Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 19-28

GENERALISASI ATURAN CRAMER

Ferry Syahriandi, Thresye, Akhmad Yusuf
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru 70714, Kalsel
Email : ferryexfresh@gmail.com

ABSTRAK

Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{b} \in R^m$ dan $n \geq m$ di mana $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ adalah matriks riil yang dapat mempunyai solusi tunggal, tak hingga banyaknya solusi, atau tidak mempunyai solusi. Ketika $n \geq m$, sistem mempunyai solusi tunggal dengan norm minimum yang diberikan oleh invers Moore-Penrose, dinotasikan dengan A^+ dan berbentuk $A^+\boldsymbol{b}=A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$ dengan $\det(AA^T) \neq 0$. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan aturan Cramer yang telah digeneralisasi sehingga dapat digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan linier yang demikian. Penelitian ini bersifat studi literatur. Hasil penelitian yang diperoleh dengan menggunakan invers Moore-Penrose dan aturan Cramer adalah aturan Cramer yang digeneralisasi. Rumus tersebut dapat digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ di mana $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ dan $n \geq m$.

Kata kunci: Sistem persamaan linier, aturan Cramer, invers Moore-Penrose

ABSTRACT

Linear equation system $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{b} \in R^m$ and $n \geq m$ where $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ is a real matrix that can haveone solution, infinitely many solutions, or no solution.When $n \geq m$, the system have unique solution with minimum norm given by Moore-Penrose inverse, denote by A^+ and has a form$A^+\boldsymbol{b}=A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$with $\det(AA^T) \neq 0$.The purpose ofthis research is to prove Cramer's rule that have been generalized, so it can be used to determine solution of linear equation system. This research is study of literature. The result obtained using Moore-Penrose inverse and Cramer's rule is Cramer's rule that have been generalized. This formula can be used to determine solution of linear equation system $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ and $n \geq m$ where $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ and $n \geq m$.

Keywords: Linear equation system, Cramer's rule, Moore-Penrose inverse

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linier yang berbentuk $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$dapatmempunyai solusi tunggal, tak hingga banyaknya solusi, atau tidak mempunyai solusi [1].Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{b} \in R^m$ dan $n \geq m$ di mana$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ adalah matriks riil yang mempunyai solusi tunggal ketika $m=n$ dan $\det(A) \neq 0$, solusinya dapat dicari dengan menggunakan aturan Cramer [5]. Burgstahler [2] menyatakan sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ dengan matriks A berbentuk bujur sangkar dapat dibentuk sebagai suatu kombinasi linier dari solusi sistem tersebut yang disebut dengan generalisasi aturan Cramer sederhana.Dalam pengembangannya, generalisasi aturan Cramer sederhana digunakan untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ di mana $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ yang artinya tidak hanya ketika matriks A berbentuk bujur sangkar, namun juga ketika matriks A tidak berbentuk bujur sangkar, dalam kasus ini$n>m$. Sistem tersebut memiliki solusi tunggal dengan norm minimum yang diberikan oleh invers Moore-Penrose dan dinotasikan dengan A^+, dalam hal ini solusi yang diberikan adalah $A^+\boldsymbol{b}=A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$ dengan $\det(AA^T) \neq 0$ [5].Berdasarkan uraian masalah yang dikaji, maka dibahas penyelesaiansistem persaman linier $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ di mana matriks$A$ berukuran $m \times n$ dengan $n \geq m$menggunakan aturan Cramer.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.1 [1]

Secara umum persamaan linier dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \text{...(2.1)}$$

di mana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b bilangan konstan serta a_i tidak semuanya nol. Dalam kasus khusus persamaan (2.1) disebut persamaan linier homogen jika $b = 0$. Kumpulan dari persamaan linier disebut sistem persamaan linier. Secara umum sistem persamaan linier dengan m persamaan dan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \qquad \text{...(2.2)}$$

Sistem persamaan linier dapat mempunyai solusi tunggal, tak hingga banyaknya solusi, atau tidak mempunyai solusi. Dari persamaan (2.2) dapat dijadikan sebuah perkalian matriks, dinotasikan dengan $A, \boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{b}$, maka dapat ditulis kembali persamaan matriks tunggal:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{...(2.3)}$$

2.2 Matriks dan Operasi Matriks

Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut disebut entri atau elemen matriks. Operasi-operasi aritmatika dalam matriks yaitu penjumlahan matriks, pengurangan matriks, perkalian matriks dengan suatu skalar, dan perkalian matriks dengan matriks.

Teorema 2.2 [1]

Jika A matriks $n \times n$ dan dapat dibalik, maka untuk setiap matriks $\boldsymbol{b}$ $n \times 1$ dari sistem persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi eksak tunggal yaitu $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

2.3 Determinan

Ada beberapa definisi yang dikembangkan dalam rangkaian determinan, salah satu konteksnya adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Definisi 2.3[1]

Jika A matriks $n \times n$, maka bilangan yang diperoleh dengan mengalikan entri-entri dalam setiap baris atau kolom dari A dengan kofaktor yang sesuai dan menambahkan hasilnya disebut determinan A, dan jumlahan semuanya disebut ekspansi kofaktor A.

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad \text{...(2.4)}$$
(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad \text{...(2.5)}$$
(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i).

Teorema 2.4 [1]

Jika A adalah matriks bujur sangkar dengan dua baris mempunyai entri-entri yang identik atau dua kolom mempunyai entri-entri yang identik, maka $\det(A) = 0$.

Teorema 2.5 [1]

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$

i. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari baris tunggal atau kolom tunggal yang dikalikan dengan skalar k, maka $\det(B) = k \det(A)$.

ii. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari dua buah baris atau dua buah kolom matriks A yang saling ditukar, maka $\det(B) = -\det(A)$.

iii. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari penggandaan suatu baris matriks A ditambahkan ke baris lain atau penggandaan suatu kolom matriks A ditambahkan ke kolom lainnya, maka $\det(B) = \det(A)$.

Teorema 2.6[1]

Diberikan A, B, dan C adalah matriks berukuran $n \times n$ yang hanya berbeda pada salah satu barisnya, katakan baris ke-r, dan diasumsikan bahwa baris ke-r dari C dapat diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian pada baris ke-r dari matriks A dan B. Maka

$$\det(C) = \det(A) + \det(B) \qquad ...(2.6)$$

Hasilnya juga sama untuk kolom ke-r.

Teorema 2.7[1]

Jika sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem mempunyai solusi tunggal, yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \qquad ...(2.7)$$

di mana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan entri-entri pada kolom ke-j dari matriks A dengan entri-entri pada matriks

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Rumus di atas disebut aturan Cramer.

2.4 Ruang Vektor

Ruang vektor dengan skalar riil disebut ruang vektor riil dan ruang vektor dengan skalar kompleks disebut ruang vektor kompleks.

Definisi 2.8 [1]

Jika $S = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ bukan himpunan kosong di ruang vektor V, maka persamaan

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r} = 0 \qquad ...(2.8)$$

paling tidak mempunyai satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

yang disebut solusi trivial. Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut bebas linier dan jika ada solusi selain solusi trivial, maka S dikatakan bergantung linier.

2.5 Rank dan Nullitas

Definisi 2.9[1]

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom matriks A disebut rank A dan donotasikan dengan $r(A)$; dimensi dari ruang null A disebut nullitas A dan dinotasikan dengan $n(A)$.

Definisi 2.10[3]

Matriks A berukuran $n \times n$ nonsingular jika dan hanya jika $r(A) = n$. Matriks A berukuran $n \times n$ yang mempunyai rank kurang dari n disebut singular.

Teorema 2.11[6]

Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka

$$r(A) = r(A^TA) = r(AA^T) \qquad ...(2.9)$$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 19-28

2.6 Ruang Hasil Kali Dalam

Hasil kali dalam merupakan operasi yang mengaitkan antara ruang vektor dengan bilangan riil.

Definisi 2.12[1]

Hasil kali dalam pada ruang vektor riil$V$ adalah fungsi yang menghubungkan bilangan riil$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ dengan setiap pasang dari vektor-vektor di$V$ yang memenuhi aksioma berikut untuk setiap$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$dan skalar$k$:

i. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$
ii. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$
iii. $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$
iv. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ dan $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$jika dan hanya jika$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.13[1]

Jika$V$ adalah ruang hasil kali dalam riil, maka norm (panjang) dari vektor$\boldsymbol{v}$di$V$dinotasikan dengan$\|\boldsymbol{v}\|$dan didefinisikan oleh

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \qquad ...(2.10)$$

Definisi 2.14[1]

Dua buah vektor$\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dalam ruang hasil kali dalam disebut ortogonal jika$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Langkah-langkah konstruksi dari basis ortogonal atau ortonormal disebut proses Gram-Schmidt.

i. $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{u_1}$
ii. $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{u_2} - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \boldsymbol{v_1}$
iii. $\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{u_3} - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \boldsymbol{v_1} - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \boldsymbol{v_2}$
iv. $\boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{u_4} - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \boldsymbol{v_1} - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \boldsymbol{v_2} - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} \boldsymbol{v_3}$

dan seterusnya

Definisi 2.15 [4]

Ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam lengkap.

Lemma 2.16 [5]

Diberikan V dan W adalah ruang Hilbert, $G \in L(V, W)$ dan $G^* \in L(W, V)$ adalah adjoint operator, maka pernyataan berikut berlaku

i. $\mathrm{Range}(G) = W \Leftrightarrow \exists \gamma > 0 \ni \|G^* w\|_V \geq \gamma \|w\|_W, w \in W$.
ii. $\overline{\mathrm{Range}(G)} = W \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(G^*) = \{0\} W \Leftrightarrow G^*$ satu-satu.

2.7 Invers Moore-Penrose

Definisi 2.17[7]

Diberikan matriks$A$berukuran$m \times n$. Matriks$X$dikatakan pseudo-invers atau invers tergeneralisasi dari matriks$A$jika dan hanya jika$X$memenuhi satu atau lebih sifat-sifat berikut:

i. $AXA = A$
ii. $XAX = X$
iii. $(AX)^* = AX$

iv. $(XA)^* = XA$

di manaB^* adalah konjugat transpos dari matriks$B$yang secara umum entri-entri matriks$B$adalah bilangan kompleks. Apabila entri-entri matriks$B$adalah bilangan riil maka$B^* = B^T$.Jika X memenuhi sifat (i) maka disebut *one-inverse*.

Definisi 2.18[7]

X dikatakan invers Moore-Penrose dari matriks$A$jika dan hanya jika$X$ memenuhi semua sifat yang diberikan oleh Definisi 2.16 dan dinotasikan denganA^+.

Teorema 2.19[7]

Untuk sebarang sistem persamaan linier$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$dengan$A$berukuran$m \times ndanr(A) = m$, $\boldsymbol{x} = A^+\boldsymbol{b}$adalah solusi tunggal dengan$\|\boldsymbol{x}\|_2^2$ minimum.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Prosedurnya dimulai dengan mengumpulkan bahan tentang generalisasi Aturan Cramr. Kemudian membuktikan teorema yang menyatakan sistem persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $\det(AA^T) \neq 0$ menggunakan aturan Cramer dan invers Moore-Penrose. Selanjutnya mendefinisikan suatu sistem persamaan linier$\langle \boldsymbol{l_i}, \boldsymbol{x} \rangle = b_i$di mana $i = 1,2,\dots,m$ yang dibentuk dari vektor-vektor baris matriks Abesrta solusinya. Kemudian membuktikan teorema yang menyatakan sistem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi jika dan hanya jika vektor-vektor barisnya bebas linier menggunakan proses Gram-Schmidt.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Generalisasi Aturan Cramer

Didefinisikan suatu sistem persamaan linier

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{b} \in R^m, n \geq m \qquad \text{...(4.1)}$$

Ketika $m = n$ dan $\det(A) \neq 0$,menurut Teorema 2.2 sistem tersebut mempunyai solusi tunggal yaitu $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Berdasarkan Teorema 2.7, solusi persamaan (4.2)juga dapat dicari menggunakan aturan Cramer.Ada sebuah teorema yang menyatakan bahwa solusi dari persamaan (4.2) dapat berupa suatu kombinasi linier yang mana teorema ini disebut juga sebagai aturan Cramer Sederhana sesuai dengan teorema berikut:

Teorema 4.1

Sistem persamaan (4.1) dengan $m = n$mempunyai solusi tunggal$x_1, x_2, \dots, x_n$, maka jumlahan dari solusi sistem $\forall k_i \in \mathbb{R}$ di mana$i = 1,2,\dots,n$memenuhi:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} + k_1b_1 & a_{12} + k_2b_1 & \cdots & a_{1n} + k_nb_1 \\ a_{21} + k_1b_2 & a_{22} + k_2b_2 & \cdots & a_{2n} + k_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + k_1b_n & a_{n2} + k_2b_n & \cdots & a_{nn} + k_nb_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} - 1 \qquad (4.2)$$

Bukti:

Diberikan N adalah matriks koefisien konstan sistem yang entri-entrinya ditambahkan dengan konstanta $\boldsymbol{b}$pada baris yang bersesuaian dan terdapat suatu skalar $k_i \in \mathbb{R}$ di mana $i = 1,2,\dots,n$ sedemikian sehingga determinannya adalah

$$\det(N) = \begin{vmatrix} a_{11} + k_1 b_1 & a_{12} + k_2 b_1 & \cdots & a_{1n} + k_n b_1 \\ a_{21} + k_1 b_2 & a_{22} + k_2 b_2 & \cdots & a_{2n} + k_n b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + k_1 b_n & a_{n2} + k_2 b_n & \cdots & a_{nn} + k_n b_n \end{vmatrix}$$

berdasarkan Teorema 2.6,2.5 (i), danTeorema 2.4maka

$$\det(N) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + k_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Jika kedua ruas dibagi dengan determinan dari matriks A maka dengan menggunakan Teorema 2.7 atau aturan Cramer diperoleh

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = \frac{\det(N)}{\det(A)} - 1$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} + k_1 b_1 & a_{12} + k_2 b_1 & \cdots & a_{1n} + k_n b_1 \\ a_{21} + k_1 b_2 & a_{22} + k_2 b_2 & \cdots & a_{2n} + k_n b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + k_1 b_n & a_{n2} + k_2 b_n & \cdots & a_{nn} + k_n b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} - 1 \ \blacksquare$$

Dalam kasus lain, persamaan (4.1) akan memiliki solusi di mana matriks$A$ berukuran$m \times n$ dengan $n \geq m$ sesuai dengan teorema berikut.

Teorema 4.2

Untuk setiap $\boldsymbol{b} \in R^m$,persamaan(4.1) mempunyai solusi jika dan hanya jika$\det(AA^T) \neq 0$.

Bukti:

$\Longrightarrow$ Matriks A dipandang sebagai operator linier $A: R^n \to R^m$ dan adjoint operator A^T adalah transpos matriks A di mana $A^T: R^m \to R^n$. Persamaan (4.2) mempunyai solusi jika dan hanya jika operator A surjektif. Oleh karena itu, dari Lemma 2.16$\exists \gamma > 0 \ni$

$$\|A^T z\|_{R^n} \geq \gamma \|z\|_{R^m}, \ \ z \in R^m$$

sehingga

$$\langle AA^T z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|_{R^m}^2, \ \ z \in R^m$$

akibatnya AA^T satu-satu. Karena AA^T matriks $m \times m$, maka $\det(AA^T) \neq 0$.

$\Longleftarrow$ Jika diketahui $\det(AA^T) \neq 0$, maka berdasarkan Definisi 2.11$r(A) = m$. Dari Teorema 2.19 dapat dilihat jika $r(A) = m$ maka $\boldsymbol{x} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$ adalah solusi dari $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$dan merupakan solusi dengan norm minimum. Jika$\boldsymbol{w} = (AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$ adalah satu-satunya solusi dari persamaan$(AA^T)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$, maka dari Teorema 2.7diperoleh

$$w_1 = \frac{\det((AA^T)_1)}{\det(AA^T)}, w_2 = \frac{\det((AA^T)_2)}{\det(AA^T)}, \ldots, w_m = \frac{\det((AA^T)_m)}{\det(AA^T)}$$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 19-28

di mana $(AA^T)_i$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke-i dari matriks AA^T dengan matriks

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Solusi $\boldsymbol{x} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$dari persamaan (4.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \dfrac{\det((AA^T)_i)}{\det(AA^T)} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \dfrac{\det((AA^T)_i)}{\det(AA^T)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in} \dfrac{\det((AA^T)_i)}{\det(AA^T)} \end{bmatrix}$$

∴Benar bahwa untuk setiap$\boldsymbol{b} \in R^m$,persamaan(4.2)mempunyai solusi jika dan hanya jika$\det(AA^T) \neq 0$. ■

Jika persamaan (4.2) didefinisikan sebagai vektor-vektor berikut

$$\boldsymbol{l_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \boldsymbol{l_2} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{l_m} = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

maka persamaannya dapat ditulis dalam bentuk

$$\langle \boldsymbol{l_i}, \boldsymbol{x} \rangle = b_i, i = 1,2, \dots, m \qquad \dots(4.3)$$

Persamaan (4.3) dapat dicari solusinya, sesuai teorema berikut.

Teorema 4.3

Solusi dari persamaan(4.3) yang diberikan oleh invers Moore-Penrose$\boldsymbol{x} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$dapat ditulis sebagai berikut:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 + a_{1j}b_1 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_1 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_1 \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_2 & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 + a_{2j}b_2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_m & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_2 & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 + a_{mj}b_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 \end{vmatrix}} - 1 \qquad \dots(4.4)$$

dengan$j = 1,2, \dots, n$.

Bukti:

Solusi persamaan (2.2) diberikan oleh invers Moore-Penrose dengan bentuk $\boldsymbol{x} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{b}$. Diketahui$\{\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}\}$ adalah vektor-vektor baris matriks A, maka

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ merupakan suatu solusi untuk persamaan $(AA^T)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

Solusi tersebut dapat disubstitusikan ke persamaan sebelumnya menjadi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{bmatrix}$$

$$x_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \qquad \text{dengan } j = 1,2,\dots,n$$

Sesuai dengan Teorema 4.1,solusi di atas dapat diubah menjadi

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 + a_{1j}b_1 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_1 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_1 \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_2 & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 + a_{2j}b_2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_m & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_m & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 + a_{mj}b_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 \end{vmatrix}} - 1 \quad \blacksquare$$

Teorema 4.4

Persamaan(4.1)mempunyai solusi jika dan hanya jika himpunan vektor-vektor$\{\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}\}$bebas linier di$R^n$.

Bukti:

$\Longrightarrow$ Asumsikan persamaan (4.1) mempunyai solusi $\forall \boldsymbol{b} \in R^m$. Diasumsikan bilangan $c_i, i = 1,2,\dots,m$ ada, sedemikian sehingga

$$c_1\boldsymbol{l_1} + c_2\boldsymbol{l_2} + \cdots + c_m\boldsymbol{l_m} = 0$$

maka, $\boldsymbol{x} \in R^n$ ada sedemikian sehingga

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = c_m \end{array}$$

dengan kata lain

$$\langle \boldsymbol{l_i}, \boldsymbol{x} \rangle = c_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

oleh karena itu

$$\langle \boldsymbol{c_i l_i}, \boldsymbol{x} \rangle = c_i^2 \quad i = 1,2,\dots,m$$

Jadi

$$\langle c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_m l_m, \boldsymbol{x} \rangle = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 0$$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 19-28

Sehingga $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ yang menunjukkan bahwa vektor-vektor $\{\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}\}$ bebas linier sesuai Definisi 2.8.

$\Longleftarrow$ Diasumsikan vektor-vektor $\{\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}\}$ bebas linier di R^n. Menggunakan proses Gram-Schmidt dapat dicari vektor-vektor $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}$ yang ortogonal di R^nmaka persamaan (4.1) akan ekuivalen dengan sistem berikut

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{x} \rangle = c_i, \quad i = 1,2, \dots, m \qquad \text{...(4.5)}$$

di mana

$$c_1 = b_1$$
$$c_2 = b_2 - \frac{\langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{v_1}\|^2} c_1$$
$$c_3 = b_3 - \frac{\langle \boldsymbol{l_3}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{v_1}\|^2} c_1 - \frac{\langle \boldsymbol{l_3}, \boldsymbol{v_2} \rangle}{\|\boldsymbol{v_2}\|^2} c_2$$
$$\vdots$$
$$c_m = b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{v_i} \rangle}{\|\boldsymbol{v_i}\|^2} c_i$$

Jika vektor-vektor v_i dengan

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} \quad i = 1,2, \dots, m$$

dan matriks Υ berukuran $m \times n$ dengan

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

maka berdasarkan Teorema 4.2dapat diperoleh bahwa persamaan (4.5) mempunyai solusi $\forall \boldsymbol{c} \in R^m$ jika dan hanya jika $\det(\Upsilon\Upsilon^T) \neq 0$. Karena $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}$ adalah vektor-vektor yang ortogonal, maka

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} v_{ij}\, c_i \|v_i\|^{-2} \quad \text{dengan } j = 1,2, \dots, m$$

∴Benar bahwa persamaan(2.2)mempunyai solusi jika dan hanya jika himpunan vektor-vektor$\{\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}\}$bebas linier di$R^n$. ■

5. KESIMPULAN

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$di mana $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ dan $n \geq m$ dengan mendefinisikan $\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_m}$ yang merupakan vektor-vektor baris dari matriks A, maka dapat digunakan aturan Cramer yang telah generalisasi sebagai berikut:

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 19-28

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 + a_{1j}b_1 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_1 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_1 \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_2 & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 + a_{2j}b_2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle + a_{mj}b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle + a_{1j}b_m & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle + a_{2j}b_2 & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 + a_{mj}b_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \|\boldsymbol{l_1}\|^2 & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \|\boldsymbol{l_2}\|^2 & \cdots & \langle \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_1} \rangle & \langle \boldsymbol{l_m}, \boldsymbol{l_2} \rangle & \cdots & \|\boldsymbol{l_m}\|^2 \end{vmatrix}} - 1$$

dengan $j = 1,2, \dots, n$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. & Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra*. Edisi ke-10. New York: John Wiley & Sons.

[2] Burgstahler, S. 1983. *A Generalization of Cramer's Rule*. The Two-Year College Mathematics Journal. 14 (3): 203-205.

[3] Harville, D. A. 1997. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective.* New York: Springer.

[4] Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.*New York: John Wiley & Sons.

[5] Leiva, H. 2015. *A Generalization of Cramer's Rule*. Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. 5: 156-166.

[6] Rohde, C. A. 2003. *Linear Algebra and Matrices.Mc Graw-Hill. New York.*

[7] Usmani, R. A. 1987. *Applied Linear Algebra.* New York: Marcel Dekker.