Jurnal Epsilon
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.15 No.2 (Desember 2021) Hal. 105-115
Terakreditasi SINTA 4, SK 158/E/KPT/2021

MODULAR BLOK DI RUANG BARISAN TERJUMLAH CESARO ORLICZ

Haryadi

Prodi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Indonesia
Jl. RTA Milono Km 1,5 Palangkaraya
email : *haryadi@umpr.ac.id*

ABSTRACT

On the Cesaro summable of orde-p sequence space, if the fuction $|\cdot|^p, 1 < p < \infty$ is replaced by Orlicz function, it is not always easy to define norm in the space. In this paper, we study some properties of the Cesaro Orlicz summable sequence space. First, on the space we define a modular and its the luxemburg norm, and then some topological properties is explored. The results show that the sequence spaces is modular complete and nom complete. In addition, the space is a BK-space but not an AK-space.

Keywords : Olicz function, Cesaro, sequences

ABSTRAK

Di dalam ruang barisan terjumlah Cesaro orde-p, jika fungsi $|\cdot|^p, 1 < p < \infty$ diganti dengan fungsi Orlicz, tidak selalu mudah untuk mendefinisikan normanya. Di dalam makalah ini akan dipelajari sifat-sifat ruang barisan terjumlah Cesaro Orlicz. Terlebih dahulu pada ruang barisan ini dikonstruksi modular dan norma luxemburgnya. Selanjutnya akan ditelaah sifat-sifat topologisnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ruang barisan tersebut merupakan ruang lengkap modular dan lengkap norma. Lebih lanjut, ruang tersebut merupakan ruang - BK tetapi bukan ruang- AK.

Kata kunci: *fungsi Orlicz, Cesaro, barisan*

1. PENDAHULUAN

Barisan (x_k) di dalam $\mathbb{R}$ dikatakan terjumlah Cesaro orde-p ke x jika $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n}|x_k - x|^p = 0$. Studi mengenai ruang barisan terjumlah Cesaro ini telah dikerjakan oleh beberapa peneliti seperti (Borwein, D., 1965), (Maddox, I.J., 1968) dan (Malkowsky, E. & Velickovic, V., 2013). Jika di dalam ruang ini digunakan norma *section*, maka akan dijumpai beberapa kesulitan yang dihadapi dalam menelaah topik lainya di dalam ruang barisan tersebut. Goswin & Erdman menyatakan bahwa kesulitan tersebut terjadi karena pada norma *section* setiap suku akan dihitung mulai suku pertama lagi (Goswin, K. & Erdman, G., 1967). Oleh karena itu beberapa peneliti membangun ruang yang ekuivalen ruang barisan terjumlah Cesaro tersebut melalui pengkonstruksian norma yang lain.

Penelitian (Maddox, I.J., 1968) (Malkowsky, E. & Velickovic, V., 2013) menggunakan norma blok atau norma dyadic yaitu

$$|(x_k)| = sup_r \frac{1}{2^r} \Sigma_{k=2^{r-1}}^{2^r-1} |x_k - x|^p$$

untuk menelaah menelaah karakteristik matriks transformasi pada ruang barisan pada ruang barisan terjumlah Cesaro orde-p. Lebih lanjut (Maddox, I.J., 1980) juga menggunakan norma ini untuk menelaah ruang barisan terjumlah Cesaro di dalam ruang bernorma.

Permasalahan yang terjadi adalah jika fungsi $|\cdot|^p$ diganti dengan fungsi Orlicz, maka pendefinisian normanya tidak selalu bisa dikerjakan. Hal ini disebabkan tidak setiap fungsi Orlicz bersifat homogen. Dalam hal ini pengkonstruksian norma dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mengkonstruksi fungsi modular pada ruang barisan Orlicz seperti dikerjakan oleh (Kozlowski, W.M., 1988) dan (Musielak, J., 1983). Pengkonstruksian norma melalui modular ini telah banyak diterapkan oleh peneliti lainnya diantaranya (Bala, I., 2012), (Haryadi, Supama & Zulijanto A., 2017) dan (Rahman, Md, F & Karim, A.B.M.R, 2016).

Di dalam makalah ini akan ditelaah ruang barisan terjumlah Cesaro Orlicz yang dikonstruksi oleh modular blok atau modular *dyadic*. Berangkat dari pengkonstruksian ini, selanjutnya akan diteliti sifat inklusi dengan ruang barisan terbatas. Lebih lanjut akan diteliti sifat-sifat kekonvergenan modular dan kekonvergenan norma, sifat BK dan AK.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Di dalam makalah ini notasi $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{R}$ berturut-turut menyatakan himpunan semua bilangan asli dan himpunan semua bilangan real. Selanjutnya ruang barisan dengan suku-suku bilangan real dituliskan ω. Anggota ω dituliskan dengan $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_k) = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots)$ dengan $\mathrm{x}_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2, \cdots$. Notasi $\theta = (0,0, \cdots)$ menyatakan barisan yang setiap sukunya 0. Untuk sebarang basiran x dan bilangan asli m, $x^{[m]} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_m, 0,0, \cdots)$. Barisan didalam ω dituliskan $\left(x^{(n)}\right) = (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$ dengan $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right) = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,. Untuk sebarang bilangan bulat $r \geq 0$, didefinisikan $I_r = [2^r, 2^{r+1}) = \{k \in \mathbb{N}: 2^r \leq k < 2^{r+1}\}$. Untuk memudahkan penulisan, selanjutnya $\sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} x_k$ dituliskan dengan $\sum_{I_r} x_k$.

Uraian mengenai fungsi Orlicz berikut diacu dari (Krasnosel'skii, M.A. & Rutickii, Y.B, 1961). Fungsi Orlicz dituliskan dengan ϕ, yaitu $\phi: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dengan ϕ fungsi genap, kontinu, konveks, $\phi(t) = 0$ jika dan hanya jika $t = 0$ dan $lim_{t\to\infty}\phi(t) = \infty$. Setiap fungsi Orlicz ϕ dapat dinyatakan dengan

$$\phi(t) = \int_0^t p(s)ds \tag{1}$$

dengan p fungsi tidak turun dan kontinu kanan. Untuk sebarang fungsi Orlicz ϕ, fungsi ψ dengan definisi $\psi(s) = sup\,\{|s|t - \phi(t): t \geq 0\}$ merupakan fungsi Orlicz. Selanjutnya ϕ dan ψ dinamakan pasangan fungsi Orlicz komplementer. Jika ϕ dan ψ pasangan fungsi Orlicz komplementer maka berlaku ketaksamaan Young, yakni $|ts| \leq \phi(t) + \psi(s)$ untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$. Ketaksamaan Young menjadi kesamaan jika $s = p(|t|)$ atau $t = q(|s|)$ dengan p (atau q) fungsi tidak turun dan kontinu kanan yang memenuhi persamaan (1)

$\phi(t) = \int_0^t p(s)ds$. Fungsi $\phi^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ adalah fungsi dengan definisi $\phi^{-1}(z) = x$ jika dan hanya jika $\phi(x) = z$.

Fungsi Orlicz ϕ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2 jika terdapat konstanta K dan bilangan $c \geq 0$ sehingga $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ untuk setiap $t \geq c$. Kondisi-Δ_2 juga ekuivalen dengan terdapat bilangan $K(\lambda) > 0$ sehingga $\phi(\lambda x) \leq K(\lambda)\phi(x)$ dengan $\lambda > 1$. Perlu diketahui bahwa jika fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 maka fungsi Orlicz komplementernya belum tentu memenuhi kondisi- Δ_2.

Fungsi Orlicz tidak selalu memiliki sifat homogen maupun aditif. Hal ini akan menyulitkan didalam pembentukan norma pada barisan yang dibentuk dengan fungsi Orlicz. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah dengan terlebih dahulu membentuk modular.

Ruang linear X atas lapangan $\mathbb{R}$ adalah himpunan tak kosong X dengan dua fungsi $+: X \times X \to X$ dan $\cdot: \mathbb{R} \times X \to X$ sehingga untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $x, y, z \in X$ berlaku (1) $x + y = y + x$, (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (3) terdapat $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$, (4) terdapat $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = \theta$, (5) $1 \cdot x = x$, (6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, (7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, dan (8) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$. Untuk mempermudah penulisan, $\alpha \cdot x$ akan dituliskan dengan αx. Selanjutnya, di dalam makalah ini yang dimaksud ruang linear adalah ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$.

Diberikan ruang linear X. Fungsi $\rho: X \to [0,\infty)$ dinamakan pseumodular jika memenuhi kondisi-kondisi berikut:

(1) $\rho(\theta) = 0$,
(2) $\rho(-x) = \rho(x)$ untuk setiap $x \in X$, dan
(3) $\rho(\alpha x + \beta x) \leq \rho(x) + \rho(y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$.

Jika kondisi (3) diganti dengan

(3') $\rho(\alpha x + \beta x) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$,

maka ρ dinamakan psemodular konveks. Lebih lanjut, jika fungsi ρ juga memenuhi kondisi: $\rho(x) = 0$ berakibat $x = \theta$, maka ρ dinamakan modular ((Kozlowski, W.M., 1988)).

Diberikan modular konveks ρ. Himpunan

$$X_\rho = \{x \in X: lim_{\lambda \to 0}\rho(\lambda x) = 0\} \qquad (2)$$

merupakan ruang linear atas $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, X_ρ merupakan ruang bernorma dengan norma Luxemburg

$$\|x\| = \inf\left\{t > 0: \rho\left(\frac{x}{t}\right) \leq 1\right\}.$$

Diberikan (x_k) barisan didalam ruang X_ρ. Barisan (x_k) dikatakan barisan Cauchy-ρ jika $\rho(x_k - x_l) \to 0$ untuk $k, l \to \infty$. Barisan (x_k) dikatakan konvergen-ρ, jika terdapat $c \in X$ sehingga $\rho(x_k - c) \to 0$. Untuk pembahasan pada bagian berikutnya diperlukan teorema berikut.

Teorema 1. (Musielak, J., 1983) Diketahui ruang modular X_ρ.

(1) Jika $\|x\| < 1$, maka $\rho(x) \leq \|x\|$.
(2) Jika $\rho(\lambda(x_k - c)) \to 0$ untuk setiap $\lambda > 0$ maka $\|x_k - c\| \to 0$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian diawali dengan mengkonstruksi himpunan semua barisan terjumlah Cesaro-ϕ, dituliskan w_ϕ, sebagai berikut.

$$w_\phi = \left\{(x_k): \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) < \infty\right\}$$

Untuk kepentingan pembahasan perlu disampaikan kembali ruang barisan sebagai berikut:

$$c_\phi = \{(x_k): \phi(x_k - x_0) \to 0\}$$
$$\ell_\phi = \left\{(x_k): \sum \phi(x_k) < \infty\right\}$$

Bertolak dan definisi tersebut, selanjutnya ditelaah sifat linear w_ϕ dan sifat inklusi dengan ruang barisan c_ϕ dan ℓ_ϕ, pengkonstruksian fungsi modular dan norma Luxemburg pada ruang barisan tersebut. Dengan menggunakan modular dan norma ini, selanjutnya ditelaah sifat-sifat topologisnya.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Di dalam diskusi selanjutnya, diasumsikan fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2. Agar pembahasan dapat ditempatkan dalam kerangka yang lebih mudah, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa himpunan semua barisan terjumlah Cesaro-ϕ merupakan ruang linear, yakni

Teorema 2. Himpunan w_ϕ merupakan ruang linear.

Bukti.

(i) Diambil sebarang bilangan real α dan barisan (x_k) di dalam w_ϕ, yakni $\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) < \infty$. Karena ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 maka terdapat bilangan positif K sehingga $\phi(\alpha c) \leq K\phi(c)$ untuk setiap bilangan real c. Oleh karena itu

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(\alpha x_k) \leq \frac{K}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) < \infty,$$

yang berarti barisan (αx_k) anggota w_ϕ.

(ii) Diambil sebarang barisan (x_k) dan (y_k) di dalam w_ϕ. Karena ϕ konveks dan memenuhi kondisi-Δ_2, maka untuk sebarang bilangan real $z_1$dan z_2 berlaku

$$\phi(z_1 + z_2) = \phi\left(2\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\right)\right) \leq K(\phi(z_1) + \phi(z_2))$$

untuk suatu $K > 0$. Oleh karena itu

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k + y_k) \leq \sup_r \frac{K}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) + \sup_r \frac{K}{2^r}\sum_{I_r}\phi(y_k) < \infty$$

yang berarti barisan $(x_k + y_k)$ anggota w_ϕ.

Hubungan inklusi antara ruang barisan dinyatakan di dalam teorema berikut.

Teorema 3. $c_\phi \subset w_\phi$ dan $\ell_\phi \subset w_\phi$

Bukti. Diketahui $x \in c_\phi$. Jadi ada x_0 sehingga $\phi(x_k - x_0) \to 0$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat bilangan asli N sehingga

$$\phi(x_k - x_0) < \epsilon.$$

Akibatnya untuk $r \geq N$ berlaku $\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k - x_0) < \varepsilon$. Dengan menggunakan kekonveksan dan kondisi-Δ_2 fungsi ϕ,

$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) \leq \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k - x_0 + x_0) \leq K\left(\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k - x_0) + \phi(x_0)\right)$$

$$\leq K(\varepsilon + \phi(x_0))$$

untuk suatu $K > 0$. Dengan demikian $\sup_r \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(x_k)$, yakni $(x_k) \in w_\phi$.
Selanjunya akan ditunukkan bahwa $\ell_\phi \subset w_\phi$. Diambil sebarang barisan $(x_k) \in \ell_\phi$. Jadi terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $\sum \phi(x_k) \leq M$. Akibatnya $\frac{1}{2^r} \sum \phi(x_k) \leq M$. Dengan demikian $\sup_r \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(x_k) < \infty$, yakni $(x_k) \in w_\phi$.

Contoh berikut menunjukkan bahwa ruang ℓ_ϕ merupakan himpunan bagian sejati dari ruang w_ϕ, yakni $\ell_\phi \subset w_\phi$ dan $\ell_\phi \neq w_\phi$.

Contoh 1. Diberikan fungsi Orlicz ϕ. Dibentuk barisan $x = (x_k)$ sehingga

$$\phi(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq 2^r \\ 2^r, & k = r^r \end{cases}$$

Untuk setiap r berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) > 2^r$, sehingga diperoleh $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) = \infty$, yakni $(x_k) \notin \ell_\phi$. Dilain pihak

$$\frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(x_k) = 1$$

sehingga diperoleh $\sup_r \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(x_k) < \infty$, yakni $(x_k) \in w_\phi$.

Mengingat tidak setiap fungsi Orlicz bersifat homogen, maka untuk mengkonstruksi norma di ruang linear w_ϕ dilakukan dengan membentuk fungsi modular.

Teorema 4. Fungsi $\rho: w_\phi \to [0, \infty]$ dengan

$$\rho(x) = \sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(x_k)$$

merupakan modular konveks.

Bukti: Kondisi (1) didalam definisi modular berlaku berdasarkan definisi ρ. Demikian pula kondisi (2) juga jelas berlaku, mengingat ϕ merupakan fungsi genap. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kondisi (3) dipenuhi.
Diambil sebarang barisan $x, y \in w_\phi$ dan bilangan real α, β dengan $\alpha + \beta = 1$. Karena ϕ konveks, maka

$$\sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(\alpha x_k + \beta y_k) \leq \alpha \cdot \sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(\alpha x_k) + \beta \cdot \sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r} \sum_{I_r} \phi(y_k)$$

yang berarti $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$. Selanjutnya kekonveksan ρ dapat dibuktikan dengan mengingat bahwa ϕ konveks.

Hasil berikut menyatakan keterkaitan antara ruang modular w_ϕ ruang yang dinyatakan di dalam persamaan (2).

Teorema 5. Jika fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2, maka $w_\phi = \left\{(x_k): lim_{\lambda\to 0} \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) = 0\right\}$.

Bukti: Diambil sebarang $x = (x_k) \in w_\phi$ dan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $(x_k) \in w_\phi$ maka terdapat bilangan positif M sehingga $\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) = M$. Untuk sebarang bilangan λ dengan $|\lambda| \le \frac{\varepsilon}{M}$ dan $|\lambda| < 1$. Sifat konveks ϕ mengakibatkan

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) \le \lambda \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) < \varepsilon$$

Dengan demikian $lim_{\lambda\to 0} \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) = 0$.

Sebaliknya, diambil sebarang barisan $x = (x_k)$ sehingga $lim_{\lambda\to 0} \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) = 0$. Diambil $\delta > 0$ sehingga jika $|\lambda| < \delta$ maka $\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) < 1$. Diambil bilangan asli terkecil n_0 sehingga $\frac{1}{\lambda} \le 2^{n_0}$. Kondisi-$\Delta_2$ mengakibatkan terdapat bilangan positif K sehingga $\left(\frac{c}{\lambda}\right) \le \phi(2^{n_0}) \le K^{n_0}\phi(c)$ untuk setiap bilangan real c. Oleh karena itu

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) = \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi\left(\frac{\lambda x_k}{\lambda}\right) \le K^{n_0} \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(\lambda x_k) < \infty$$

yang berarti $x \in w_\phi$.

Dengan menggunakan fungsi modular ρ, selanjutnya dapat dipelajari sifat-sifat kekonvergenan modular di ruang w_ϕ. Sifat-sifat kekonvergenan tersebut dinyatakan dalam Teorema 6 dan Teorema 7.

Teorema 6. Modular ρ memenuhi kondisi-δ_2, yakni $\rho\left(x^{(n)}\right) \to 0$ berakibat $\rho\left(2x^{(n)}\right) \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Bukti: Diketahui $\rho\left(x^{(n)}\right) \to 0$. Karena ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 maka ada $K > 0$ sehingga $\phi(2c) \le K\phi(c)$ untuk setiap bilangan real c. Akibatnya

$$\rho\left(2x^{(n)}\right) = \sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi\left(2x_k^{(n)}\right) \le K \ \sup_{\mathrm{r}} \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi\left(x_k^{(n)}\right) = K\rho\left(x^{(n)}\right) \to 0.$$

Teorema 7. Setiap barisan Cauchy-ρ merupakan barisan konvergen-ρ.

Bukti: Diketahui $(x^{(n)})$ barisan Cauchy-ρ didalam w_ϕ, yakni

$$\rho\left(x^{(n)} - x^{(m)}\right) = \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}) \to 0 \qquad \text{jika } m, n \to \infty.$$

Karena untuk setiap r

$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}) \le \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k^{(n)}-x_k^{(m)})$$

maka

$$\sum_{I_r}\phi(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}) \to 0 \quad \text{jika } m,n \to \infty.$$

Akibatnya untuk setiap bilangan asli $k \in I_r$ berlaku

$$\phi\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right) \to 0, \qquad \text{jika } n,m \to \infty,$$

yang berarti $\left(x_k^{(n)}\right) = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots)$ merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathbb{R}$. Dengan demikian $(x_k^{(n)})$ konvergen ke suatu bilangan real x_k. Selanjutnya dibentuk barisan $x = (x_1, x_2, \cdots)$ dan diambil bilangan asli tetap $m \ge N$. Berlaku

$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k^{(n)}-x_k) \le \frac{K}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right) + \frac{K}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(x_k^{(m)}-x_k\right) \to 0$$

Jika $m,n \to \infty$. Akibatnya $\rho\left(x^{(n)}-x\right) \to 0$, yakni barisan $(x_k^{(n)})$ konvergen-ρ ke $x = (x_k)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(x_k) \in w_\phi$. Barisan $x_k^{(n)} \in w_\phi$, sehingga berlaku

$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) = \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right) \le \frac{K}{2^{r+1}}\sum_{I_r}\phi\left(x_k - x_k^{(n)}\right) + \frac{K}{2^{r+1}}\sum_{I_r}\phi\left(x_k^{(n)}\right) \le \infty.$$

Karena ρ merupakan modular konveks, maka di ruang w_ϕ dapat didefinisikan norma Luxemburg $\|\cdot\|$ sebagai berikut:

$$\|x\| = inf\left\{t > 0 : \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(\frac{x_k}{t}\right) \le 1\right\}.$$

Dengan memperhatikan bahwa fungsi ϕ dan ϕ^{-1} kontinu, dapat dibuktikan lemma berikut.

Lemma 1. Jika $\rho\left(x^{(n)}\right) \to 0$ maka untuk setiap $\lambda > 0$ berlaku $\rho\left(\lambda x^{(n)}\right) \to 0$.

Bukti. Untuk $0 < \lambda \le 1$, lemma dapat dibuktikan dengan menggunakan kekonveksan fungsi ϕ. Untuk sebarang $\lambda > 1$ diambil bilangan asli n_0 sehingga $\lambda \le 2^{n_0}$. Selanjutnya

$$\rho\left(\lambda x^{(n)}\right) \le \rho\left(2^{n_0} x^{(n)}\right) \le K^{n_0}\rho\left(x^{(n)}\right) \to 0.$$

Berdasarkan Teorema 7 dan Lemma 1, selanjutnya diperoleh sifat kelengkapan ruang w_ϕ yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 8. Ruang w_ϕ merupakan ruang lengkap terhadap norma Luxemburg.
Bukti. Diberikan barisan Cauchy $(x^{(n)})$ di dalam w_ϕ. Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$. Terdapat bilangan asli N sehingga
$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \epsilon, \qquad n, m \geq N.$$
Akibatnya
$$\rho\left(x^{(n)} - x^{(m)}\right) < \varepsilon, \qquad n, m \geq N,$$
yang berarti $(x^{(n)})$ barisan Cauchy-ρ. Berdasarkan Teorema 7, $(x^{(n)})$ konvergen-ρ ke suatu barisan $x = (x_k) \in w_\phi$. Oleh karena itu ada N' sehingga
$$\rho\left(x^{(n)} - x\right) < \varepsilon, \qquad n \geq N'.$$
Diambil sebarang bilangan real $\lambda > 0$. Berdasarkan Lemma 1,
$$\rho\left(\lambda\left(x^{(n)} - x\right)\right) \to 0.$$

Oleh karena itu $(x^{(n)})$ konvergen norma ke (x_k).

Teorema berikut merupakan hasil yang diperoleh dengan memanfaatkan sifat naik monoton fungsi Orlicz.
Teorema 9 . Ruang w_ϕ merupakan ideal di w.
Bukti. Diketahui barisan $x = (x_k) \in w$ dan $y = \left(x_y\right) \in w_\phi$ dengan $|x_k| \leq |y_k|$, $k = 1, 2, \cdots$. Karena fungsi Orlicz ϕ bersifat naik monoton pada $[0, \infty)$ maka untuk setiap $r \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) \leq \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(y_k).$$
Oleh karena itu $sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r} \phi(x_k) < \infty$, yakni $x \in w_\phi$.

Teorema 1 (1) mengakibatkan bahwa setiap barisan di dalam w_ϕ yang konvergen terhadap norma adalah konvergen terhadap modular. Akibat ini digunakan dalam pembuktian teorema berikut.
Teorema 10. Ruang w_ϕ merupakan ruang-BK
Bukti. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $P_j \colon w_\phi \to \mathbb{R}$ dengan $P_j\left(x^{(n)}\right) = x_j^{(n)}$ kontinu.
Diambil $(x^{(n)})$ barisan di dalam w_ϕ sehingga $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ untuk suatu $x = (x_k) \in w_\phi$. Akibatnya $\rho\left(x^{(n)} - x\right) \to 0$. Dengan demikian untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{j}\left(\phi\left(x_j^{(n)} - x_j\right) \to 0\right.$. Karena ϕ^{-1} kontinu, maka $\left|x_j^{(n)} - x_j\right|$.
Dengan demikian dengan
$$\left|P_j\left(x^{(n)} - x\right)\right| = \left|x_j^{(n)} - x_j\right| \to 0,$$
yakni P_j kontinu.

Ruang barisan w_ϕ bukan ruang-AK seperti ditunjukkan melalui contoh berikut.

Contoh 2. Diberikanfungsi Orlicz ϕ. Diambil sebarang barisan $x = (x_k) \in w_\phi$ dengan $x_k = \phi^{-1}(1), k = 1,2,\cdots$. Barisan $(x_k - x_k^{[m]})$ adalah barisan dengan suku-suku

$$x_k - x_k^{[m]} = \begin{cases} 0, & jika\ k \leq m \\ x_k, & jika\ k > m \end{cases}$$

Untuk sebarang bilangan asli m terdapat bilangan r sehingga $m < 2^r$. Akibatnya

$$\frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(y_k) = \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi(x_k) = 1$$

Oleh karena itu

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(\frac{x_k - x_k^{[m]}}{t}\right) \geq 1.$$

Karena ϕ naik monoton, maka untuk setiap bilangan t dengan $0 < t < 1$,

$$\sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(\frac{x_k - x_k^{[m]}}{t}\right) \geq 1.$$

Dengan demikian

$$\left\|x - x^{[m]}\right\| = \inf\left\{t > 0 : \sup_r \frac{1}{2^r}\sum_{I_r}\phi\left(\frac{x_k - x_k^{[m]}}{t}\right) \leq 1\right\} > 1$$

yang berarti barisan $(x^{[m]})$ tidak konvergen ke x.

5. PENUTUP

Dengan menggunakan modular blok dapat dikonstruksi ruang barisan terjumlah Cesaro-ϕ. Ruang barisan ini merupakan ruang lengkap modular dan lengkap norma. Selanjutnya berdasarkan hasil penelitian ini, terbuka kemungkinan untuk diteliti topik-topik yang terkait dengan keterjumlahan seperti dual Kothe-Toeplitz dan matriks transformasi di ruang tersebut.

REFERENSI

Krasnosel'skii, M.A. & Rutickii, Y.B. (1961). *Covex Function and Orlicz Space.* Netherlands: P. Noordhoff Ltd.

Bala, I. (2012). On Cesaro Sequence Space defined by an Orlicz Function. *Communications in Mathematics and Applications, 3*(2), 197-204.

Borwein, D. (1965). Linear Functional Connected with Strong Cesaro Summability. *J. Londong Math. Soc.*

Goswin, K. & Erdman, G. (1967). *The Blocking Technique, Weigthed Mean Operator and Hardy's Inequality*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Haryadi, Supama & Zulijanto A. (2017). The The beta-dual of the Cessaro sequence spaces defined on a generalized Orlicz space. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 893, 893*, hal. 1-7. Denpasar.

Kozlowski, W.M. (1988). *Modular Function Space.* New York: Marcel Dekker.

Maddox, I.J. (1968). On Kuttner's Theorem. *J. London Math. Soc.*, 43, 285-290.

Maddox, I.J. (1980). Kuttner's Theorem for Operator. *Compositio Mathematica*, Vol. 29 No. 1 pp 35-41.

Malkowsky, E. & Velickovic, V. (2013). Sequence Spaces. *Filomat*, pp 821-829.

Musielak, J. (1983). *Orlics Space and Modular Space.* Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer Verlag.

Rahman, Md, F & Karim, A.B.M.R. (2016). Dual Space of Generalized Cesaro Sequence Space and Related Matrix Mapping. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention*, Vol. 4, pp 44-50.