Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.1 (Juni 2022) Hal. 83-92

# ANTI SUBSEMIRING FUZZY

**Saman Abdurrahman*, Cendikia Hira, Alya Hanifah Arif**

*Program Studi Matematika Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat*
*Jl. A Yani Km 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan*
**Email: saman@ulm.ac.id*

## ABSTRACT

*When the first operation's inverse axiom is deleted from the ring, an algebraic structure, the semiring, is generated. Subsemiring is one of the subjects covered in semiring. The concepts of fuzzy subsemiring, anti subsemiring fuzzy semiring, and complement are introduced in this paper. In addition, the anti-subsemiring fuzzy semiring, a wedge, or a combination of two or more fuzzy anti-subsemiring associated with a non-empty subset of the semiring whose membership criteria are defined by the membership value of the zero elements will be discussed.*

***Keywords***: *semiring, fuzzy anti-subsemiring, complement, membership*

## ABSTRAK

Apabila salah satu aksioma pada ring dihilangkan, yaitu aksioma invers pada operasi pertama, akan dihasilkan struktur aljabar yaitu semiring. Subsemiring adalah salah satu topik yang dikaji pada semiring. Pada tulisan ini, akan disajikan konsep dari subsemiring *fuzzy*, anti subsemiring *fuzzy* semiring dan komplemen. Lebih lanjut, akan dikaji karakteristik dari anti subsemiring *fuzzy*, irisan ataupun gabungan dari dua atau lebih anti subsemiring *fuzzy* dikaitkan dengan subset tidak kosong dari semiring yang syarat keanggotaanya ditentukan oleh nilai keanggotaan elemen nol.

**Kata kunci*:*** semiring, anti subsemiring *fuzzy*, komplemen, keangotaan

Received: 20 Mei 2022     Accepted: 29 Juni 2022     Published: 02 Juli 2022

## PENDAHULUAN

Semiring adalah salah satu struktur aljabar yang diperoleh dari ring dengan menghilangkan sifat invers pada operasi yang pertama. Sejalan dengan perkembangan zaman, penelitian semiring semakin banyak variasinya, baik pada struktur aljabarnya ataupun mengkombinasikan dengan disiplin ilmu lain, termasuk subset *fuzzy* yang dipelopori (Zadeh, 1965). Beberapa peneliti yang mengkombinasikan konsep semiring dan himpunan fuzzy adalah (Anitha, 2019; Saravanan & Sivakumar, 2011, 2012).

Pada penelitian (Anitha, 2019; Saravanan & Sivakumar, 2011, 2012), belum disinggung tentang gabungan ataupun irisan dari dua anti subsemiring *fuzzy* atau lebih yang dikaitkan dengan himpunan bagian dari suatu semiring.

Mengingat, pada penelitian sebelumnya belum dikaji gabungan ataupun irisan dari dua anti subsemiring *fuzzy* atau lebih yang dikaitkan dengan himpunan bagian dari suatu semiring. Pada penelitian ini, akan dikaji sifat dari irisan ataupun gabungan dari dua atau lebih anti subsemiring *fuzzy* dari suatu semiring yang dikaitkan dengan suatu himpunan bagiannya.

## TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini, disajikan topik penting yang akan dirujuk pada bagian berikutnya. Ahsan, Durcheva dan Golan (Ahsan et al., 2012a; Durcheva, 2020; Golan, 1999) mendefinisikan semiring $(\mathcal{S},+,\cdot)$, yaitu: $(\mathcal{S},+)$ adalah semigrup yang bersifat komutatif; $(\mathcal{S},\cdot)$ adalah semigrup, dan berlaku sifat distributive kiri maupun kanan.

Unsur identitas semiring $\mathcal{S}$ adalah $1_{\mathcal{S}}$, sedangkan unsur nolnya adalah $0_{\mathcal{S}}$, yaitu:

$$1_{\mathcal{S}} \cdot z = z \cdot 1_{\mathcal{S}} = z,\ 0_{\mathcal{S}} + z = z + 0_{\mathcal{S}} = z, \text{ dan } 0_{\mathcal{S}} \cdot z = z \cdot 0_{\mathcal{S}} = 0_{\mathcal{S}}$$

untuk semua $z \in \mathcal{S}$. Semiring $\mathcal{S}$ dikatakan kumutatif jika $w \cdot z = z \cdot w$ untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$. Berikutnya, yang dimaksud semiring pada tulisan ini merupakan semiring yang memuat unsur nol.

Durcheva dan Golan (Durcheva, 2020; Golan, 2003), menyatakan bahwa $\mathcal{B}$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{S}$, jika dan hanya jika untuk semua $z, c \in \mathcal{B}$, berlaku: $z + c \in \mathcal{B}$ dan $z \cdot c \in \mathcal{B}$.

Lebih lanjut, menurut (Biswas, 1990; Budimirović et al., 2014; Lin et al., 2018) subset *fuzzy* $\xi$ dari $\mathcal{S}$ adalah suatu pemetaan $\xi$ dari $\mathcal{S}$ ke interval tutup $[0,1]$. Menurut (Ahsan et al., 2012b), Suatu subset *fuzzy* $\xi$ dari semiring $\mathcal{S}$ merupakan subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$ jika dan hanya jika untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$:

$$\xi(z + w) \geq \xi(z) \wedge \xi(w) \text{ dan } \xi(z \cdot w) \geq \xi(z) \wedge \xi(w).$$

Untuk definisi anti subsemiring *fuzzy* dari semiring $\mathcal{S}$, kami merujuk pada penelitian (Anitha, 2019; Saravanan & Sivakumar, 2011, 2012), yaitu: Subset *fuzzy* $\xi$ dari $\mathcal{S}$ merupakan anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$ jika untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$:

$$\xi(z + w) \leq \xi(z) \vee \xi(w) \text{ dan } \xi(z \cdot w) \leq \xi(z) \vee \xi(w).$$

Berikut disajikan definisi konplemen dari subset *fuzzy* $\xi$ dari $\mathcal{S}$, yang dibangun dari penelitian (Biswas, 1990).

**Definisi 2.1.** *Misalkan $\xi$ merupakan subset fuzzy dari semiring $\mathcal{S}$. Komplemen dari $\xi$, dinotasikan dengan $\xi^c$, yaitu:*

$$\xi^c(z) \leq 1 - \xi(z)$$

*untuk setiap $z \in \mathcal{S}$.*

## METODE PENELITIAN

Untuk menguak karateristik anti subsemiring *fuzzy* dari suatu semiring, kami menginduksi sifat – sifat dari penelitian (Abdurrahman, 2012, 2020a, 2020b, 2021; Anitha, 2019; Biswas, 1990; Saravanan & Sivakumar, 2011, 2012). Mengingat semiring terhadap operasi pertama tidak mempunyai invers, terdapat sifat – sifat yang terbentuk kevalidannya tidak terbukti. Oleh karena itu, agar sifat yang terbentuk bisa dibuktikan kevalidannya, kami memberikan syarat tambahan ataupun mengkontruksi sifat yang dapat menutupi sifat invers yang dihilangkan, dengan melihat karakteristik dari nilai keanggotaan elemen $0_{\mathcal{S}}$ yang dibandingkan dengan elemen lainnya dari $\mathcal{S}$.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada awal pembahasan, kami sajikan sifat – sifat yang menyatakan keterkaitan antara subsemiring *fuzzy* (*sf*) dan anti subsemiring *fuzzy (anti-sf)* dari suatu subsemiring $\mathcal{S}$.

**Teorema 4.1** *Jika $\xi$ merupakan anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\xi^c$ merupakan sf dari $\mathcal{S}$*

**Bukti:**

Mengingat $\xi$ merupakan anti-*sf* dari $\mathcal{S}$, berarti untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &= 1 - \xi(z+w) \\ &\geq 1 - \big(\xi(z) \vee \xi(w)\big) \\ &= \big(1 - \xi(z)\big) \wedge \big(1 - \xi(w)\big) \\ &= \xi^c(z) \wedge \xi^c(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z \cdot w) &= 1 - \xi(z+w) \\ &\geq 1 - \big(\xi(z) \vee \xi(w)\big) \\ &= \big(1 - \xi(z)\big) \wedge \big(1 - \xi(w)\big) \\ &= \xi^c(z) \wedge \xi^c(w). \end{aligned}$$

Jadi, $\xi^c$ merupakan subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$. ■

**Teorema 4.2** *Jika $\xi$ merupakan sf dari $\mathcal{S}$, maka $\xi^c$ merupakan anti-sf dari $\mathcal{S}$.*

**Bukti:**
Mengingat $\xi$ adalah *sf* dari $\mathcal{S}$, berarti untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &= 1-\xi(z+w) \\ &\le 1-\big(\xi(z)\wedge\xi(w)\big) \\ &= \big(1-\xi(z)\big)\vee\big(1-(w)\big) \\ &= \xi^c(z)\vee\xi^c(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z\cdot w) &= 1-\xi(z+w) \\ &\le 1-\big(\xi(z)\wedge\xi(w)\big) \\ &= \big(1-\xi(z)\big)\vee\big(1-(w)\big) \\ &= \xi^c(z)\vee\xi^c(w). \end{aligned}$$

Jadi, $\xi^c$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$. ∎

**Akibat 4.3** *Suatu sf $\xi$ dari semiring $\mathcal{S}$ adalah anti-sf fuzzy dari $\mathcal{S}$ jika dan hanya $\xi^c$ adalah sf dari $\mathcal{S}$.*

Kondisi Akibat 4.3, mengisyaratkan bahwa $\xi = (\xi^c)^c$. Akibatnya, status $\xi$ merupakan anti-*sf* dari semiring $\mathcal{S}$ menetukan terbentunya konplemen $\xi$ merupakan *sf* dari semiring $\mathcal{S}$, juga sebaliknya.

Berikut ini, kami sajikan karakterisasi nilai keanggotaan elemen $0_{\mathcal{S}}$ pada semiring $\mathcal{S}$, dan sifat himpunan bagian dari $\mathcal{S}$ yang berkaitan dengan nilai keanggotaan $0_{\mathcal{S}}$, di bawah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$ merupakan subsemiring dari $\mathcal{S}$.

**Teorema 4.4** *Misalkan $\mathcal{S}$ adalah semiring. Jika $\xi$ adalah anti subsemiring fuzzy dari $\mathcal{S}$ dan $\xi(0_{\mathcal{S}}) \le \xi(d)$ untuk setiap $d \in \mathcal{S}$, maka*

$$\xi^c(0_{\mathcal{S}}) \ge \xi^c(d)$$

*dan*

$$\mathcal{S}_{\xi^c} = \{d \in \mathcal{S} \mid \xi^c(0_{\mathcal{S}}) = \xi^c(d)\} \text{ adalah subsemiring dari } \mathcal{S}.$$

**Bukti:**
Mengingat, $\xi(0_{\mathcal{S}}) \le \xi(d)$ untuk setiap $d \in \mathcal{S}$, berarti:

$$\xi^c(d) = 1-\xi(d) \le 1-\xi(0_{\mathcal{S}}) = \xi^c(0_{\mathcal{S}}).$$

Selanjutnya, berdasarkan sifat keanggotaan $\mathcal{S}_{\xi^c} = \{d \in \mathcal{S} \mid \xi^c(0_{\mathcal{S}}) = \xi^c(d)\}$, dipenuhi kondisi $\mathcal{S}_{\xi^c} \subseteq \mathcal{S}$. Karena $\xi^c(0_{\mathcal{S}}) = \xi^c(0_{\mathcal{S}})$, berarti $0_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{\xi^c}$. Dengan kata lain, $\mathcal{S}_{\xi^c} \neq \emptyset$.

Dengan demikian, $\forall z, w \in \mathcal{S}_{\xi}$:

$\xi^c(z+w) = 1-\xi(z+w)$

$$\begin{aligned}
&\geq 1-\big(\xi(z)\vee\xi(w)\big)\\
&\geq \big(1-\xi(z)\big)\wedge\big(1-\xi(w)\big)\\
&= \xi^c(z)\wedge\xi^c(w)\\
&= \xi^c(0_{\mathcal{S}})\wedge\xi^c(0_{\mathcal{S}})\\
&= \xi^c(0_{\mathcal{S}})
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\xi^c(z\cdot w) &= 1-\xi(z\cdot w)\\
&\geq 1-\big(\xi(z)\vee\xi(w)\big)\\
&\geq \big(1-\xi(z)\big)\wedge\big(1-\xi(w)\big)\\
&= \xi^c(z)\wedge\xi^c(w)\\
&= \xi^c(0_{\mathcal{S}})\wedge\xi^c(0_{\mathcal{S}})\\
&= \xi^c(0_{\mathcal{S}}).
\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$z+w\in\mathcal{S}_{\xi^c} \text{ dan } z\cdot w\in\mathcal{S}_{\xi^c}.$$

Jadi, $\mathcal{S}_{\xi^c}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$. ■

Selanjutnya pada tulisan ini, setiap anti subsemiring *fuzzy* $\xi$ dari semiring $\mathcal{S}$ memenuhi kondisi $\xi(0_{\mathcal{S}})\leq\xi(d)$ untuk setiap $d\in\mathcal{S}$.

**Teorema 4.5** *Diberikan $\zeta$ dan $\xi$ adalah anti subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{S}$. Jika $\xi\subseteq\zeta$ dan $\zeta(0_{\mathcal{S}})=\xi(0_{\mathcal{S}})$, maka $\mathcal{S}_{\zeta^c}\subseteq\mathcal{S}_{\xi^c}$.*

**Bukti:**

Diambil sebarang $a\in\mathcal{S}_{\zeta^c}$, berarti

$$\zeta^c(a)=\zeta^c(0_{\mathcal{S}}).$$

Oleh karena itu,

$$\zeta(a)=\zeta(0_{\mathcal{S}})=\xi(0_{\mathcal{S}}).$$

Mengingat, $\xi\subseteq\zeta$ dan $\zeta$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$, maka

$$\xi(a)\leq\zeta(a)=\xi(0_{\mathcal{S}}).$$

Akibatnya, $\xi(a)=\xi(0_{\mathcal{S}})$. Oleh sebab itu, $\xi^c(a)=\xi^c(0_{\mathcal{S}})$, yaitu $a\in\mathcal{S}_{\xi^c}$.

Jadi, $\mathcal{S}_{\zeta^c}\subseteq\mathcal{S}_{\xi^c}$. ■

Sebarang semiring $\mathcal{S}$ selalu mempunyai subsemiring, yaitu: $\mathcal{S}$ dan $\{0_{\mathcal{S}}\}$. Fakta ini, apabila dihubungkan dengan kondisi Teorema 4.4, akan selalu terdapat suatu subsemiring $\mathcal{R}$ dari $\mathcal{S}$ yang memenuhi kondisi $\mathcal{R}=\mathcal{S}_{\xi^c}$.

**Teorema 4.6** *Misalkan $\mathcal{R}(\neq\emptyset)$ merupakan subset dari semiring $\mathcal{S}$. Jika $\xi:\mathcal{S}\longrightarrow[0,1]$,*

$$\xi(z)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}p, & d\in\mathcal{R}\\ s, & d\notin\mathcal{R}\end{cases}$$

*untuk semua* $z \in \mathcal{S}$ *dan* $0 \leq s < p \leq 1$, *maka* $\mathcal{R}$ *adalah subsemiring dari* $\mathcal{S}$ *jika dan hanya jika* $\xi^c$ *adalah anti-sf dari* $\mathcal{S}$ *dan* $\mathcal{S}_{\xi^c} = \mathcal{R}$.

**Bukti:**
(⇒) Andaikan $\xi$ merupakan subset *fuzzy* dari $\mathcal{S}$, dan $\mathcal{R}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$. Untuk menunjukkan $\xi$ adalah anti-*sf* dari $\mathcal{S}$, tanpa mengurangi keumuman, akan kami selidiki tiga kasus untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$, yaitu:

(1) Jika $z, w \notin \mathcal{R}$, maka $\xi(z+w) \geq s$ dan $\xi(z \cdot w) \geq s$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &= 1 - \xi(z+w) \\ &\leq 1 - s \\ &= (1-s) \vee (1-s) \\ &= \xi^c(z) \vee \xi^c(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z \cdot w) &= 1 - \xi(z \cdot w) \\ &\leq 1 - s \\ &= (1-s) \vee (1-s) \\ &= \xi^c(z) \vee \xi^c(w). \end{aligned}$$

(2) Jika $z \in \mathcal{R}$ dan $w \notin \mathcal{R}$, maka $\xi(z+w) \geq s$ dan $\xi(z \cdot w) \geq s$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &= 1 - \xi(z+w) \\ &\leq 1 - s \\ &= (1-p) \vee (1-s) \\ &= \xi^c(z) \vee \xi^c(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z \cdot w) &= 1 - \xi(z \cdot w) \\ &\leq 1 - s \\ &= (1-p) \vee (1-s) \\ &= \xi^c(z) \vee \xi^c(w). \end{aligned}$$

(3) Jika $z \in \mathcal{R}$ dan $w \in \mathcal{R}$, maka $\xi(z+w) = p$ dan $\xi(z \cdot w) = p$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &= 1 - \xi(z+w) \\ &= 1 - p \\ &= (1-p) \vee (1-p) \\ &= \xi^c(z) \vee \xi^c(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z \cdot w) &= 1 - \xi(z \cdot w) \\ &= 1 - p \\ &= (1-p) \vee (1-p) \end{aligned}$$

$$= \xi^c(z) \vee \xi^c(w).$$

Jadi, untuk setiap $z, w \in \mathcal{S}$, dipenuhi kondisi:

$$\xi^c(z+w) \geq \xi^c(z) \vee \xi^c(w) \text{ dan } \xi^c(z \cdot w) \geq \xi^c(z) \vee \xi^c(w).$$

Jadi, $\xi^c$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$.

Selanjutnya, mengingat $\mathcal{R}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$, berarti $0_{\mathcal{S}} \in \mathcal{R}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\xi^c} &= \{z \in \mathcal{S} \mid \xi^c(z) = \xi^c(0_{\mathcal{S}})\} \\ &= \{z \in \mathcal{S} \mid \xi(z) = \xi(0_{\mathcal{S}})\} \\ &= \{z \in \mathcal{S} \mid \xi(z) = p\} \\ &= \{z \in \mathcal{S} \mid z \in \mathcal{R}\} \\ &= \mathcal{R}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Misalkan $\xi^c$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{S}_{\xi^c} = \mathcal{R}$. Berarti, $\xi^c(d) \geq \xi^c(0_{\mathcal{S}})$ untuk setiap $d \in \mathcal{S}$. Mengingat $\mathcal{S}_{\xi^c} = \mathcal{R}$, berdasarkan sifat keanggotaan $\mathcal{S}_{\xi^c}$, dipenuhi kondisi $\mathcal{S}_{\xi^c} \subseteq \mathcal{S}$ dan $0_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{\xi^c}$, yaitu: $\mathcal{S}_{\xi^c} \neq \emptyset$. Akibatnya, untuk semua $z, w \in \mathcal{S}_{\xi^c}$:

$$\begin{aligned} \xi^c(z+w) &\leq \xi(z) \vee \xi(w) \\ &= \xi^c(0_{\mathcal{S}}) \vee \xi^c(0_{\mathcal{S}}) \\ &= \xi^c(0_{\mathcal{S}}) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \xi^c(z \cdot w) &\leq \xi(z) \vee \xi(w) \\ &= \xi^c(0_{\mathcal{S}}) \vee \xi^c(0_{\mathcal{S}}) \\ &= \xi^c(0_{\mathcal{S}}). \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$z + w \in \mathcal{S}_{\xi^c} \text{ dan } z \cdot w \in \mathcal{S}_{\xi^c}.$$

Jadi, $\mathcal{S}_{\xi^c}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$. ■

Berdasarkan kondisi pada Teorema 4.6: $0 \leq s < p \leq 1$, konsekuwensinya berlaku untuk fungsi karakteristik dari suatu subset tidak kosong $\mathcal{R}$ dari semiring $\mathcal{S}$. Juga, kondisi $\xi^c$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$ mengakibatkan $\mathcal{S}_{\xi^c}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$. Memunculkan beberapa sifat berikut ini.

**Akibat 4.7.** *Fungsi karakteristik $\chi_{\mathcal{R}}$ dari suatu subset tidak kosong $\mathcal{R}$ dari semiring $\mathcal{S}$ adalah anti-sf dari $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{S}_{\chi_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$ jika dan hanya jika $\mathcal{R}$ merupakan subsemiring dari $\mathcal{S}$.*

**Akibat 4.8.** *Jika $\xi^c$ adalah anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\mathcal{S}_{\xi^c}$ merupakan subsemiring dari $\mathcal{S}$.*

Misalkan $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{B}$ merupakan subsemiring dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\mathcal{V} \cap \mathcal{B}$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{S}$. Kondisi ini, memotivasi terbentuknya teorema berikut ini.

**Teorema 4.9.** *Jika $\zeta$ dan $\xi$ adalah anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\zeta \cup \xi$ adalah anti-sf dari $\mathcal{S}$ dan $\zeta^c \cap \xi^c$ adalah sf dari $\mathcal{S}$.*

**Bukti:**

Misalkan $\zeta$ dan $\xi$ adalah anti-*sf* dari semiring $\mathcal{S}$. Oleh karena itu, untuk semua $z, w \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \zeta \cup \xi(z+w) &= \zeta(z+w) \vee \xi(z+w) \\ &\leq [\zeta(z) \vee \zeta(w)] \vee [\xi(z) \vee \xi(w)] \\ &= [\zeta(z) \vee \xi(z)] \vee [\zeta(w) \vee \xi(w)] \\ &= \zeta \cup \xi(z) \vee \zeta \cup \xi(w) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \zeta \cup \xi(z \cdot w) &= \zeta(z \cdot w) \vee \xi(z \cdot w) \\ &\leq [\zeta(z) \vee \zeta(w)] \vee [\xi(z) \vee \xi(w)] \\ &= [\zeta(z) \vee \xi(w)] \vee [\zeta(z) \vee \xi(w)] \\ &= \zeta \cup \xi(z) \vee \zeta \cup \xi(w) \end{aligned}$$

Berarti, $\zeta \cup \xi$ adalah anti-*sf* dari $\mathcal{S}$. Akibatnya berdasarkan Teorema 4.1: , $(\zeta \cup \xi)^c$ adalah subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$. Di pihak lain,

$$\begin{aligned} (\zeta \cup \xi)^c(z) &= 1 - \zeta \cup \xi(z) \\ &= 1 - [\zeta(z) \vee \xi(z)] \\ &= \big(1 - \zeta(z)\big) \wedge \big(1 - \xi(z)\big) \\ &= \zeta^c(z) \wedge \xi^c(z) \\ &= \zeta^c \cap \xi^c(z) \end{aligned}$$

Jadi, $\zeta^c \cap \xi^c$ adalah subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$. ■

Mengingat, sifat operasi $\cup$ dan $\cap$ pada subset *fuzzy*, analog dengan sifat operasi $\cup$ dan $\cap$ pada teori himpunan. Berarti berlaku untuk $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ subset *fuzzy* di semiring $\mathcal{S}$.

**Teorema 4.10.** *Jika $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$, dan $\zeta_n$ adalah anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup \zeta_n$ adalah anti-sf dari $\mathcal{S}$ dan $\zeta_1^c \cap \zeta_2^c \cap \cdots \cap \zeta_n^c$ adalah sf dari $\mathcal{S}$.*

Berdasarkan kondisi Teorema 4.9, Akibat 4.8, dan Teorema 4.10 diperoleh akibat berikut ini.

**Akibat 4.11.** *Jika $\zeta^c$ dan $\xi^c$ adalah anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka $\mathcal{S}_{\zeta^c \cup \xi^c}$ merupakan subsemiring dari $\mathcal{S}$.*

**Akibat 4.12.** *Jika $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$, dan $\zeta_n$ adalah anti-sf dari semiring $\mathcal{S}$, maka, $\mathcal{S}_{\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup \zeta_n}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$.*

## KESIMPULAN

Kondisi $\zeta$ adalah anti-*sf* dari suatu semiring $\mathcal{S}$, menentukan terbentuknya subsemiring $\mathcal{S}_\zeta$ dari $\mathcal{S}$. Kondisi ini, berlaku untuk dua atau lebih anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$, yaitu: kondisi $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$, dan $\zeta_n$ adalah anti subsemiring *fuzzy* dari $\mathcal{S}$, menentukan terbentuknya $\mathcal{S}_{\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup \zeta_n}$ adalah subsemiring dari $\mathcal{S}$.

## REFERENSI

Abdurrahman, S. (2012). Ideal Fuzzy Near-Ring. *Jurnal Epsilon*, *6*(2), 13–19. http://ppjp.ulm.ac.id/index.php/epsilon/article/view/83/68

Abdurrahman, S. (2020a). Karakteristik subsemiring fuzzy. *Jurnal Fourier*, *9*(1), 19–23. https://doi.org/10.14421/fourier.2020.91.19-23

Abdurrahman, S. (2020b). ω – fuzzy subsemiring.pdf. *Jurnal Matematika, Sains, Dan Teknologi*, *21*(1), 1–10. https://doi.org/https://doi.org/10.33830/jmst.v21i1.673.2020

Abdurrahman, S. (2021). Interior ideal fuzzy semiring. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, *15*(2), 116–123. https://doi.org/ttps://doi.org/10.20527/epsilon.v15i2.4894

Ahsan, J., Mordeson, J. N., & Shabir, M. (2012a). Fundamental Concepts. In *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory* (pp. 3–13). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27641-5_1

Ahsan, J., Mordeson, J. N., & Shabir, M. (2012b). Fuzzy Ideals of Semirings. In *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory* (pp. 15–29). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27641-5_2

Anitha, B. (2019). On the anti fuzzy subsemirings under t-norms. *Malaya Journal of Matematik*, *7*(2), 295–297. https://doi.org/10.26637/mjm0702/0022

Biswas, R. (1990). Fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, *35*(1), 121–124. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90025-2

Budimirović, B., Budimirović, V., Šešelja, B., & Tepavčević, A. (2014). Fuzzy identities with application to fuzzy semigroups. *Information Sciences*, *266*, 148–159. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.11.007

Durcheva, M. (2020). *Semirings as Building Blocks In Cryptography*. Cambridge Scholars Publishing.

Golan, J. S. (1999). Hemirings and Semirings: Definitions and Examples. In *Semirings and their Applications* (pp. 1–18). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5_1

Golan, J. S. (2003). Semirings. In *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications* (pp. 1–26). Kluwer Academic Publishers.

Lin, H.-R., Cao, B.-Y., & Liao, Y. (2018). Fuzzy Sets Theory Preliminary. In *Fuzzy Sets Theory Preliminary*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70749-5

Saravanan, V., & Sivakumar, D. (2011). A Study on Anti - Fuzzy Subsemiring of a Semiring. *International Journal of Computer Applications*, *35*(5), 44–47. https://doi.org/10.11648/j.ajam.20150304.14

Saravanan, V., & Sivakumar, D. (2012). A Study on anti - Fuzzy Normal Subsemiring of a Semiring. *International Mathematical Forum*, *7*(53), 2623–2631. https://doi.org/10.11648/j.ajam.20150304.14

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X