Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol.5 No.2 Desember 2011: 1 - 12

PENERAPAN PROGRAM LINIER PADA PERMAINAN NON-KOOPERATIF

Pardi Affandi

Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru
Email: pardi_affandi@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini akan mengkaji tentang penerapan program linier pada permainan non-kooperatif. Dimulai dengan penerapan program linear pada permainan dari sudut pandang pemain I. Dengan cara yang sama permasalahan pemain II dapat dibawa ke dalam bentuk program linear. Persamaan yang diperoleh adalah bentuk dual program, hasil yang sama akan diperoleh yakni hasil maksimum yang didapat pemain I sama dengan hasil minimum yang dicari pemain II terhadap pemain I. Selanjutnya permainan akan diselesaikan dengan metode pivot, sehingga diperoleh strategi dan hasil dari permainan.

Kata Kunci: *Permainan non-kooperatif, program linier, pivot.*

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai suatu permasalahan yang melibatkan banyak orang, daerah, perusahaan, kota, propinsi, negara dan lainnya. Pemasalahan yang terjadi bersifat persaingan atau konflik untuk memperoleh kemenangan dalam persaingan yang terjadi. Hal ini banyak dijumpai dalam permainan, monopoli, perdagangan, politik dan peperangan terdapat persaingan ataupun konflik. Seseorang atau kelompok yang masuk kedalam suatu persaingan atau konflik akan berusaha sekuat tenaga untuk dapat memenangkan persaingan atau konflik tersebut. Tentunya untuk memperoleh kemenangan tiap orang atau kelompok akan berusaha mencari strategi-strategi yang terbaik .

Misalkan terdapat dua perusahaan kecil yang bergerak dibidang yang sama saling bersaing untuk memperoleh pasar yang lebih luas sehingga memperoleh keuntungan yang lebih besar. Berbagai strategi akan digunakan untuk memenangkan persaingan sehingga setiap perusahaan akan berusaha mencari strategi yang terbaik untuk perusahaannya. Jika kedua perusahaan tersebut bekerja sendiri-sendiri atau tanpa kerja sama, maka dalam teori permainan persaingan ini termasuk kedalam bentuk permainan non kooperatif.

Tidak lama kemudian muncul perusahaan besar yang bergerak dibidang yang sama dengan kedua perusahaan kecil tersebut dan mengancam pasar mereka. Karena merasa terancam kedua perusahaan kecil tersebut bergabung dan saling bekerja sama untuk dapat memperoleh keuntungan yang lebih baik dibandingkan mereka bekerja sendiri-sendiri, sehingga terjadi persaingan antara perusahaan besar dengan gabungan dua perusahaan kecil.

Dari contoh tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa dalam suatu persaingan atau konflik lebih dari satu orang atau kelompok dapat dibentuk kelompok baru yang memuat lebih dari satu orang atau kolompok untuk memperoleh hasil yang lebih baik. Dalam Teori Permainan bentuk persaingan ini termasuk ke dalam bentuk permainan n-pihak kooperatif.

Konflik-konflik yang terjadi dapat dimodelkan ke dalam bahasa matematika. Model matematika yang telah dibentuk selanjutnya akan dianalisa dan dicari penyelesaian optimalnya dan pihak-pihak yang terkait langsung dalam konflik dinamakan "pemain" sehingga untuk selanjutnya konflik dapat dianggap sebagai "permainan". Dari jumlah pemain, permainan dapat dibagi menjadi permainan dua pihak dan permainan n-pihak.

Permainan yang dimainkan oleh n-pemain dengan n lebih dari satu dapat terjadi kerja sama antar pemainnya, permainan seperti ini disebut *permainan n-pihak kooperatif* dan suatu kerja sama yang terjadi antara para pemain disebut *koalisi*. Ada beberapa cara untuk dapat menyelesaiakan permainan n-pihak kooperatif, salah satunya dengan metode pivot.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Program Linear

Program linear didefinisikan sebagai permasalahan dalam memilih variable riil yang memaksimalkan atau meminimalkan fungsi fungsi sasaran dengan batasan–batasan linear pada variabel–variabelnya. Batasan tersebut bisa merupakan persamaan ataupun pertidaksamaan. Fungsi yang memaksimumkan dan meminimumkan disebut sebagai *objective function***.** Vektor x untuk standar permasalahan maksimum atau vektor y untuk standar permasalahan minimum disebut layak jika memenuhi batasan-batasan yang bersesuaian. Kumpulan atau himpunan dari vektor-vektor yang layak disebut himpunan *penyelesaian* dan jika himpunan penyelesaian kosong maka program linear tidak layak, dan sebaliknya.

Sebuah permasalahan maksimum (minimum) yang layak menjadi *tidak terbatas* jika fungsi sasarannya bernilai positif (negatif) tak berhingga besarnya, dan sebaliknya dikatakan *terbatas*. Sebuah vektor layak yang menyebabkan fungsi sasaran maksimum/minimum disebut sebagai *penyelesaian optimal*. dan nilai yang dihasilkan terhadap fungsi sasaran disebut sebagai *nilai optimal*.

Diberikan $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots b_m)^T$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ dan matrik

$$A_{\mathrm{m\,x\,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Permasalahan Maksimum Standar program linear adalah mencari vektor $\boldsymbol{x}= (x_1, \ldots, x_n)^T$ yang memaksimumkan

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

dan memenuhi batasan-batasan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \qquad (\text{atau } \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b})$$

dan

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (\text{ atau } \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}).$$

Permasalahan Minimum Standar program linear mencari vektor $\boldsymbol{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$ yang meminimumkan

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m$$

dan memenuhi batasan-batasan

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \cdots + y_ma_{m1} &\ge c_1 \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \cdots + y_ma_{m2} &\ge c_2 \\ &\vdots \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \cdots + y_ma_{mn} &\ge c_n \end{aligned} \qquad (\text{atau } \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}^T)$$

dan

$$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0 \qquad (\text{ atau } \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}).$$

2.2 Pivot

Diberikan n fungsi linear dan m variabel dalam persamaan

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{s}^T \tag{2.1}$$

dengan

$$\boldsymbol{y}^T = (y_1, \ldots, y_m), \; \boldsymbol{s}^T = (s_1, \ldots, s_n)$$

dan matrik

$$A_{\text{m x n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 a_{11} & + & \cdots & + & y_i a_{i1} & + & \cdots & + & y_m a_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1 a_{1j} & + & \cdots & + & y_i a_{ij} & + & \cdots & + & y_m a_{mj} & = & s_j \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1 a_{1n} & + & \cdots & + & y_i a_{in} & + & \cdots & + & y_m a_{mn} & = & s_n \end{array} \qquad (2.2)$$

dengan $s_1, ..., s_n$ variabel tak bebas dan $y_1, ..., y_m$ variabel bebas.

Diambil satu dari variabel tak bebas s_j dan ditukarkan dengan salah satu variabel bebas y_i sehingga

$$\boldsymbol{y}^T = (y_1, \ldots, y_m) \text{ menjadi } \boldsymbol{y}^T = (y_1, \ldots, y_{i-1}, s_j, y_{i+1}, \ldots, y_m)$$

dan

$$\boldsymbol{s}^T = (s_1, \ldots, s_n) \text{ menjadi } \boldsymbol{s}^T = (s_1, \ldots, s_{j-1}, y_i, s_{j+1}, \ldots, s_n).$$

Hal ini dapat dilakukan jika hanya jika $a_{ij} \neq 0$ karena jika $a_{ij} = 0$ maka

$$y_i = \frac{1}{a_{ij}}(-y_1 a_{1j} - \ldots - y_{i-1} a_{(i-1)j} + s_j - y_{i+1} a_{(i+1)j} - \ldots - y_m a_{mj}) \qquad (2.3)$$

akan menjadi tak terdefinisi/tak terhingga.

Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan lainnya misal pada persamaan ke-k, maka persamaan ke-k menjadi

$$y_1\left(a_{1k} - \frac{a_{ik}a_{1j}}{a_{ij}}\right) + \ldots + s_j\left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right) + \ldots + y_m\left(a_{mk} - \frac{a_{ik}a_{mj}}{a_{ij}}\right) = s_k . \qquad (2.4)$$

Pada kolom ke-i y_i berubah menjadi s_j begitu pula pada baris ke-j s_j diganti dengan y_i sehingga persamaan (2.2) menjadi

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 \hat{a}_{11} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{i1} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1j} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{ij} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{mj} & = & y_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1n} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{in} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{mn} & = & s_n \end{array} \qquad (2.5)$$

dengan

$$\hat{a}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}},$$

$$\hat{a}_{hj} = -\frac{a_{hj}}{a_{ij}} \qquad \text{untuk } h \neq i,$$

$$\hat{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \qquad \text{untuk } k \neq j,$$

$$\hat{a}_{hk} = a_{hk} - \frac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}} \qquad \text{untuk } h \neq i \text{ dan } k \neq j.$$

Diperoleh bentuk rumusan dari pivot

dengan p sebagai $\begin{array}{|cc|} \boxed{p} & r \\ c & q \end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|} 1/p & r/p \\ -c/p & q-(rc/p) \end{array}$ pivot.

Persamaan (2.2) dibawa ke dalam tabel 2.1.a. dan pada tabel tersebut y_i akan bertukar tempat dengan s_j dengan poros a_{ij} (dilingkari sebagai pivot), diperoleh persamaan (2.5) dibawa ke dalam tabel 2.1.b.

Tabel 2.1.

$$\begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & s_j & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & y_i & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1j} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_j & \hat{a}_{i1} & \cdots & \hat{a}_{ij} & \cdots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mj} & \cdots & \hat{a}_{mn} \\ \hline \end{array}.$$

(a) (b)

2.3. Teori Permainan.

Strategi murni adalah strategi dengan setiap pemainnya hanya memiliki satu langkah terbaik untuk dirinya. Pemain pertama (dinotasikan PI) akan berusaha memaksimumkan perolehannya dengan cara memilih perolehan minimumnya dari setiap strategi murni yang dimiliki dan dipilih yang maksimum, strategi PI termasuk dalam kriteria maksimin,

$$\underset{i}{\text{mak}}\ \underset{j}{\text{min}}\,(e_{ij}).$$

Pada waktu yang sama pemain kedua (dinotasikan PII) akan berusaha memperkecil kerugiannya dengan cara memilih perolehannya yang maksimum dari setiap strategi murni yang dimiliki dan dipilih yang minimum, strategi PII termasuk dalam kriteria minimaks,

$$\underset{j}{\text{min}}\ \underset{i}{\text{mak}}\,(e_{ij}).$$

Jika nilai maksimin dan nilai minimaks sama,

$$\underset{i}{\text{mak}}\ \underset{j}{\text{min}}\,(e_{ij}) = \underset{j}{\text{min}}\ \underset{i}{\text{mak}}\,(e_{ij}),$$

maka permainan ini mempunyai titik kesetimbangan (equilibrium point) dan dapat diselesaikan dengan strategi murni. Tidak semua permainan dapat diselesaikan dengan strategi murni. Jika permainan tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni, maka dapat digunakan strategi campuran.

2.4. Permainan n-Pihak Kooperatif.

Untuk permainan n-pihak dapat terjadi kerja sama antar pemain tetapi tidak dengan semua pemain. Suatu kerja sama yang terjadi antara para pemain disebut *koalisi*. Para pemain yang bergabung dalam suatu koalisi bertindak bersama-sama (kompak) melakukan tindakan dengan strategi yang sama yang memaksimalkan perolehan setiap pemain dalam koalisi.

Bagian penting dalam permainan ini adalah jika seorang pemain memilih suatu koalisi dan yang kedua adalah bagaimana cara untuk membagikan perolehan koalisi tersebut kepada para anggotanya. Untuk yang pertama akan dikaji terlebih dulu ke koalisi mana seorang pemain akan bekerja sama.

Misalkan ada n-pemain (n $\geq$ 2) yang bermain dalam suatu permainan dengan masing-masing pemain diberi indeks 1, 2, . . ., n. Sebuah koalisi S merupakan himpunan bagian dari $S \subset N$, dengan N= (1, 2, . . ., n) dan 2^N adalah himpunan semua koalisi yang mungkin, sehingga ϕ dan N juga merupakan koalisi, disebut sebagai *empty koalition* dan *grand coalition.*

Jika hanya ada 2 orang pemain, n = 2, maka ada 4 koalisi yang mungkin terjadi, yaitu {ϕ, {1}, {2}, N}. Jika ada 3 pemain, n = 3, maka ada 8 koalisi yang mungkin terjadi, yaitu {ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, N}. Sehingga jika ada n-pemain maka banyaknya koalisi yang mungkin ada 2^n koalisi.

Jika suatu koalisi S adalah himpunan bagian N, maka terdapat himpunan bagian N yang tidak tergabung dalam koalisi S, namakan koalisi N-S. Koalisi S dan N-S saling berusaha memaksimalkan perolehan masing-masing sehingga kelompok/koalisi S dan N-S seperti permainan dua pihak non kooperatif dan dapat dicari perolehan maksimum dari S dan N-S.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Penerapan Program Linear Pada Pemain I

Pertama akan dibahas penerapan program linear pada permainan dari sudut pandang pemain I.. Pemain I akan memilih $p_1, \ldots, p_m$ yang akan

$$\text{mak} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1} p_i a_{ij} \tag{3.1}$$

dengan batasan-batasan

$$p_1 + \ldots + p_m = 1 \tag{3.2}$$

dan

$$p_i \geq 0 \quad \text{untuk } i = 1, \ldots, \text{m}.$$

Meskipun batasan – batasan merupakan persamaan linear tetapi fungsi sasaran bukanlah fungsi linear dari p (karena minimum operator), jadi bentuk ini bukanlah permasalahan program linear. Namun permasalahan tersebut dapat dibawa kedalam bentuk permasalahan program linear. Dengan menambahkan variabel baru v pada daftar variabel pemain I, dengan

$$v \leq \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

maka

$$v \leq \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \qquad \text{untuk setiap } j = 1, ..., \text{n}$$

dan memaksimalkan

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$

sama saja dengan memaksimalkan v. Sehingga permasalahan program linear di atas menjadi :

mencari v dan $p_1, \ldots, p_m$ yang akan memaksimalkan v (3.3)

dengan batasan

$$\begin{aligned} v &\leq \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i1} \\ &\vdots \\ v &\leq \sum_{i=1}^{m} p_i a_{in} \\ p_1 + \ldots + p_m &= 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dan

$$p_i \geq 0 \quad \text{untuk } i = 1, \ldots, \text{m}.$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.4) diberikan $v > 0$ dan $y_i = p_i / v$ dan $p_1 + \ldots + p_m = 1$ sehingga $\sum_{i=1}^{m} y_i = 1/v$. Memaksimalkan v ekuivalen dengan meminimalkan $\sum_{i=1}^{m} y_i = 1/v$, maka masalah persamaan (3.3) dan (3.4) menjadi:

meminimalkan $y_1 + \ldots + y_m$ (3.5)

dengan batasan

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{i=1}^{m} y_i a_{i1} \\ &\vdots \\ 1 &\leq \sum_{i=1}^{m} y_i a_{in} \end{aligned} \tag{3.6}$$

dan

$$y_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1, \ldots, \text{m}.$$

Penyelesaian awal permasalahan di atas adalah

$$\text{v} = 1 \big/ (y_1 + \ldots + y_m)$$

dan strategi optimal pemain I menjadi

$$p_i = v y_i \quad \text{untuk} \quad i = 1, \ldots, \text{m}.$$

3.2. Penerapan Program Linear Pada Pemain II

Dengan cara yang sama permasalahan pemain II dapat dibawa ke dalam bentuk program linear. Permasalahan pemain II adalah :

mencari $q_1, \ldots, q_m$ yang akan

meminimalkan w (3.7)

dengan batasan

$$\begin{aligned} w &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j \\ &\vdots \\ w &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} q_j \\ q_1 + \ldots &+ qn = 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dan

$$q_j \geq 0 \quad \text{untuk} \quad i = 1, \ldots, \text{n}.$$

Dari persamaan (3.7) dan (3.8) diberikan $w > 0$ dan $x_j = q_j / w$ dan $q_1 + \ldots + q_n = 1$ sehingga $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1/w$.

Meminimalkan w ekuivalen dengan memaksimalkan $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1/w$, maka persamaan (3.7) dan (3.8) menjadi :

$$\text{memaksimalkan } x_1 + \ldots + x_n \tag{3.9}$$

dengan batasan

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ &\vdots \\ 1 &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{aligned} \tag{3.10}$$

dan

$$x_j \geq 0 \text{ untuk } j = 1, \ldots, \text{n}.$$

Jika penyelesaian permasalahan di atas didapat, maka penyelesaian awal permasalahan di atas adalah

$$w = 1/(\text{x}_1 + \ldots + \text{x}_\text{j})$$

dan strategi optimal pemain II menjadi

$$q_j = wx_j \quad \text{untuk} \quad j = 1, \ldots, \text{n}.$$

Persamaan (3.3)-(3.4) dan (3.7)-(3.8) adalah dual program sehingga mempunyai nilai/hasil yang sama. Hasil maksimum yang didapat pemain I sama dengan hasil minimum yang dicari pemain II terhadap pemain I.

3.3. Langkah-Langkah Penyelesaian Permasalahan Optimum Dengan Metode Pivot.

Untuk menyelesaikan permainan dengan metode poros/pivot ada beberapa langkah yang harus dilakukan.

Langkah 1.

Permasalahan yang ada dibawa ke dalam bentuk standar permasalahan maksimum.

Langkah 2.

Standar permasalahan maksimum pada langkah 1 dibawa ke dalam tabel simplek seperti di bawah ini

Tabel 3.1.

	x_1	x_2	...	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{11}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0

Langkah 3.

Pada langkah 3 akan dicari baris dan kolom pivot dengan melihat kembali metode pivot pada bab II.

Langkah 4.

Pada langkah ini akan digunakan rumusan pivot, yaitu

a. Setiap elemen $a(i,j)$ yang tidak terletak pada baris dan kolom pivot diganti dengan

$$a(i,j) - \frac{a(p,j).a(i,j)}{a(p,q)}.$$

b. Setiap elemen $a(i,j)$ pada baris pivot yaitu $a(p,j)$ dimana $j \neq q$ diganti dengan

$$\frac{a(p,j)}{a(p,q)}, \quad \text{dengan } i \neq p.$$

c. Setiap elemen $a(i,j)$ pada kolom pivot yaitu $a(i,q)$ dimana $i \neq p$ diganti dengan

$$-\frac{a(i,q)}{a(p,q)}, \quad \text{dengan } i \neq p.$$

d. Elemen pada pivot diganti dengan

$$\frac{1}{a(p,q)}.$$

Langkah 5.

Label pada sebelah kiri pivot diganti dengan label pada atas pivot, dan sebaliknya.

Langkah 6.

Jika masih ada elemen negatif pada baris $"m+1"$ kembali ke langkah 3.

Langkah 7.

Setelah tidak ada lagi elemen negatif pada baris $"m+1"$ dan kolom "n+1" didapat penyelesaian dan strategi optimal pemain I dan pemain II sebagai berikut :

a. Penyelesaian $\boldsymbol{w} = 1 \big/ (x_1 + \ldots + x_n)$ atau $1/$nilai pada ujung kanan bawah.

b. Strategi optimal pemain II

$$q_j = wx_j \quad \text{untuk} \quad j = 1, ..., n.$$

dengan $"x_j"$:

-$"x_j"$ pada baris label atas nilainya sama dengan nol.

-$"x_j"$ pada kolom label kiri nilainya sama dengan nilai pada kolom paling kanan.

c. Strategi optimal pemain I

$$p_i = vy_i \quad \text{untuk} \quad i = 1, \ldots, m$$

dengan $"y_i"$:

-$"y_i"$ pada kolom label kiri nilainya sama dengan nol.

-$"y_i"$ pada baris label atas nilainya sama dengan nilai pada baris paling bawah.

3.4. Contoh Penyelesaian Matrik Permainan Dengan Metode Pivot.

Berikut ini diberikan contoh permainan yang diselesaikan dengan metode pivot.

Contoh 3.1.

Diberikan permainan dengan matrik permainan sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah pertama yang dilakukan untuk dapat menyelesaikan permainan dengan metode pivot adalah membawa matrik pemainan A ke dalam permasalahan maksimum standar :

memaksimumkan $x_1 + \ldots + x_n$

dengan batasan

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & \le 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & \le 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \le 1 \end{array}$$

dan

$$x_j \ge 0 \text{ untuk } j = 1, \ldots, n.$$

Langkah 2 adalah membawa permasalahan maksimum standar pada langkah 1 ke dalam tabel simplek dan diperoleh tabel simplek untuk matrik permainan A adalah seperti di bawah ini

Tabel 3.2.

	x_1	x_2	x_3	
y_1	2	-1	6	1
y_2	0	1	-1	1
y_3	-2	2	1	1
	- 1	- 1	- 1	0

Pada langkah 3 kita harus memilih pivot. Ada 3 kolom dengan bilangan negatif pada baris paling bawah, dipilih salah satu, misal kolom ke-1, dan dipilih elemen $a(i,1)$ yang positif dan mempunyai nilai $\dfrac{a(i,n+1)}{a(i,1)}$ terkecil . Pada kolom ke-1 elemen $a(i,1)$ yang positif hanya pada baris ke-1, maka baris ke-1 menjadi baris pivot dan elemen $a(1,1)$ sebagai pivot.

Langkah 4 dan langkah 5 membuat sebagian besar elemen-elemen pada tabel berubah seperti di bawah ini

Tabel 3.3.1.

	x_1	x_2	x_3	
y_1	$\boxed{2}$	-1	6	1
y_2	0	1	-1	1
y_3	-2	2	1	1
	-1	-1	-1	0

$\rightarrow$

Tabel 3.3.2.

	y_1	x_2	x_3	
x_1	$1/2$	$-1/2$	3	$1/2$
y_2	0	1	-1	1
y_3	1	1	7	2
	$1/2$	$-3/2$	2	$1/2$

Dari tabel di atas masih terdapat bilangan negatif pada baris paling bawah yaitu pada kolom ke-2 sehingga sesuai langkah 6 kita kembali ke langkah 3. Pada kolom ke-2 ada dua $a(i,2)$ yang positif yaitu $a(2,2)$ dengan $\dfrac{a(2,n+1)}{a(2,2)}$ = 1 dan $a(3,2)$ dengan $\dfrac{a(3,n+1)}{a(3,2)}$ = 2, didapat $a(2,2)$ sebagai pivot.

Langkah 4 dan langkah 5 dapat dilihat pada tabel simplek berikut ini.

Tabel 3.4.1.

	y_1	x_2	x_3	
x_1	$1/2$	$-1/2$	3	$1/2$
y_2	0	$\boxed{1}$	-1	1
y_3	1	1	7	2
	$1/2$	$-3/2$	2	$1/2$

→

Tabel 3.4.2.

	y_1	y_2	x_3	
x_1	$1/2$	$1/2$	$5/2$	1
x_2	0	1	-1	1
y_3	1	-1	8	1
	$1/2$	$3/2$	$1/2$	2

4. Kesimpulan

Dari Tabel 3.4.2. di atas semua elemen pada baris paling bawah positif sehingga dari langkah 7 diperoleh

a. Nilai permainan matrik A adalah
   $1/$nilai pada ujung kanan bawah = $\boldsymbol{w} = 1 \big/ (x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{2}$.

b. Strategi optimal pemain II
   - Dari baris label atas diperoleh nilai $x_3 = 0$, sehingga $q_3 = 0$.
   - Dari kolom label kiri diperoleh nilai $x_1 = 1$ dan $x_2 = 1$, sehingga $q_1 = wx_1 = 1/2$ dan $q_2 = wx_2 = 1/2$.

   Diperoleh strategi optimal pemain II adalah
   $(q_1, q_2, q_3) = (1/2, 1/2, 0)$.

c. Strategi optimal pemain I.
   - Dari kolom label kiri diperoleh nilai $y_3 = 0$, sehingga $p_3 = 0$.
   - Dari baris label atas diperoleh nilai $y_1 = 1/2$ dan $y_2 = 3/2$, sehingga $p_1 = vy_1 = (1/2)(1/2) = 1/4$ dan $p_2 = vy_2 = (1/2)(3/2) = 3/4$.

Diperoleh strategi optimal pemain I adalah $(p_1, p_2, p_3) = (1/4, 3/4, 0)$.

5. Daftar Pustaka

Hamdy A Taha. 1993. *"Riset Operasi"*, Departement of industrial Engineering university of Arkans.

Wayne L. Winston 1982, *"Operations Research"*, Indiana university.

Richard Broson. *"Operations Research"*, second edition.

Goldberg, R.R, 1976, *"Method of Real Analysis"*, Second Edition, John Wiley & Sons, United States of America.

Hirschman, I.I, 1962, *"Infinite Series"*, Holt, Rinehart and Wiston, Inc, United States of America.