Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

PENGINTEGRALAN MENGGUNAKAN ATURAN SIMPSON UNTUK INTERVAL TITIK YANG TIDAK SAMA

Fitriani, Akhmad Yusuf, Yuni Yulida
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jln. A. Yani Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
Email: matikfitri@gmail.com

ABSTRACT

In general, numerical integration is carried out at the same point intervals. But in reality, it is sometimes faced with the problem of integrating a function with unequal point intervals. One method to calculating integrals at unequal interval points is the Simpson rule. Based on it, the research aims to form a general formula of numerical integration for unequal interval points and Simpson rule equation by using the Newton interpolation formula with divided differences, also an errors for unequal interval points by integrating the Taylor's series. The results of this research were obtained a general formula of numerical integration for unequal interval points, general formula of Simpson's 1/3-rule, general formula of the Simpson's 3/8-rule, and an error for each other's Simpson's rules.

Keywords : Numerical Integration, Simpson's 1/3-Rule, Simpson's 3/8-Rule, Error.

ABSTRAK

Secara umum, formula untuk pengintegralan numerik didasarkan pada interval titik yang sama. Tetapi pada kenyataannya kadang-kadang dihadapkan pada persoalan pengintegral suatu fungsi dengan interval yang tidak sama. Salah satu metode untuk menghitung integral pada interval titik yang tidak sama adalah aturan Simpson. Berdsarkan hal ini, penelitian ini bertujuan membentuk rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama dan persamaan aturan Simpson dengan menggunakan rumus interpolasi newton dengan selisih terbagi, serta error untuk interval titik yang tidak sama dengan mengintegralkan deret taylor. Hasil dari penelitian ini didapatkan rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama, rumus umum aturan Simpson satu per tiga, rumus umum aturan Simpson tiga per delapan, dan error aturan Simpson masing-masing.

Kata Kunci : Pengintegralan Numerik, Aturan Simpson Satu Per Tiga, Aturan Simpson Tiga Per Delapan, Error.

1. PENDAHULUAN

Penggunaan metode numerik yaitu untuk penyelesaian persoalan matematis yang sulit didapatkan menggunakan metode analitik, seperti: interpolasi, pengintegralan, dan sebagainya. Pengintegralan numerik dapat digunakan jika fungsi yang akan diintegralkan diberikan dalam bentuk numerik atau dalam bentuk tabel dan juga dapat dilakukan jika integral sulit diselesaikan secara analitik[1].

Salah satu metode untuk menghitung integral pada interval titik yang tidak sama yaitu aturan Simpson. Aturan Simpson dapat diperoleh dengan mempartisi sebuah grafik. Untuk partisi berjumlah genap digunakan aturan Simpson satu per tiga. Untuk partisi berjumlah ganjil digunakan aturan Simpson tiga per delapan, yang membutuhkan empat titik kurva atau minimal tiga buah partisi untuk mendekati fungsinya [2]. Oleh karena itu, metode yang dibahas pada artikel ini adalah aturan Simpson untuk interval titik yang tidak sama yang merujuk pada penelitian Ur Rashid Khan, Md. Mamun, dkk. 2017 [3].

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Aturan Substitusi Untuk Integral Tentu

Teorema 2.1 [4]
Misalkan g memiliik turunan kontinu pada $[a, b]$, dan misalkan f kontinu pada daerah hasil dari g. Maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Bukti:
Misal $u = g(x)$ maka $du = g'(x)dx$. Pada saat $x = a$ maka $u = g(a)$, pada saat $x = b$ maka $u = g(b)$. Sehingga integral menjadi

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)|_{g(a)}^{g(b)} = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$$

Sehingga, menurut Teorema Dasar Kalkulus Kedua

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big)\Big|_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$$

2.2 Integral Parsial

Rumus integral parsial untuk integral tentu adalah

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du \quad \textbf{[4].} \qquad ...(1)$$

2.3 Pengintegralan Numerik

Diketahui rumus beda-maju Newton adalah sebagai berikut dengan nilai $q = \frac{j-j_0}{h}$.

$$k = k_0 + q\Delta k_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 k_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 k_0 + \cdots \qquad ...(2)$$

Kemudian persamaan (2) diintegralkan dengan interval j_0 sampai j_n. Sehingga nilai integral menjadi,

$$\int_{j_0}^{j_n} k\ dj = nh\left[k_0 + \frac{n}{2}\Delta k_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 k_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 k_0 + \cdots\right] \qquad ...(3)$$

Persamaan (3) merupakan rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang sama. Dari rumus umum ini dapat diperoleh rumus pengintegralan yang berbeda dengan memasukkan nilai $n =$ 1,2,3, ... **[5].**

2.4 Selisih Bagi

Definisi 2.2 [5]
Misalkan $(j_0, k_0), (j_1, k_1), \dots, (j_n, k_n)$ yang diberikan $(n + 1)$ titik. Maka selisih bagi dari 1,2,*sampai n didefinisikan sebagai:*

$$\begin{aligned} [j_0, j_1] &= \frac{k_1 - k_0}{j_1 - j_0} \\ [j_0, j_1, j_2] &= \frac{[j_1, j_2] - [j_0, j_1]}{j_2 - j_0} \\ &\vdots \\ [j_0, j_1, \dots, j_n] &= \frac{[j_1, j_2, \dots, j_n] - [j_0, j_1, \dots, j_{n-1}]}{j_n - j_0} \end{aligned} \qquad ...(4)$$

2.5 Rumus Umum Interpolasi Newton

Berdasarkan persamaan (4) untuk suatu j sedemikian hingga diperoleh rumus umum interpolasi newton dengan selisih bagi, yaitu

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

$$k = k_0 + (-j_0 + j)[j_0, j_1] + (-j_0 + j)(-j_1 + j)[j_0, j_1, j_2] + (-j_0 + j)(-j_1 + j)(-j_2 + j)[j_0, j_1, j_2, j_3] + \cdots dst.$$ **[5].** ...(5)

2.6 Aturan Simpson Untuk Interval Titik yang Sama

2.6.1 Aturan Simpson Satu per Tiga

Aturan Simpson satu per tiga diperoleh dengan membagi kurva menjadi n bagian yang sama. Fungsi didekati dengan polinom orde dua yang memerlukan minimal tiga titik sehingga partisi yang dibentuk jumlahnya genap **[2].**

Dengan memasukkan nilai $n = 2$ pada persamaan (3) diperoleh

$$\int_{j_0}^{j_2} k \; dj = 2h\left(k_0 + \Delta k_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 k_0\right) = \frac{h}{3}(k_0 + 4k_1 + k_2)$$

demikian pula pada interval j_2 sampai j_4

$$\int_{j_2}^{j_4} k \; dj = \frac{h}{3}(k_2 + 4k_3 + k_4)$$

dan untuk interval j_{n-2} sampai j_n

$$\int_{j_{n-2}}^{j_n} k \; dj = \frac{h}{3}(k_{n-2} + 4k_{n-1} + k_n)$$

sehingga dapat disimpulkan rumus umum aturan Simpson satu per tiga, yaitu:

$$\int_{j_0}^{j_n} k \; dj = \frac{h}{3}[k_0 + 4k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 + 4k_5 + 2k_6 + \cdots + 2k_{n-2} + 4k_{n-1} + k_n]$$ **[5].** ...(6)

2.6.2 Aturan Simpson Tiga per Delapan

Pada aturan Simpson tiga per delapan partisi yang dibentuk berjumlah ganjil, yang membutuhkan minimal empat titik kurva atau tiga partisi untuk mendekati fungsinya **[2].**

Dengan memasukkan nilai $n = 3$ pada persamaan (3) maka diperoleh

$$\int_{j_0}^{j_3} k \; dj = \frac{3h}{8}(k_0 + 3k_1 + 3k_2 + k_3)$$

demikian pula pada interval j sampai j_6

$$\int_{j_3}^{j_6} k \; dj = \frac{3h}{8}(k_3 + 3k_4 + 3k_5 + k_6)$$

sehingga dapat disimpulkan rumus umum untuk aturan Simpson tiga per delapan adalah,

$$\int_{j_0}^{j_n} k \; dj = \frac{3h}{8}(k_0 + 3k_1 + 3k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 3k_5 + 2k_6 + \cdots + 2k_{n-3} + 3k_{n-2} + 3k_{n-1} + k_n)$$ **[5].** ...(7)

2.7 Error Aturan Simpson

Diketahui rumus beda-maju Newton adalah

$$k = k_0 + q\Delta k_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 k_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 k_0 + \cdots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n k_0 + R_n$$

dengan, $R_n = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)$ ...(8)

dengan mengintegralkan R_n dengan interval 0 sampai 2 maka di peroleh nilai error aturan Simpson satu per tiga

$$Error = -\frac{h^4}{90} f^{iv}(\xi)$$ ...(9)

dimana $j_0 < \xi < j_n$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

Untuk mendapatkan nilai error aturan Simpson tiga per delapan, maka R_n diintegralkan dengan interval 0 sampai 3

$$Error = -\frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi) \quad \textbf{[6].} \qquad ...(10)$$

2.8 Deret Taylor

Diberikan $f(d)$ adalah jumlah dari deret pangkat dengan interval konvergensi $l - r < d < l + r$, $(r > 0)$:

$$f(d) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (d-l)^n, \; l - r < d < l + r$$

Deret ini di sebut deret Taylor dari $f(d)$ pada $d = l$ jika koefisien c_n diberikan dengan aturan:

$$c_0 = f(l), \; c_1 = \frac{1}{1!} f'(l), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(l), \; \cdots, c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(l) \qquad ...(11)$$

maka $f(d) = f(l) + f'(l)(d-l) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(l)(d-l)^n + \cdots$ **[7]**. ...(12)

3. METODOLOGI

Tulisan ini mengkaji kembali penelitian Ur Rashid Khan, Md. Mamun, dkk. 2017, dengan prosedur penelitian sebgai berikut:

1. Membentuk persamaan aturan Simpson untuk interval titik yang tidak sama.
   a. Menentukan rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama.
   b. Memasukkan nilai n (dengan n merupakan jumlah partisi) pada rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama untuk mendapatkan aturan Simpson satu per tiga dan aturan Simpson tiga per delapan.
2. Membentuk persamaan error aturan Simpson untuk interval titik yang tidak sama.
   a. Mengintegralkan deret Taylor
   b. Memasukkan nilai j pada deret Taylor untuk mendapatkan nilai k_1, k_2 dan k_3
   c. Menghitung nilai integral k
   d. Mensubstitusikan nilai k yang didapat ke persamaan deret taylor yang telah diintegralkan
3. Menghitung integral dengan aturan Simpson untuk interval titik yang tidak sama pada contoh.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Persamaan Aturan Simpson untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Diberikan integral tentu $\int_{j_0}^{j_n} y \, dj$, dengan interval j_0 sampai j_n dibagi ke dalam n subinterval yang tidak sama. Diketahui rumus umum interpolasi Newton dengan selisih terbagi pada persamaan (5) adalah sebagai berikut:

$$k = k_0 + (-j_0 + j)[j_0, j_1] + (-j_0 + j)(-j_1 + j)[j_0, j_1, j_2] + (-j_0 + j)(-j_1 + j)(-j_2 + j)[j_0, j_1, j_2, j_3] + \cdots + (-j_0 + j)(-j_1 + j) \ldots (-j_n + j)[j, j_0, j_1, \ldots, j_n] + \qquad ...(13)$$

Kemudian Persamaan (13) diintegralkan kedua ruas dari j_0 sampai j_n , diperoleh

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

$$\int_{j_0}^{j_n} k\, dj = k_0(-j_0+j_n) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_0+j_n)^2\right)[j_0,j_1] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_0+j)(-j_1+j_n)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_1+j_n)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\Big)[j_0,j_1,j_2] + \Big((-j_0+j_n)\left(\tfrac{1}{2}(-j_1+j_n)(-j_2+j_n)^2 - \tfrac{1}{6}(-j_2+j_n)^3\right) - \tfrac{1}{6}[(-j_1+j_n)^2(-j_2+j_n)^3] + \tfrac{1}{6}[(-j_1+j_0)^2(-j_2+j_0)^3] + \tfrac{1}{12}(-j_2+j_n)^4 - \tfrac{1}{12}(-j_2+j_0)^4\Big)[j_0,j_1,j_2,j_3] + \cdots \quad \text{...(14)}$$

Persamaan (14) disebut rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama. Dari rumus umum tersebut maka dapat diperoleh rumus pengintegralan yang berbeda dengan memasukkan $n = 1,2,3$ dengan n merupakan jumlah partisi. Nilai $n = 1$ digunakan untuk aturan Trapezoidal, nilai $n = 2$ digunakan untuk aturan Simpson satu per tiga dan untuk $n = 3$ digunakan untuk aturan Simpson tiga per delapan.

4.2 Aturan Simpson untuk Interval Titik yang Tidak Sama

4.2.1 Aturan Simpson Satu per Tiga

Dengan memaasukkan nilai $n = 2$ ke persamaan (14) di peroleh rumus aturan simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama.

Untuk interval j_0 sampai j_2

$$\int_{j_0}^{j_2} y\, dj = y_0(-j_0+j_2) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_0+j_2)^2\right)[j_0,j_1] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_0+j_2)(-j_1+j_2)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_1+j_2)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\Big)[j_0,j_1,j_2] \quad \text{...(15)}$$

Rumus umum aturan Simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama adalah sebagai berikut:

$$\int_{j_0}^{j_n} k\, dj = \sum_{i=2}^{n}\Big\{y_{i-2}(-j_{i-2}+j_i) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_{i-2}+j_i)^2\right)[j_{i-2},j_{i-1}] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+j_i)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_{i-1}+j_i)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_{i-1}+j_{i-2})^3\Big)[j_{i-2},j_{i-1},j_i]\Big\} \quad \text{...(16)}$$

4.2.2 Aturan Simpson Tiga per Delapan

Aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama diperoleh dengan memasukkan nilai $n = 3$ pada Persamaan (14).

untuk interval j_0 sampai j_3

$$\int_{j_0}^{j_3} k\, dj = k_0(-j_0+j_3) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_0+j_3)^2\right)[j_0,j_1] + \tfrac{1}{2}[j_0,j_1,j_2]\Big[(-j_0+j_3)(-j_1+j_3)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_1+j_3)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\Big] + \tfrac{1}{2}[j_0,j_1,j_2,j_3]\Big[(-j_0+j_3)(-j_1+j_3)(-j_2+j_3)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_1+j_3)(-j_2+j_3)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_1+j_0)(-j_2+j_0)^3 + \tfrac{1}{12}(-j_2+j_3)^4 - \tfrac{1}{12}(-j_2+j_0)^4\Big] \quad \text{...(17)}$$

Rumus umum aturan Simpson tiga per delapan unuk interval titik yang tidak sama adalah sebagai berikut:

$$\int_{j_0}^{j_n} k\, dj = \sum_{i=3}^{n}\Big\{k_{i-3}(-j_{i-3}+j_i) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_{i-3}+j_i)^2\right)[j_{i-3},j_{i-2}] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_{i-3}+j_i)(-j_{i-2}+j_i)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_i)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_{i-3})^3\Big)[j_{i-3},j_{i-2},j_{i-1}] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_{i-3}+j_i)(-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+$$

...(18)

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

$$j_i)^2 - \frac{1}{3}(-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+j_i)^3 + \frac{1}{3}(-j_{i-2}+j_{i-3})(-j_{i-1}+j_{i-3})^3 + \frac{1}{12}(-j_{i-1}+j_i)^4 - \frac{1}{12}(-j_{i-1}+j_{i-3})^4\Big)[j_{i-3},j_{i-2},j_{i-1},j_i]\Big\}$$

4.3 Error Aturan Simpson

4.3.1 Error Aturan Simpson Satu per Tiga

Diketahui deret Taylor disekitar $j = j_0$

$$k(j) = k_0 + \frac{(-j_0+j)}{1!}k_0' + \frac{1}{2!}(-j_0+j)^2k_0'' + \frac{1}{3!}(-j_0+j)^3k_0''' + \cdots + \frac{1}{n!}(-j_0+j)^nk_0^n \quad ...(19)$$

Kemudian Persamaan (19) di integralkan kedua ruas dari j_0 sampai j_2, diperoleh

$$\int_{j_0}^{j_2} y\,dj = k_0(-j_0+j_2) + \frac{1}{2}(-j_0+j_2)^2\,y_0' + \frac{1}{6}(-j_0+j_2)^3\,y_0'' + \frac{1}{24}(-j_0+j_2)^4\,y_0''' \quad ...(20)$$

Dari persamaan (15) diketahui nilai integral k pada interval j_0 sampai j_2 adalah

$$\int_{j_0}^{j_2} k\,dj = k_0(-j_0+j_2) + \left(\frac{1}{2}(-j_0+j_2)^2\right)[j_0,j_1] + \frac{1}{2}\Big((-j_0+j_2)(-j_1+j_2)^2 - \frac{1}{3}(-j_1+j_2)^3 + \frac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\Big)[j_0,j_1,j_2] \quad ...(21)$$

Kemudian masukkan nilai $j = j_1$ dan $j = j_2$ pada persamaan (19) untuk mendapatkan nilai k_1 dan k_2. Sehingga persamaan (20) berubah menjadi

$$\int_{j_0}^{j_2} k\,dj = \frac{1}{36}(-j_0+j_2)[36k_0 + 18(-j_0+j_2)k_0' + 6(-j_0+j_2)^2k_0'' + (-j_0+j_2)^2(-j_1-j_0+2j_2)k_0'''] \quad ...(22)$$

Kemudian Persamaan (21) dan (22) dikurangkan, sehingga didapat persamaan error aturan Simpson untuk interval j_0 sampai j_2

$$\text{Error } = \left|\frac{1}{72}(-j_0+j_2)^3(-j_0-j_2+2j_1)k_0'''\right|$$

Dengan total error yaitu,

$$\text{Error } = \left|\frac{1}{72}\sum_{i-2}^{n}(-j_{i-2}+j_i)^3(-j_i-j_{i-2}+2j_{i-1})k_{i-2}'''\right|$$

4.3.2 Error Aturan Simpson Tiga per Delapan

Diketahui deret Taylor disekitar $j = j_0$,

$$k(j) = k_0 + \frac{(-j_0+j)}{1!}k_0' + \frac{1}{2!}(-j_0+j)^2k_0'' + \frac{1}{3!}(-j_0+j)^3k_0''' + \frac{1}{4!}(-j_0+j)^4k_0^{iv} + \cdots + \frac{1}{n!}(-j_0+j)^nk_0^n \quad ...(23)$$

Kemudian Persamaan (23) di integralkan kedua ruas dari j_0 sampai j_3, diperoleh

$$\int_{j_0}^{j_3} k\,dj = k_0(-j_0+j_3) + \frac{1}{2}(-j_0+j_3)^2\,k_0' + \frac{1}{6}(-j_0+j_3)^3\,k_0'' + \frac{1}{24}(-j_0+j_3)^4\,k_0''' + \frac{1}{120}(-j_0+j_3)^5\,k_0^{iv} \quad ...(24)$$

Dari persamaan (17) diketahui nilai integral y pada interval j_0 sampai j_3 adalah

$$\int_{j_0}^{j_3} k\,dj = k_0(-j_0+j_3) + \left(\frac{1}{2}(-j_0+j_3)^2\right)[j_0,j_1] + \frac{1}{2}\Big((-j_0+j_3)(-j_1+j_3)^2 - \frac{1}{3}(-j_1+j_3)^3 + \frac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\Big)[j_0,j_1,j_2] + \frac{1}{2}\Big((-j_0+j_3)(-j_1+j_3)(+j_3-j_2)^2 - \frac{1}{3}(-j_1+j_3)(-j_2+j_3)^3 + \frac{1}{3}(-j_1+j_0)(-j_2+j_0)^3 + \frac{1}{12}(-j_2+j_3)^4 - \frac{1}{12}(-j_2+j_0)^4\Big)[j_0,j_1,j_2,j_3] \quad ...(25)$$

Kemudian masukkan nilai $j = j_1, j = j_2$, dan $j = j_2$ pada persamaan (23) untuk mendapatkan nilai y_1, y_2, dan y_3. Sehingga persamaan (25) berubah menjadi

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

$$\int_{j_0}^{j_3} k\,dj = \frac{1}{576}(j_3 - j_0)\big[(j_3 - j_0)\big(288k_0' - 96j_0k_0'' + 96j_3k_0'' + 28j_0^2k_0''' - 16j_0j_2k_0''' + 24j_2^2k_0''' - 40j_0j_3k_0''' - 32j_2j_3k_0''' + 36j_3^2k_0''' - 9j_0^3k_0^{iv} + 3j_0^2j_1k_0^{iv} + 15j_0^2j_2k_0^{iv} - 8j_0j_1j_2k_0^{iv} - 22j_0j_2^2k_0^{iv} + 6j_1j_2^2k_0^{iv} + 6j_2^3k_0^{iv} + 9j_0^2j_3k_0^{iv} + 2j_0j_1j_3k_0^{iv} + 22j_0j_2j_3k_0^{iv} - 4j_1j_2j_3k_0^{iv} - 2j_2^2j_3k_0^{iv} - 21j_0j_3^2k_0^{iv} + j_1j_3^2k_0^{iv} - 7j_2j_3^2k_0^{iv} + 9j_3^3k_0^{iv}\big) + 576k_0\big] \quad ...(26)$$

Kemudian persamaan (24) dan (26) dikurangkan, sehingga didapatkan persamaan error aturan Simpson tiga per delapan untuk interval j_0 sampai j_3

$$\text{Error} = \Big|\frac{1}{2880}(j_3 - j_0)^2[-20k_0'''(j_0^2 - 4j_0j_2 + 6j_2^2 + 2j_0j_3 - 8j_2j_3 + 3j_3^2) + k_0^{iv}(-21j_0^3 + 15j_0^2j_1 + 75j_0^2j_2 - 40j_0j_1j_2 - 110j_0j_2^2 + 30j_1j_2^2 + 30j_2^3 - 27j_0^2j_3 + 10j_0j_1j_3 + 110j_0j_2j_3 - 20j_1j_2j_3 - 10j_2^2j_3 + 33j_0j_3^2 + 5j_1j_3^2 - 35j_2j_3^2 + 21j_3^3)\Big|$$

Dengan total error

$$\text{Error} = \Big|\frac{1}{2880}\sum_{i=3}^{n}(j_i - j_{i-3})^2[-20k_{i-3}'''\big(j_{i-3}^2 - 4j_{i-3}j_{i-1} + 6j_{i-1}^2 + 2j_{i-3}j_i - 8j_{i-1}j_i + 3j_i^2\big) + k_{i-3}^{iv}(-21j_{i-3}^3 + 15j_{i-3}^2j_{i-2} + 75j_{i-3}^2j_{i-1} - 40j_{i-3}j_{i-2}j_{i-1} - 110j_{i-3}j_{i-1}^2 + 30j_{i-2}j_{i-1}^2 + 30j_{i-1}^3 - 27j_{i-3}^2j_i + 10j_{i-3}j_{i-2}j_i + 110j_{i-3}j_{i-1}j_i - 20j_{i-2}j_{i-1}j_1 - 10j_{i-1}^2j_i + 33j_{i-3}j_i^2 + 5j_{i-2}j_i^2 - 35j_{i-1}j_i^2 + 21j_i^3)\Big|$$

4.4 Contoh

Hitunglah nilai integral dari $\int_0^2 je^{-j^2}\,dj$ menggunakan aturan Simpson satu per tiga dan aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama. Dengan selang yang dibagi menjadi 6 interval yang tidak sama. Selanjutnya diberikan nilai $k = je^{-j^2}$ di titik ujung selang yang berbeda.

$j_0 = 0$	$k_0 = 0$
$j_1 = 0.36$	$k_1 = 0{,}316240826$
$j_2 = 0.64$	$k_2 = 0{,}424906089$
$j_3 = 1.02$	$k_3 = 0{,}360379595$
$j_4 = 1.47$	$k_4 = 0{,}169375421$
$j_5 = 1.72$	$k_5 = 0{,}089271257$
$j_6 = 2$	$k_6 = 0{,}036631278$

Penyelesaian:

a. Aturan Simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama

Dari persamaan (16) diperoleh nilai integral dari je^{-j^2}

$$\int_0^2 je^{-j^2}\,dj = \Big\{k_0(-j_0 + j_2) + \Big(\tfrac{1}{2}(-j_0 + j_2)^2\Big)[j_0, j_1] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_0+j_2)(-j_1 + j_2)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_1 + j_2)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_1 + j_0)^3\Big)[j_0, j_1, j_2]\Big\} + \Big\{k_2(-j_2+j_4) + \Big(\tfrac{1}{2}(-j_0 + j_2)^2\Big)[j_2, j_3] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_2+j_4)(-j_3+j_4)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_3 + j_4)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_3 + j_2)^3\Big)[j_2, j_3, j_4]\Big\} + \Big\{k_4(-j_4 + j_6) + \Big(\tfrac{1}{2}(-j_4 + j_6)^2\Big)[j_4, j_5] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_4 + j_6)(-z_5 + j_6)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_5 + j_6)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_5 + j_4)^3\Big)[j_4, j_5, j_6]\Big\}$$

$$= 0.437690033$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 46-54

$$\text{Error} = \left|\frac{1}{72}\{[(-j_0+j_2)^3(2j_1-j_2-j_0)k_0'''] + [(-j_2+j_4)^3(2j_3-j_4-j_2)k_2'''] + [(-j_4+j_6)^3(2j_5-j_6-j_4)k_4''']\}\right|$$
$$= 0.002726757$$

Dari perhitungan dapat dilihat bahwa nilai yang didapatkan menggunakan aturan Simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama yaitu 0.437690033 dengan error metode sebesar 0.002726757 dan nilai error terhadap nilai eksak yaitu sebesar 0.108287653%.

b. Aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama

Dari persamaan (17) diperoleh nilai integral dari je^{-j^2}

$$\int_0^2 je^{-j^2}\,dj = k_0(-j_0+j_3) + \left(\frac{1}{2}(-j_0+j_3)^2\right)[j_0,j_1] + \frac{1}{2}\left((-j_0+j_3)(-j_1+j_3)^2 - \frac{1}{3}(-j_1+j_3)^3 + \frac{1}{3}(-j_1+j_0)^3\right)[j_0,j_1,j_2] + \frac{1}{2}\left((-j_0+j_3)(-j_1+j_3)(-j_2+j_3)^2 - \frac{1}{3}(-j_1+j_3)(-j_2+j_3)^3 + \frac{1}{3}(-j_1+j_0)(-j_2+j_0)^3 + \frac{1}{12}(-j_2+j_3)^4 - \frac{1}{12}(-j_2+j_0)^4\right)[j_0,j_1,j_2,j_3] + k_3(-j_3+j_6) + \left(\frac{1}{2}(-j_3+j_6)^2\right)[j_3,j_4] + \frac{1}{2}\left((-j_3+j_6)(-j_4+j_6)^2 - \frac{1}{3}(-j_4+j_6)^3 + \frac{1}{3}(-j_4+j_3)^3\right)[j_3,j_4,j_5] + \frac{1}{2}\left((-j_3+j_6)(-j_4+j_6)(-j_5+j_6)^2 - \frac{1}{3}(-j_4+j_6)(-j_5+j_6)^3 + \frac{1}{3}(-j_4+j_3)(-j_5+j_3)^3 + \frac{1}{12}(-j_5+j_6)^4 - \frac{1}{12}(-j_5+j_3)^4\right)[j_3,j_4,j_5,j_6]$$
$$= 0.570443927$$

$$\text{Error} = \left|\frac{1}{2880}\left[(j_3-j_0)^2[-20k_0'''(j_0^2-4j_0j_2+6j_2^2+2j_0j_3-8j_2j_3+3j_3^2) + k_0^{iv}(-21j_0^3+15j_0^2j_1+75j_0^2j_2-40j_0j_1j_2-110j_0j_2^2+30j_1j_2^2+30j_2^3-27j_0^2j_3+10j_0j_1j_3+110j_0j_2j_3-20j_1j_2j_3-10j_2^2j_3+33j_0j_3^2+5j_1j_3^2-35j_2j_3^2+21j_3^3)\right] + \frac{1}{2880}\left[(j_6-j_3)^2[-20k_3'''(j_3^2-4j_3j_5+6j_5^2+2j_3j_6-8j_5j_6+3j_6^2) + k_3^{iv}(-21j_3^3+15j_3^2j_4+75j_3^2j_5-40j_3j_4j_5-110j_3j_5^2+30j_4j_5^2+30j_5^3-27j_3^2j_6+10j_3j_4j_6+110j_3j_5j_6-20j_4j_5j_6-10j_5^2j_6+33j_3j_6^2+5j_4j_6^2-35j_5j_6^2+21j_6^3)\right]\right|$$
$$= 0.187072856$$

Dari perhitungan dapat dilihat bahwa nilai yang didapatkan menggunakan aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama yaitu 0.570443927 dengan error metode sebesar 0.187072856 dan nilai error terhadap nilai eksak yaitu 0.162173809%.

5. KESIMPULAN

1. Persamaan aturan Simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama, yaitu
$$\int_{j_0}^{j_n} k\,dj = \sum_{i=2}^{n}\left\{y_{i-2}(-j_{i-2}+j_i) + \left(\frac{1}{2}(-j_{i-2}+j_i)^2\right)[j_{i-2},j_{i-1}] + \frac{1}{2}\left((-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+j_i)^2 - \frac{1}{3}(-j_{i-1}+j_i)^3 + \frac{1}{3}(-j_{i-1}+j_{i-2})^3\right)[j_{i-2},j_{i-1},j_i]\right\}$$
2. Persamaan aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama, yaitu

$$\int_{j_0}^{j_n} k\, dj = \sum_{i=3}^{n}\Big\{k_{i-3}(-j_{i-3}+j_i) + \left(\tfrac{1}{2}(-j_{i-3}+j_i)^2\right)[j_{i-3},j_{i-2}] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_{i-3}+j_i)(-j_{i-2}+j_i)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_i)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_{i-3})^3\Big)[j_{i-3},j_{i-2},j_{i-1}] + \tfrac{1}{2}\Big((-j_{i-3}+j_i)(-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+j_i)^2 - \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_i)(-j_{i-1}+j_i)^3 + \tfrac{1}{3}(-j_{i-2}+j_{i-3})(-j_{i-1}+j_{i-3})^3 + \tfrac{1}{12}(-j_{i-1}+j_i)^4 - \tfrac{1}{12}(-j_{i-1}+j_{i-3})^4\Big)[j_{i-3},j_{i-2},j_{i-1},j_i]\Big\}$$

3. Persamaan error aturan Simpson satu per tiga untuk interval titik yang tidak sama, yaitu

   Error $= \left|\frac{1}{72}\sum_{i-2}^{n}(-j_{i-2}+j_i)^3(-j_i-j_{i-2}+2j_{i-1})k_{i-2}'''\right|$

4. Persamaan error aturan Simpson tiga per delapan untuk interval titik yang tidak sama, yaitu

   Error $= \Big|\frac{1}{2880}\sum_{i-3}^{n}(j_i-j_{i-3})^2[-20k_{i-3}'''\big(j_{i-3}^2 - 4j_{i-3}j_{i-1} + 6j_{i-1}^2 + 2j_{i-3}j_i - 8j_{i-1}j_i + 3j_i^2\big) + k_{i-3}^{iv}(-21j_{i-3}^3 + 15j_{i-3}^2j_{i-2} + 75j_{i-3}^2j_{i-1} - 40j_{i-3}j_{i-2}j_{i-1} - 110j_{i-3}j_{i-1}^2 + 30j_{i-2}j_{i-1}^2 + 30j_{i-1}^3 - 27j_{i-3}^2j_i + 10j_{i-3}j_{i-2}j_i + 110j_{i-3}j_{i-1}j_i - 20j_{i-2}j_{i-1}j_1 - 10j_{i-1}^2j_i + 33j_{i-3}j_i^2 + 5j_{i-2}j_i^2 - 35j_{i-1}j_i^2 + 21j_i^3)\Big|$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi. 2010. *Metode Numerik.* Informatika, Bandung.

[2] Jaluria, Yogesh. 2011. *Computer Methods for Engineering with Matlab Applications Second Edition.* CRC Press, London.

[3] Md. Mamun-Ur-Rashid Khan, M. R. Hossain, Selina Parvin. 2017. Numerical Integration Schemes for Unequal Data Spacing. *American Journal of Applied Mathematics.* 5(2). 48-56. doi: 10.11648/j.ajam.20170502.12.

[4] Purcell, EJ, dkk. 2003. *Kalkulus Edisi Kedelapan Jilid 1*. Erlangga, Jakarta.

[5] Sastry, S.S. 2005. *Introductory Methods of Numerical Analysis 4th edition*. Prentice-Hall of India, New Delhi.

[6] Chapra, Steven C & Canale, Raymond P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition.* McGraw-Hill, New York.

[7] Kaplan, Wilfred. 2003. *Advanced Calculus Fifth Edition.* Pearson Education, United States.