diasumsikan solusi dari Persamaan (11) ditulis dalam bentuk

$$x = x_0(t_1, t_2) + \varepsilon x_1(t_1, t_2) + \dots \quad (12)$$

Dengan $t_1 = t, t_2 = \varepsilon t_1 = \varepsilon t$. Selanjutnya diturunkan secara parsial terhadap t dengan menggunakan aturan rantai dan didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \\ \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)$$

Substitusi Persamaan (12) dan (13) ke dalam Persamaan (11), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon \frac{\partial x_0}{\partial t_1} + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \right) \\ + (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Selanjutnya, dari Persamaan (14) dikumpulkan suku-suku sejenis dalam pangkat ε , sehingga diperoleh:

$$\text{Orde } (\varepsilon^0) : \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + x_0 = 0 \quad (15)$$

$$\text{Orde } (\varepsilon^1) : \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial x_0}{\partial t_1} + x_1 = 0$$

Dengan menyelesaikan Persamaan (15), akan diperoleh solusi dari Persamaan (11) dalam $x(t; \varepsilon)$

3. PROSEDUR PENELITIAN

Berikut ini adalah langkah-langkah yang dilaksanakan dalam penelitian:

- 1) Menjelaskan terbentuknya persamaan Van der Pol.
- 2) Mereduksi persamaan Van der Pol ke dalam sistem persamaan diferensial orde satu.
- 3) Menentukan ekulibrium sistem persamaan diferensial Van der Pol dan melakukan linearisasi sistem menggunakan matriks Jacobian.
- 4) Menentukan nilai eigen dan menganalisa kestabilan sistem Persamaan Van der Pol.
- 5) Menentukan solusi persamaan Van der Pol dengan metode *multiple scale*.
- 6) Membuat simulasi sistem berdasarkan solusi *multiple scale* dan trayektori dari sistem dengan beberapa parameter.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Persamaan Van der Pol

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial biasa yang prosesnya diturunkan dari masalah sirkuit RLC yang dirangkakan seri [13], dengan arus listrik yang dialirkan dari sumber tenaga volt $E(\tau)$, berakibat timbulnya beda tegangan pada resistor $R(\text{ohm})$ sebesar Ri , induktor $L(\text{henry})$ sebesar $L \frac{di}{d\tau}$ dan kapasitor $C(\text{farad})$ sebesar $\frac{1}{C} \int id\tau$. Dalam persamaan Van der Pol, rangkaian resistor diganti dengan semikonduktor. Berdasarkan hukum *Kirchoff I* bahwa jumlah arus yang masuk pada suatu rangkaian sama dengan jumlah arus yang keluar rangkaian. Dalam kondisi loop tertutup, berdasarkan hukum *Kirchoff II* maka jumlah tegangan keseluruhan adalah nol [7]. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_L + V_R + V_C &= E(\tau) \\ L \frac{di}{d\tau} + Ri + \frac{1}{C} \int id\tau &= E(\tau) \end{aligned} \quad (16)$$

Karena Resistor diganti dengan semikonduktor [6], maka

$$V_{R_2} = -R_0 i_0 \left[\frac{i}{i_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{i_0} \right)^3 \right]$$

Sehingga Persamaan (16) menjadi

$$L \frac{di}{d\tau} - R_0 i_0 \left[\frac{i}{i_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{i_0} \right)^3 \right] + \frac{1}{C} \int id\tau = E(\tau) \quad (17)$$

Persamaan (17) diturunkan terhadap τ , dan $E(\tau) = 0$ diperoleh

$$L \frac{d^2 i}{d\tau^2} - R_0 \left[1 - \left(\frac{i}{i_0} \right)^2 \right] \frac{di}{d\tau} + \frac{i}{C} = 0 \quad (18)$$

Jika dimisalkan $x(t) = \frac{i(t)}{i_0}$, dan $t = \omega_e \tau$ dengan $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, maka diperoleh

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{i_0}{\omega_e^2} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (19)$$

Jika Persamaan (19) disubstitusi kedalam Persamaan (18), maka diperoleh

$$L \frac{i_0}{\omega_e^2} \frac{d^2x}{dt^2} - R_0 [1 - (x)^2] \frac{i_0}{\omega_e} \frac{dx}{dt} + \frac{x i_0}{c} = 0 \quad (20)$$

Dari Persamaan (20) diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} - R_0 \sqrt{\frac{c}{L}} [1 - (x)^2] \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (21)$$

Jika dimisalkan $R_0 \sqrt{\frac{c}{L}} = \varepsilon$, maka persamaan (21) didapatkan

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (22)$$

Persamaan (22) merupakan persamaan Van der Pol dengan ε adalah parameter yang menunjukkan suku perturbasi [6].

4.2 Reduksi Persamaan Van der Pol

Persamaan Van der Pol (22) merupakan persamaan diferensial nonlinear, Persamaan (22) dapat dirubah menjadi sistem persamaan diferensial nonlinear dengan cara mereduksi Persamaan (22) menggunakan Subbab 2.1 Persamaan (3), hasil reduksi Persamaan (22) adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (23)$$

4.3 Ekuilibrium

Persamaan (23) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear yang dikenal sebagai Persamaan Van der Pol. Selanjutnya akan dicari ekuilibrium Persamaan (23) berdasarkan Subbab 2.2, dan diperoleh satu ekuilibrium yaitu $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0)$.

4.3.1 Analisis Kestabilan di Ekuilibrium

Karena Persamaan (23) merupakan persamaan diferensial nonlinear, maka untuk menganalisis kestabilan di ekuilibrium $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0,0)$ dilakukan linearisasi Persamaan (23) dengan menggunakan matriks Jacobian pada Persamaan (10), diperoleh

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (24)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (24) adalah

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 = 0 \quad (25)$$

sehingga diperoleh akar-akar karakteristik (nilai eigen) berikut

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} \quad (26)$$

Langkah berikutnya menganalisis kestabilan dari Persamaan (23) dengan menentukan jenis kestabilan berdasarkan nilai eigen Persamaan (26) dengan menggunakan Tabel 1. Dalam hal ini dibagi menjadi empat kasus.

a. Kasus pertama

$\varepsilon^2 - 4 = 0$ maka $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2}$ nilainya real dan kembar. Jika $\varepsilon = 2$ maka $\lambda_{1,2} > 0$, dan berdasarkan Tabel 1 tipe ekuilibriumnya *spiral* dan tidak stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.a.1. Jika $\varepsilon = -2$ maka $\lambda_{1,2} < 0$ dan berdasarkan Tabel 1 tipe ekuilibriumnya *improper node* dan stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.a.2.

b. Kasus kedua

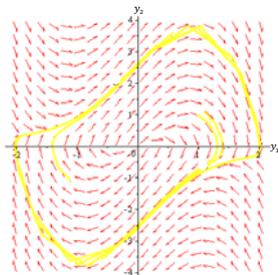
$\varepsilon^2 - 4 > 0$, maka ada 2 penyelesaian yaitu $-\infty < \varepsilon < -2$ dan $2 < \varepsilon < \infty$. Jika $-\infty < \varepsilon < -2$ maka $\lambda_{1,2} < 0$ dan berdasarkan Tabel 1, tipe ekuilibriumnya *improper node* dan stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.b.1. Jika $2 < \varepsilon < \infty$ maka $\lambda_{1,2} > 0$ dan berdasarkan Tabel 1, tipe ekuilibriumnya *spiral* dan tidak stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.b.2.

c. Kasus ketiga

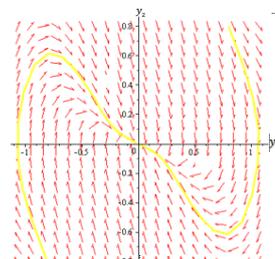
$\varepsilon^2 - 4 < 0$ maka $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ dengan $a = \varepsilon$. Jika riil nilai eigen bernilai negatif $a < 0$ maka berdasarkan Tabel 1, tipe ekuilibriumnya *spiral* dan stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.c.1. Jika riil nilai eigen bernilai positif $a > 0$ maka berdasarkan Table 1 tipe ekuilibriumnya *spiral* dan tidak stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.c.2.

d. Kasus keempat Jika $\varepsilon = 0$ maka $\lambda_{1,2} = \pm i$ dan berdasarkan Tabel 1 tipe ekuilibriumnya *center* dan stabil, dapat dilihat pada Gambar 4.d.1.

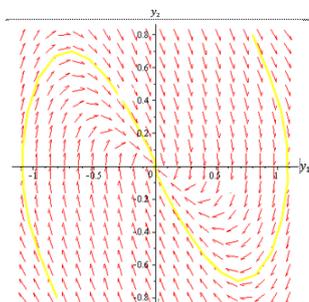
Berikut diberikan gambar trayektori dari 4 kasus diatas, dengan beberapa parameter:



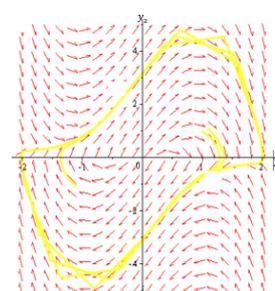
Gambar 4.a.1 Trayektori untuk $\varepsilon = 2$



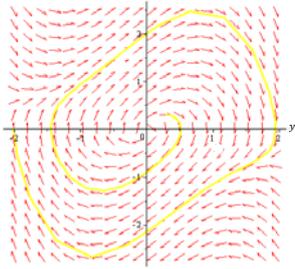
Gambar 4.a.2 Trayektori untuk $\varepsilon = -2$



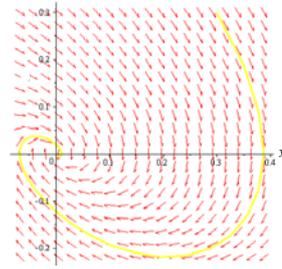
Gambar 4.b.1 Trayektori untuk $-\infty < \varepsilon < -2$, pada gambar $\varepsilon = -3$



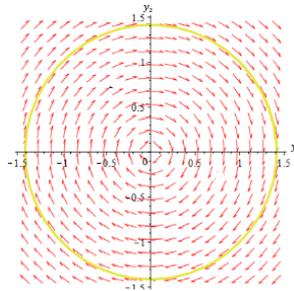
Gambar 4.b.2 Trayektori untuk $\infty < \varepsilon < 2$, pada gambar $\varepsilon = 3$



Gambar 4.c.1 Trayektori untuk $a > 0$, pada gambar $a = 1$



Gambar 4.c.2 Trayektori untuk $a < 0$, pada gambar $a = -1$



Gambar 4.d.1 Trayektori untuk $\varepsilon = 0$

4.4 Solusi Persamaan Van der Pol

Diberikan Persamaan Van der Pol (23) dengan nilai awal sebagai berikut

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = A_0 \quad (27)$$

Akan dicari solusi dari Persamaan (27) menggunakan metode *multiple scale* dengan mengasumsikan solusi (27) dalam bentuk [13]

$$x = x_0(t_1, t_2) + \varepsilon x_1(t_1, t_2) + \dots \quad (28)$$

Dengan $t_1 = t, t_2 = \varepsilon t$, sehingga dapat diturunkan dengan aturan rantai

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (29)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_0}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial x_0}{\partial t_2} \quad (30)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (31)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (28), (30), dan (31) ke dalam Persamaan (27) diperoleh

$$\left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} \right) - \left(\varepsilon \frac{\partial x_0}{\partial t_1} - \varepsilon \frac{\partial x_0^3}{\partial t_1} \right) + (x_0 + \varepsilon x_1) = 0 \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + x_0 \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial x_0}{\partial t_1} + \frac{\partial x_0^3}{\partial t_1} + x_1 \right) = 0$$

Selanjutnya dari Persamaan (32) dikumpulkan suku-suku sejenis dalam pangkat ε , diperoleh:

$$\text{Orde } (\varepsilon^0) : \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1^2} + x_0 = 0$$

$$\text{Orde } (\varepsilon^1) : \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t_1 \partial t_2} + x_1 + (x_0^2 - 1) \frac{\partial x_0}{\partial t_1} = 0.$$

Solusi umum Orde (ε^0) adalah

$$x_0(t_1, t_2) = B(t_2) \cos(t_1) + A(t_2) \sin(t_1) \quad (33)$$

Dengan kondisi awal $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = A_0$, diperoleh

$$x_0 = A_0 \sin(t_1) \quad (34)$$

Untuk orde (ε^1), Persamaan (33) disubstitusi ke dalam Persamaan orde (ε^1), diperoleh

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (B(t_2) \cos(t_1) + A(t_2) \sin(t_1)) + x_1 + ((B(t_2) \cos(t_1) + A(t_2) \sin(t_1))^2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} B(t_2) \cos(t_1) + A(t_2) \sin(t_1) = 0 \quad (35)$$

Selanjutnya selesaikan dengan aturan trigonometri, diperoleh

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + x_1 = \left(-2A' + A - \frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{4}B^2A\right) \cos(t_1) + \left(2B' - B + \frac{1}{4}B^3 + \frac{1}{4}A^2B\right) \sin(t_1) + \left(\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}B^2A\right) \cos(3t_1) + \left(\frac{1}{4}B^3 - \frac{3}{4}A^2B\right) \sin(3t_1) \quad (36)$$

Dari Persamaan (36) suku-suku dengan koefisien $\cos(t_1)$ dan $\sin(t_1)$ disamadengankan nol. Sehingga untuk kasus $\cos(t_1)$ diperoleh

$$-2A' + A - \frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{4}B^2A = 0 \quad (37)$$

Diberikan nilai awal $B(0) = 0$ pada Persamaan (37), diperoleh

$$A'(t_2) = \frac{1}{2}A(t_2) - \frac{1}{8}A^3(t_2) \quad (38)$$

Persamaan (38) merupakan persamaan Bernouli [2], dengan solusi

$$A(t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + Ke^{-t_2}}} \quad (39)$$

Diberikan nilai awal $A(0) = A_0$ dan disubstitusi ke dalam Persamaan (39), diperoleh

$$K = \frac{4 - A_0^2}{4A_0^2} \quad (40)$$

Substitusi Persamaan (40) ke dalam Persamaan (39), sehingga diperoleh

$$A(t_2) = \frac{2A}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-t_2}}} \quad (41)$$

Selanjutnya dicari solusi dari kasus $\sin(t_1)$ pada Persamaan (36), diperoleh

$$2B' - B + \frac{1}{4}B^3 + \frac{1}{4}A^2B = 0, \text{ dengan nilai awal } B(0) = 0 \text{ maka } K = 0, \text{ sehingga}$$

$$B(t_2) = 0 \quad (42)$$

Setelah didapatkan $A(t_2)$ dan $B(t_2)$ pada Persamaan (41) dan (42), selanjutnya Persamaan (41) dan (42) disubstitusi ke Persamaan (34), diperoleh

$$x_0 = \frac{2A}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-t_2}}} \sin(t_1) \quad (43)$$

dengan $t_1 = t$ dan $t_2 = \varepsilon t$, Persamaan (43) disubstitusi ke Persamaan (28), diperoleh

$$x(t; \varepsilon) = \frac{2A_0}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-\varepsilon t}}} \sin(t) \quad (44)$$

Persamaan (44) merupakan solusi perturbasi dari persamaan Van der Pol menggunakan metode *multiple scale*. Sebagai ilustrasi, diberikan $A_0 = 1$ dan $\varepsilon =$

0,5, maka bentuk grafik dari solusi Persamaan (44) dapat dilihat pada Gambar 4.4.1 berikut.

Gambar 4.4.1 grafik Solusi Persamaan
Van der Pol metode *multiple scale*

Gambar 4.4.1 menunjukkan bahwa grafik solusi Persamaan (44) bersifat periodik.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa Persamaan Van der Pol adalah persamaan yang diturunkan dari Rangkaian Listrik RLC yang Persamaan tersebut direduksi dan diperoleh ekuilibrium (0,0). Analisis kestabilan ekuilibrium terbagi menjadi 4 kasus yaitu: Pertama, jika $\varepsilon^2 - 4 = 0$ maka ekuilibrium stabil, jika $\varepsilon = -2$ dengan tipe ekuilibrium *improper node* dan tidak stabil jika $\varepsilon = 2$ dengan tipe ekuilibrium *spiral*. Kedua, jika $\varepsilon^2 - 4 > 0$, maka stabil ketika $-\infty < \varepsilon < -2$ dengan tipe ekuilibrium *improper node* dan tidak stabil ketika $2 < \varepsilon < \infty$ dengan tipe ekuilibrium *spiral*. Ketiga, jika $\varepsilon^2 - 4 < 0$ maka $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, akan stabil jika riil nilai eigen bernilai negatif $a < 0$ dengan tipe ekuilibriumnya *spiral* dan tidak stabil jika riil nilai eigen bernilai positif $a > 0$ dengan tipe ekuilibrium yang dihasilkan adalah *spiral*. Keempat, jika $\varepsilon = 0$ maka $\lambda_{1,2} = \pm i$ dan stabil dengan tipe ekuilibrium yang dihasilkan adalah *center*. Solusi persamaan Van der Pol dengan menggunakan metode *multiple scale* berbentuk periodik.

REFERENSI

- [1] Anton, H & C Rorres. 2014. *Elementary Linear Algebra*. Edisi 11. United States: Willey.
- [2] Ayres, F. 1981. *Differential Equations Scaum's Outline Series*. Edisi ke-2. Singapore: Mc.Graw-Hill Book Co.
- [3] Bajaj, V & N Prakash . 2013. Non Linear Oscillator Systems and Solving Techniques. *I.J of Scientific and Research Publications*. 3:5.

- [4] Bellomo, N & L. Preziosi. 1995. *Modelling Mathematical Method and Scientific Computation* . Florida: CRC Press.
- [5] Farlow, S.J. 1994. *An Introduction to Differential Equation and Their Applications*. United States of America: Dover Publications.
- [6] Hafeez, dkk. 2015. Analytical Study of the Van der Pol Equation in the Autonomous Regime. *J. Adv. Phys.* , V:11.
- [7] Hartanto, D.B. 2009. *Persamaan Diferensial dan Transformasi Laplace dalam Penerapannya di Bidang Teknik Elektro*. Yogyakarta : Fakultas Teknik Universitas Negeri Yogyakarta
- [8] Holmes, M.H. 1995. *Introduction to Perturbation Methods*, Applied Math. New York: Springer-Verlag.
- [9] Nayfeh, A.H. 1993. *Introduction to Perturbation Techniques*. Virginia: Willey Classic Library.
- [10] Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical System*. Edisi-3. New York: Springer-Verlag.
- [11] Ross, S.L. 2004. *Differential Equation*. Edisi ke-3. New York: John Willey & Sons.
- [12] Tsasos, M. 2006. *Theoretical and Numerical Study of the Van der Pol Equation*. Disertasi. Thessaloniki: Aristotle University.
- [13] Yulida, Y., Karim, M.A. 2019. Analisa Kestabilan dan Solusi Pendekatan Pada Persamaan Van der Pol. *Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika (JTAM)*, Vol. 3 (2), Hal 156-161.