Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 26-29

PRODUK KARTESIAN IDEAL *FUZZY* PADA RING

Sapuah, Saman Abdurrahman, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
E-mail: sapoeahsam26@gmail.com.

ABSTRAK
Konsep aljabar *fuzzy* pada awalnya dikenalkan oleh Rosenfeld pada tahun 1971. Pada tahun 1991, Malik dan Mordeson menyatakan bahwa produk kartesian dari dua subgrup *fuzzy* dari grup yang sama juga merupakan subgrup *fuzzy* dan produk kartesian dari dua ideal *fuzzy* dari ring yang sama juga merupakan ideal *fuzzy*. Dalam penelitian ini akan dibahas produk kartesian dari dua atau lebih subgrup *fuzzy* dari grup yang berbeda juga merupakan subgrup *fuzzy* dan produk kartesian dua atau lebih ideal *fuzzy* dari ring yang berbeda juga merupakan ideal *fuzzy*.

Kata kunci : grup, ring, subgrup *fuzzy*, ideal *fuzzy*, produk kartesian.

ABSTRACT
The concept of algebra *fuzzy* was initially introduced by Rosenfeld in 1971. In 1991, Malik and Moderson explained if cartesian product of two *fuzzy* subgroup from same group, then it was *fuzzy* subgroup too and if cartesian product of two *fuzzy* ideal from same ring, then it was *fuzzy* ideal too. We discuss the cartesian product of two or more *fuzzy* subgroups from different group, then it was *fuzzy* subgroup too and cartesian product of two or more *fuzzy* ideal from different ring, then it was *fuzzy* ideal too.

Keywords : group, ring, *fuzzy* subgroup, *fuzzy* ideal, cartesian product.

1. PENDAHULUAN

Konsep *fuzzy* diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh [9] yang mendefinisikan himpunan *fuzzy* sebagai subset *fuzzy*, yaitu suatu pemetaan dari himpunan tidak kosong X ke [0,1]. Seiring dengan berjalannya waktu, banyak peneliti melakukan penelitian lanjutan yang dilakukan Zadeh, diantaranya peneliti dari aljabar memadukan antara konsep *fuzzy* dengan aljabar, yaitu dengan mengganti himpunan X tidak kosong dengan suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner ataupun dua operasi biner, seperti: Rosenfeld [8] pada tahun 1971 memperkenalkan konsep subgrup *fuzzy*, kemudian pada tahun1991, Malik dan Moderson [7] memperkenalkan konsep relasi pada grup *fuzzy* dan ring *fuzzy*. Selanjutnya pada tahun 2015, Saman [1] memperkenalkan konsep produk kartesius pada struktur *near-ring fuzzy*. Dari penelitian yang dilakukan Saman [1], maka pada penelitian ini, akan dilakukan penelitian lanjutan, yaitu akan menyelidiki sifat–sifat produk kartesius pada ideal *fuzzy* dari suatu ring sebarang.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 2.1 [2] *Diberikan ring R_1 dan R_2, produk kartesian $R_1 \times R_2$ memiliki struktur dari ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:*
$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$ *untuk setiap* r_1, r_2 *dan* $s_1, s_2 \in R_1 \times R_2$
$(r_1, r_2)\,(s_1, s_2) := (r_1 s_1, r_2 s_2)$ *untuk setiap* r_1, r_2 *dan* $s_1, s_2 \in R_1 \times R_2$

Definisi 2.2 [4] *Diberikan* μ *dan* σ *subset fuzzy dari S. Produk kartesian dari* μ *dan* σ *adalah* $\mu \times \sigma(x,y) = min\{\mu(x), \sigma(y)\}$ *untuk setiap* $x, y \in S$
Definisi 2.3 [7] *Subset fuzzy* μ *dari grup* G *disebut subgrup fuzzy jika:*
(i) $\mu(x+y) \geq min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$ *untuk setiap* $x, y \in G$.
(ii) $\mu(-x) \geq \mu(x)$ *untuk setiap* $x \in G$.
Teorema 2.4 [7] *Suatu subset fuzzy* μ *dari grup* $(G, +)$ *disebut subgrup fuzzy jika dan hanya jika* $\mu(x-y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$ *untuk setiap* $x, y \in G$.
Definisi 2.5 [7] *Subset fuzzy* μ *dari ring* R *disebut ideal kiri (kanan) fuzzy jika untuk setiap* $x, y \in R$ *memenuhi syarat berikut:*
(i) $\mu(x-y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$.
(ii) $\mu(xy) \geq \mu(y)$
(iii) $\mu(xy) \geq \mu(x)$
Subset fuzzy μ disebut ideal kiri *fuzzy* jika sifat (i) dan (ii) terpenuhi dan μ disebut ideal kanan *fuzzy* jika sifat (i) dan (iii) terpenuhi.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber, baik dari buku, artikel maupun jurnal yang relevan dengan penelitian yang dilakukan. Adapun prosedur penelitian ini yaitu, mengumpulkan dan mempelajari materi tentang definisi grup, ring, ideal dan *subset fuzzy* yang merupakan dasar pembentukan subgrup *fuzzy* dan ideal *fuzzy*. Kemudian membuktikan beberapa lemma dan teorema yang berhubungan dengan grup, ring dan ideal serta subgrup *fuzzy* dan ideal *fuzzy*. Selanjutnya membuktikan dua atau lebih subgrup *fuzzy* dari grup yang berbeda maka produk kartesian dari dua atau lebih subgrup *fuzzy* tersebut juga merupakan subgrup *fuzzy* dari grup yang berbeda dan membuktikan dua atau lebih ideal *fuzzy* dari ring yang berbeda maka produk kartesian dari dua atau lebih ideal *fuzzy* tersebut juga merupakan ideal *fuzzy* dari ring yang berbeda. serta menarik kesimpulan dari penelitian.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam hasil dan pembahasan berikut ini akan diberikan teorema tentang produk kartesian subgrup *fuzzy* dan teorema tentang produk kartesian ideal *fuzzy*.
Teorema 3.1 *Jika* μ_1 *dan* μ_2 *subgrup fuzzy dari grup* G_1 *dan* G_2, *maka* $\mu_1 \times \mu_2$ *adalah subgrup fuzzy dari* $G_1 \times G_2$.
Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $\mu_1 \times \mu_2$ merupakan subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2$ maka cukup dibuktikan dengan menggunakan teorema 2.3.
Diambil sebarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \times G_2$. Berdasarkan definisi 2.1 dan definisi 2.2 diperoleh:
$$\begin{aligned}\mu_1 \times \mu_2\{(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\} &= \mu_1 \times \mu_2(x_1-x_2, y_1-y_2)\\ &= \min\{\mu_1(x_1-x_2), \mu_2(y_1-y_2)\}\end{aligned}$$
Karena μ_1 dan μ_2 merupakan subgrup *fuzzy* maka menurut teorema 2.3 sedemikian sehingga:
$$\begin{aligned}\mu_1 \times \mu_2\{(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\} &\geq \min\big\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_1(x_2)\}, \min\{(\mu_2(y_1), \mu_2(y_2)\}\big\}\\ &= \min\{\mu_1(x_1), \mu_1(x_2), \mu_2(y_1), \mu_2(y_2)\}\\ &= \min\{\mu_1(x_1), \mu_1(y_1), \mu_2(x_2), \mu_2(y_2)\}\end{aligned}$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 26-29

$$= \min\left\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(y_1)\}, \min\{(\mu_2(x_2), \mu_2(y_2)\}\right\}$$

Berdasarkan Definisi 2.2 maka berlaku:

$\mu_1 \times \mu_2\{(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\} \geq \min\{\mu_1 \times \mu_2(x_1, y_1), \mu_1 \times \mu_2(x_2, y_2)\}$

Terbukti bahwa $\mu_1 \times \mu_2$ merupakan subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2$. ■

Teorema 3.2 *Diberikan grup $G_1, G_2, \dots$ dan G_n. Jika μ_1, μ_2, $\dots$ dan μ_n berturut-turut adalah subgrup fuzzy dari $G_1, G_2, \dots$ dan G_n, maka $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_n$ adalah subgrup fuzzy dari $G_1 \times G_2 \dots \times G_n$.*

Bukti:

Untuk membuktikan produk kartesian $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_n$ adalah subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2 \dots \times G_n$ maka akan digunakan induksi matematika pada bilangan bulat positif $n \geq 2$.

(i) Untuk $n = 2$, maka menurut Teorema 3.1, $\mu_1 \times \mu_2$ adalah subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2$.

(ii) Diasumsikan untuk $n = k$ adalah $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_k$ subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2 \dots \times G_n$.

Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$, $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_k \times \mu_{k+1}$ adalah subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_{k+1}$.

Misalkan $\alpha = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_k$ dan $G' = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$.

Karena α adalah subgrup *fuzzy* dari G' dan μ_{k+1} adalah subgrup *fuzzy* dari G_{k+1} maka menurut Teorema 3.1 $\alpha \times \mu_{k+1}$ adalah subgrup *fuzzy* dari $G' \times G_{k+1}$.

Sehingga berdasarkan kondisi (i) dan (ii) dapat disimpulkan $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_n$ adalah subgrup *fuzzy* dari $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. ■

Teorema 3.3 *Jika μ_1 dan μ_2 ideal fuzzy dari ring R_1 dan R_2, maka $\mu_1 \times \mu_2$ ideal fuzzy dari $R_1 \times R_2$.*

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $\mu_1 \times \mu_2$ merupakan ideal *fuzzy* dari $R_1 \times R_2$ maka cukup dibuktikan dengan menggunakan teorema 2.5.

(i) Berdasarkan teorema 3.1 tentang teorema subgrup *fuzzy* maka telah terbukti bahwa:

$\mu_1 \times \mu_2\{(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\} \geq \min\left\{\mu_1 \times \mu_2(x_1, y_1), (\mu_1 \times \mu_2\left(x_{2,}y_2\right)\right\}$

(ii) Diambil sebarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R_1 \times R_2$. Berdasarkan definisi 2.1 dan definisi 2.2 diperoleh:

$$\begin{aligned}\mu_1 \times \mu_2\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\} &= \mu_1 \times \mu_2\{x_1x_2, y_1y_2\}\\ &= \min\{\mu_1(x_1x_2), \mu_2(y_1y_2)\}\end{aligned}$$

Karena μ_1 dan μ_2 merupakan ideal *fuzzy* kanan maka menurut definisi 2.5 sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned}\mu_1 \times \mu_2\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\} &\geq \min\{\mu_1(x_1), (\mu_2(y_1)\}\\ &= \mu_1 \times \mu_2(x_1, y_1)\end{aligned}$$

(iii) Karena μ_1 dan μ_2 merupakan ideal *fuzzy* kiri maka menurut definisi 2.5 sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned}\mu_1 \times \mu_2\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\} &\geq \min\{\mu_1(x_2), (\mu_2(y_2)\}\\ &\geq \mu_1 \times \mu_2(x_2, y_2)\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi (i), (ii) dan (iii) maka terbukti bahwa $\mu_1 \times \mu_2$ merupakan ideal *fuzzy* kiri (kanan) dari $R_1 \times R_2$. ■

Teorema 3.4 *Diberikan ring $R_1, R_2, \ldots dan\ R_n$. Jika $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ dan\ \mu_n$ berturut-turut adalah ideal fuzzy dari $R_1, R_2, \ldots dan\ R_n$, maka $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ adalah ideal fuzzy dari $R_1 \times R_2 \times \ldots R_n$.*

Bukti:

Untuk membuktikan $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ ideal *fuzzy* dari $R_1 \times R_2 \times \ldots R_n$ maka akan digunakan induksi matematika pada bilangan bulat positif $n \geq 2$.

(i) Untuk $n = 2$, maka menurut Teorema 3.3, $\mu_1 \times \mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari $R_1 \times R_2$.

(ii) Diasumsikan untuk $n = k$ adalah $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k$ ideal *fuzzy* dari ring $R_1 \times R_2 \times \ldots R_n$.

Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$, $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k \times \mu_{k+1}$ adalah ideal *fuzzy* dari $R_1 \times R_2 \times \ldots R_{k+1}$.

Misalkan $\beta = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_k$ dan $R' = R_1 \times R_2 \times \ldots R_k$.

Karena β adalah ideal *fuzzy* dari R' dan μ_{k+1} adalah ideal *fuzzy* dari R_{k+1} maka menurut Teorema 3.3 $\beta \times \mu_{k+1}$ adalah ideal *fuzzy* dari $R' \times R_{k+1}$.

Sehingga berdasarkan kondisi (i) dan (ii) dapat disimpulkan $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ adalah ideal *fuzzy* dari $R_1 \times R_2 \times \ldots R_n$. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka diperoleh :

1. Produk kartesian dari dua atau lebih subgrup *fuzzy* dari grup yang berbeda juga merupakan subgrup *fuzzy*.
2. Produk kartesian dari dua atau lebih ideal *fuzzy* dari ring yang berbeda juga merupakan ideal *fuzzy*.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdurrahman, Saman. 2015. Produk Kartesius dari Ideal Fuzzy Near-ring. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. Universitas Negeri Yogyakarta. 43 : 479-482.

[2] Clark, Pete L. 2011. *Commutative Algebra*. Department of Mathematics Georgia University.

[3] Dummit, David S. & Richard M. Foote. 2004. *Abstract Algebra*, 3rd ed. John Wiley and Sons, Inc., United States Of America.

[4] Ersoy, B.A. 2004. On The Generalization of Cartesian Product of Fuzzy Subgroups And Ideals. *Journal of Engineering and Natural Sciences*. Yildiz Technical University, Istanbul. 3 : 96-100.

[5] Frailegh, J.B.. 2003. *A first Course in Abstract Algebra*, 7nd ed. Addison–Wasley, Publishing Company, New York.

[6] Judson, Thomas W. 2009. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University, Texas.

[7] Malik, D. S. & Mordeson, John N. 1991. Fuzzy Relations on Rings and Groups. *Fuzzy Sets and Systems*. 43: 117-123.

[8] Rosenfeld, Azriel. 1971. Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. University of Maryland. 35 : 512-517.

[9] Zadeh L. A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*. 8 : 383-353.